包络原理及其在机械方面的应用

冯德坤　马香峰　编著

冶金工业出版社

包络原理及其在机械方面的应用

冯德坤　马香峰　编著

冶 金 工 业 出 版 社

（京）新登字036号

图书在版编目（CIP）数据
包络原理及其在机械方面的应用／冯德坤，马香峰编著．
北京：冶金工业出版社，1994．10
ISBN 7-5024-1559-9
Ⅰ．包…　Ⅱ．①冯…②马…Ⅲ．①包络-理论②包络-理论-应用-齿轮　Ⅳ．TH132.4
中国版本图书馆CIP数据核字（94）第07507号

出版人　卿启云（北京沙滩嵩祝院北巷39号，邮编100009）
北京昌平百善印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销
1994年12月第1版，1994年12月第1次印刷
850mm×1168mm　1/32；8.5印张；261页；1-1000册
9.00元

内容提要

本书在数学理论上系统地讨论了平面曲线族、空间曲线族、平面族和空间曲面族的包络，以及各种包络的弯曲程度；详细地讨论了曲线和曲面给出的方式是显式、隐式和参数式，运动参数是单参数、双参数及n参数等各种情形的包络条件、曲率及它们之间的内在联系。在应用上选择了机械方面的典型例子。

本书内容曾给北京科技大学机械系选择啮合原理课题的硕士研究生讲授过，并在此基础上作了充实。本书可供从事齿轮设计的工程技术人员和研究包络现象的有关人员参考，也可作为高等院校机械设计和制造专业的教学用书。

前　言

包络现象广泛地存在于工程技术中。机加工的展成法用刀具去切削工件，可看作空间直线族的包络；平面磨床在工作时，砂轮与工件接触，就会形成平面曲线族的包络；成型轧制中孔型和轧件之间的关系，是一种空间曲面族的包络；在平面二次包络弧面蜗杆传动的加工中，用平面砂轮去磨削蜗杆，就是平面族的包络，等等。另外，在无线电电路和晶体管特性的研究中，会遇到许多包络曲线。而在常微分方程解的唯一性定理和偏微分方程的研究中，也会碰到包络问题。

研究以上包络现象和问题的规律，就是本书所要阐明的包络原理，它包括平面曲线族和空间曲线族的包络，平面族的包络和空间曲面族的包络，以及各种包络的弯曲程度。

包络原理属于微分几何范畴。但其具体内容在一般的微分几何书中很少或没有论述。有的内容虽有所论述，但其表达形式不便于应用。因此，本书的包络原理可作为微分几何的补充。

空间啮合原理的研究方法之一——包络法，在本世纪80年代初取得了可喜成果。1983年冶金工业出版社出版的《空间啮合原理及SG—71型蜗轮副》是这一成果的代表作（冯德坤是该书著者之一），该书获1983年全国优秀科技图书二等奖。包络法的理论依据是包络原理。对它的研究将会有助于包络法建立在更加扎实的数学基础之上并且得到广泛的应用。

本书有以下特点：

第一，本书的论述建立在严格的数学基础之上，系统地讨论了包络理论，它包括平面曲线族和空间曲线族，平面族和空间曲面族包络形成的条件分析及其与各种包络现象的内在联系。

第二，分别就曲线族和曲面族的形式是显式、隐式和参数式，运动参数是单参数、双参数和n（$\geqslant 3$）参数等各种情形，以及它们之间的转换规律，都进行了讨论。从中得到一些定理和简洁的公式，方便了应用。

第三，列举了包络原理在机械方面的一些应用，选择了一些典型的例子，为拓广包络原理的应用创造条件。

本书的第一章至第五章是深圳大学软科学系冯德坤编写；第六章由北京科技大学机械系马香峰编写。

本书的出版，得到广东（蛇口）华美钢铁有限公司及其领导杨积立、程浩和张崇弟先生的大力支助。本书承蒙深圳大学软科学研究所所长廖可人教授审阅。特在此表示衷心感谢。

由于我们水平有限，不妥之处，敬请读者批评指正。

编者　1994年1月

目　录

第一章

平面曲线族的包络

平面曲线族的包络在包络理论中占有重要的位置，它是空间曲线族的包络及曲面族包络的基础，我们要进行较为详细的讨论。这一章的内容包括平面曲线族的密度，隐式和参数表示的平面曲线族的包络，包络的曲率及其与常微分方程奇解的关系。

