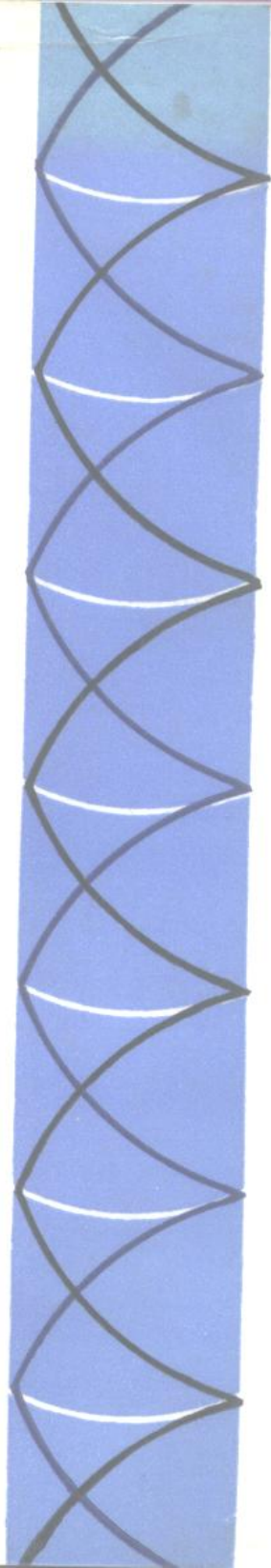


包络原理 及其 在机械方面的 应用

冯德坤 马香峰 编著

冶金工业出版社



包络原理及其在 机械方面的应用

冯德坤 马香峰 编著

冶金工业出版社

(京)新登字036号

图书在版编目(CIP)数据

包络原理及其在机械方面的应用 / 冯德坤, 马香峰编著.

北京: 冶金工业出版社, 1994. 10

ISBN 7-5024-1559-9

I. 包… II. ①冯…②马… III. ①包络-理论②包络-
理论-应用-齿轮 IV. TH132.4

中国版本图书馆CIP数据核字(94)第07507号

出版人 卿启云 (北京沙滩嵩祝院北巷39号, 邮编100009)

北京昌平百善印刷厂印刷; 冶金工业出版社发行; 各地新华书店经销

1994年12月第1版, 1994年12月第1次印刷

850mm×1168mm 1/32; 8.5印张; 261页; 1-1000册

9.00元

内 容 提 要

本书在数学理论上系统地讨论了平面曲线族、空间曲线族、平面族和空间曲面族的包络，以及各种包络的弯曲程度；详细地讨论了曲线和曲面给出的方式是显式、隐式和参数式，运动参数是单参数、双参数及 n 参数等各种情形的包络条件、曲率及它们之间的内在联系。在应用上选择了机械方面的典型例子。

本书内容曾给北京科技大学机械系选择啮合原理课题的硕士研究生讲授过，并在此基础上作了充实。本书可供从事齿轮设计的工程技术人员和研究包络现象的有关人员参考，也可作为高等院校机械设计和制造专业的教学用书。

前 言

包络现象广泛地存在于工程技术中。机加工的展成法用刀具去切削工件，可看作空间直线族的包络；平面磨床在工作时，砂轮与工件接触，就会形成平面曲线族的包络；成型轧制中孔型和轧件之间的关系，是一种空间曲面族的包络；在平面二次包络弧面蜗杆传动的加工中，用平面砂轮去磨削蜗杆，就是平面族的包络，等等。另外，在无线电路和晶体管特性的研究中，会遇到许多包络曲线。而在常微分方程解的唯一性定理和偏微分方程的研究中，也会碰到包络问题。

研究以上包络现象和问题的规律，就是本书所要阐明的包络原理，它包括平面曲线族和空间曲线族的包络，平面族的包络和空间曲面族的包络，以及各种包络的弯曲程度。

包络原理属于微分几何范畴。但其具体内容在一般的微分几何书中很少或没有论述。有的内容虽有所论述，但其表达形式不便于应用。因此，本书的包络原理可作为微分几何的补充。

空间啮合原理的研究方法之一——包络法，在本世纪80年代初取得了可喜成果。1983年冶金工业出版社出版的《空间啮合原理及SG—71型蜗轮副》是这一成果的代表作（冯德坤是该书著者之一），该书获1983年全国优秀科技图书二等奖。包络法的理论依据是包络原理。对它的研究将会有助于包络法建立在更加扎实的数学基础之上并且得到广泛的应用。

本书有以下特点：

第一，本书的论述建立在严格的数学基础之上，系统地讨论了包络理论，它包括平面曲线族和空间曲线族，平面族和空间曲面族包络形成的条件分析及其与各种包络现象的内在联系。

第二,分别就曲线族和曲面族的形式是显式、隐式和参数式,运动参数是单参数、双参数和 $n(\geq 3)$ 参数等各种情形,以及它们之间的转换规律,都进行了讨论。从中得到一些定理和简洁的公式,方便了应用。

第三,列举了包络原理在机械方面的一些应用,选择了一些典型的例子,为拓广包络原理的应用创造条件。

本书的第一章至第五章是深圳大学软科学系冯德坤编写;第六章由北京科技大学机械系马香峰编写。

本书的出版,得到广东(蛇口)华美钢铁有限公司及其领导杨积立、程浩和张崇弟先生的大力支助。本书承蒙深圳大学软科学研究所所长廖可人教授审阅。特在此表示衷心感谢。

由于我们水平有限,不妥之处,敬请读者批评指正。

编者 1994年1月

目 录

第一章 平面曲线族的包络	(1)
第一节 平面曲线族的密度	(1)
一、简单曲线弧	(1)
二、曲线的切向量和法向量	(5)
三、单参数平面曲线族的密度	(7)
第二节 隐式表示的单参数平面曲线族的包络	(14)
一、包络的定义及包络条件	(14)
二、曲线族的特征点	(16)
三、特征点的轨迹	(19)
第三节 参数方程表示的单参数平面曲线族的包络	(28)
一、包络条件和判别曲线	(28)
二、包络存在的充分条件	(30)
三、平面曲线法线族的包络	(33)
四、零密度曲线与包络	(35)
第四节 双参数及 n 参数平面曲线族的包络	(37)
一、双参数平面曲线族包络的存在性	(37)
二、双参数平面曲线族的包络	(40)
三、双参数平面曲线族包络存在的充分条件	(44)
四、 $n(\geq 3)$ 参数平面曲线族的包络	(46)
第五节 包络的曲率	(49)
一、平面曲线的曲率	(50)
二、包络的曲率	(52)
三、单参数平面曲线族的综合曲率	(54)
第六节 常微分方程的奇解与包络	(58)
一、奇解与包络的关系	(58)

二、一阶微分方程解的存在唯一性定理及积分曲

线族的包络 (64)

第二章 空间曲线族的包络 (69)

第一节 空间曲线族的密度 (69)

一、空间曲线的表示及简单曲线段 (69)

二、