第一节　平面曲线族的密度

一、简单曲线弧

对于一条平面曲线，通常的表示方式有三种：显式，隐式和参数式。这三种形式具备一定的条件时，它们就规定了一条简单曲线弧。

定义1　若函数$y=f(x)$在〔a，b〕区间上单值，有连续的导数，则动点（x，y）的轨迹，称为〔a，b〕上的简单曲线弧，简称为曲线弧。

由定义1可知，简单曲线弧本身不相交，它的每一点的切线随着动点的运动而连续转动，并且为了在每一点有确定的导数值，简单曲线弧每一点的切线不平行于y轴。同时，它还具有下面重要的分析性质：

定理1　简单曲线弧上任一点M（x,y）到其上一点M_0(x_0,y_0)的切线的距离与这两点距离之比，对$x\to x_0$时是高价无穷小量。

证：设过M_0点任一割线的斜率为k，则割线的方程为

$$Y-y_0=k(X-x_0)$$

其中（X、Y）是割线上动点的流动坐标。点M(x,y）到割线的

距离为

$$\overline{MP}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left[f(x)-f(x_0)-k(x-x_0)\right] \qquad (1-1)$$

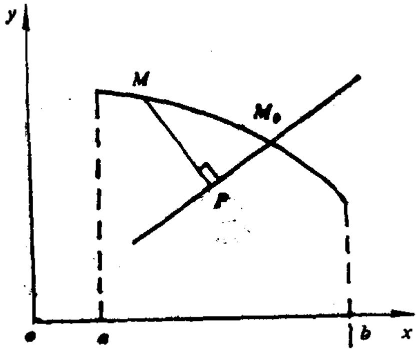


图 1-1 曲线和割线的位置

设$f''(x)$在x_0点的某邻域内存在，将函数$f(x)$按（$x-x_0$)的幂展为一阶的泰勒公式，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0+\theta x)(x-x_0)^2$$

$$(1-2)$$

将上式代入（1-1），有

$$\overline{MP}=\frac{f'(x_0)-k}{\sqrt{1+k^2}}(x-x_0)+\frac{f''(x_0+\theta x)}{2\sqrt{1+k^2}}(x-x_0)^2$$

$$(1-3)$$

当$f'(x_0)\neq k$时，即割线不是M_0点的切线时，$\overline{MP}$与$x-x_0$是当$x\to x_0$的同阶无穷小（可以证明它也是$\overline{MM_0}$的同阶无穷小）。如果割线是过M_0点的切线，即$f'(x_0)=k$，则$\overline{MP}$与$x-x_0$是当$x\to x_0$时的高阶无穷小量。在这种情形下，我们证明$\overline{MP}$与$\overline{MM_0}$之比是$x\to x_0$的高阶无穷小。

事实上，若设$f''(x_0+\theta x)=k_1$，则据（1-3）有

$$\overline{MP}=\frac{1}{2}\frac{k_1}{\sqrt{1+k^2}}(x-x_0)^2$$

而 $$\overline{MM_0}=\sqrt{(y-y_0)^2+(x-x_0)^2}$$
$$=\sqrt{[f(x)-f(x_0)]^2+(x-x_0)^2}$$

不失一般性，设$x-x_0>0$，并将（1-2）代入上式，

$$\overline{MM_0}=(x-x_0)\sqrt{1+[k+\frac{1}{2}k_1(x-x_0)]^2}=K(x-x_0)$$

其中，$K=\sqrt{1+[k+\frac{1}{2}k_1(x-x_0)]^2}$，

$x\to x_0$时，$K\to\sqrt{1+k^2}$

有 $$\lim_{x\to x_0}\frac{\overline{MP}}{\overline{MM_0}}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{2}\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\frac{1}{K}(x-x_0)=0$$

（证完）

定理2 若在平面某个区域D内，方程$F(x,y)=0$的$F(x,y)$有连续的一阶偏导数，且F_x、F_y不同时为零，则在任一点$M_0(x_0,y_0)$满足$F(x_0,y_0)=0$的某个邻域内，$F(x,y)=0$确定一简单曲线弧。

证：据隐函数存在定理，知在点M_0的某个领域$D'\subset D$内，确定一条曲线$y=f(x)$。由于F_x，F_y在D'内不全为零，不妨设$F_y\neq0$，有恒等式

$$F[x,f(x)]\equiv0$$

对x微分，有 $F_x+F_y\cdot y'=0$，得

$$y'=-F_x/F_y$$

上式中由于$F_y\neq0$，故y'对于$x\in D'$皆存在，并且y'在D'内连续。据定义1，知$y=f(x)$为简单曲线弧。

定义2 如果动点坐标(x,y)满足方程

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\qquad t\in[a,b]\qquad(1\text{-}4)$$

且当$t\in[a,b]$时，$x(t)$与$y(t)$单值连续，$\dot{x}(t)$与$\dot{y}(t)$连续且不同时为零，则称动点的轨迹为$[a,b]$上的一条正则曲线弧。$[a,b]$称为正则区间。

定理3 在正则区间某一点t_0的某个邻域内，正则曲线弧必为简单曲线弧。

证：因在t_0的某个邻域内$\dot{x}(t)$与$\dot{y}(t)$不同时为零，不妨设$\dot{x}(t)\neq 0$，则隐函数

$$F(x,t)=x(t)-x=0$$

由于$F_t=\dot{x}(t)\neq 0$，据隐函数存在定理，上式确定单值连续函数$t=t(x)$，代入$y=y(t)$，得$y=y[t(x)]$，有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

且$\dfrac{dy}{dx}$为连续函数，据定义1知曲线$y=f(x)$为简单曲线弧。

要注意，此定理仅就t_0的某个邻域内确定的正则曲线是简单曲线弧，具有局部的性质。有的曲线，满足定理3的条件，但在$[a,b]$上并不是简单曲线弧，如图1-2，在M_0点曲线本身自交，它在$[a,b]$上不是简单曲线弧，尽管该曲线的方程$x=x(t)$，$y=y(t)$在$[a,b]$上单值连续且$\dot{x}(t)$，$\dot{y}(t)$不同时为零，但在t_0的某个邻域内，却是简单曲线弧。今后，若无说明，都讨论简单曲线弧，且简称曲线。

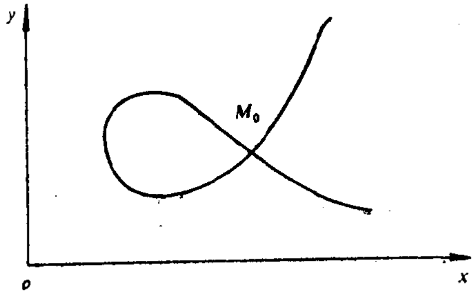


图 1-2 曲线的局部性质

二、曲线的切向量和法向量

对于用参数式给出的曲线

$$C:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\qquad t\in[a,b]$$

我们规定t增加的方向为曲线C的正向。当动点由t增加Δt（>0）时，有切向量为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\dot{x}(t)\,\boldsymbol{i}+\dot{y}(t)\,\boldsymbol{j}=\boldsymbol{T}$$

其中$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}$称为曲线$C$的向量方程。由于$\Delta t>0$，故切向量的指向与曲线$C$的正向相一致。又设在$t$点的法向量为

$$\boldsymbol{N}=\mathrm{A}\boldsymbol{i}+\mathrm{B}\boldsymbol{j}$$

据$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{N}=0$，并取$A=\dot{y}$，则有$\boldsymbol{N}=\dot{y}\boldsymbol{i}-\dot{x}\boldsymbol{j}$，结果，有公式

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}=\dot{x}\,\boldsymbol{i}+\dot{y}\,\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{N}=\dot{y}\,\boldsymbol{i}-\dot{x}\,\boldsymbol{j}\end{cases}\tag{1-5}$$

为了确定$\boldsymbol{N}$的方向，我们规定所讨论的平面为有向平面，即平面的法向量$\boldsymbol{n}$已选定（一般与纸面相垂直，指向为向上），则向量$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$及$\boldsymbol{n}$服从右手系，如图1-3。当$y''>0$时，$\boldsymbol{N}$指向凹侧，

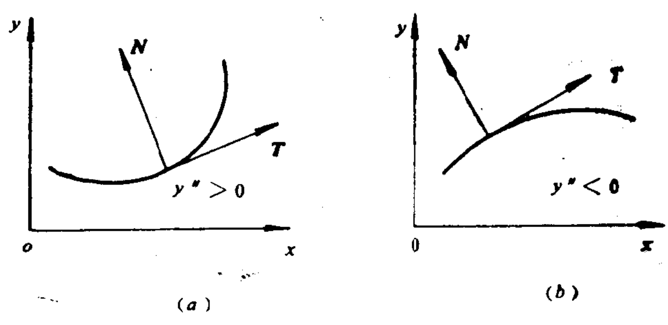


图 1-3　曲线的法向量

（a）曲线为凹时的N　（b）曲线为凸时的N

而$y'<0$时，N的指向刚好相反。后面将会看到，这种规定与空间曲线法向量指向的规定不同。

如果平面曲线C由显式$y=f(x)$给出，可把它写成参数式$x=x$，$y=y(x)$，这里的$x=t$，
有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'$$

结果，有

$$\begin{cases} T=i+y'\,j \\ N=y'\,i-j \end{cases} \tag{1-6}$$

如果平面曲线C由隐式$F(x, y)=0$给出，则它确定函数$y=y(x)$，从恒等式$F(x, y(x))\equiv 0$求出

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=-\frac{F_x}{F_y}$$

得到 $$T_1=i-\frac{F_x}{F_y}j,\ N_1=-\frac{F_x}{F_y}i-j$$

可以取

$$\begin{cases} T=F_y i-F_x j \\ N=F_x i+F_y j \end{cases} \tag{1-7}$$

其中的T与N的指向，仍然要由右手规则来确定。如果发现由（1-7）式算出的T与N不符合右手规则，则要在T、N表达式前面添加正负号。

根据（1-5）至（1-7）求出的T及N，容易写出在该点处的切线和法线方程，例如由参数式给出的曲线，据（1-5），它在$M_0(x_0, y_0)$点的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\dot{x}(t_0)}=\frac{y-y_0}{\dot{y}(t_0)},$$

法线方程为

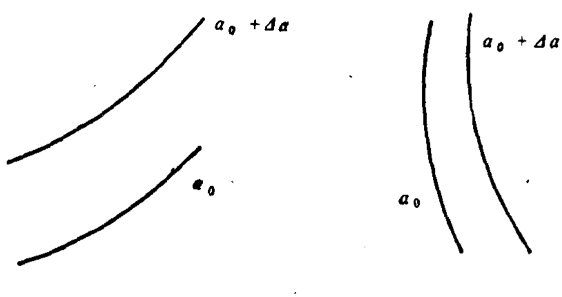
$$\frac{x-x_0}{\dot{y}(t_0)}=\frac{y-y_0}{-\dot{x}(t_0)}$$

三、单参数平面曲线族的密度

1.讨论曲线族密度的意义

单参数平面曲线族$\{C_a\}$，可用方程$F(x, y, a)=0$来表示。当a取得不同的实数时，将会得到不同的族中曲线。例如，$a=a_0$时，称曲线$F(x, y, a_0)=0$为曲线a_0。假定三元函数$F(x, y, a)$对自变量有连续的偏导数（一般需要假定有二阶和二阶以上的连续偏导数）。特别当a确定之后，方程$F(x,y,a)=0$满足隐函数存在条件。

如果参数a由a_0变到$a_0+\Delta a$时，曲线a_0与曲线$a_0+\Delta a$相离甚远，我们就认为曲线族$\{C_a\}$对于Δa的密度较大；反之，如果两曲线很贴近，就认为曲线族$\{C_a\}$的密度较小，如图1-4。这种定性的关于曲线族密度的描述，在工程上是有意义的。例如，曲线族$\{C_a\}$代表两个构件啮合时的接触线，当其密度较大时，接触区较大，承受载荷较有利，构件就不易破坏；反之，如果对同样的Δa，曲线族的密度较小，接触区很小，构件啮合时，在小接触区上反复作用，在相同的条件下，构件就很易破坏。



（a）密度大的曲线　（b）密度小的曲线

图 1-4　两曲线的密度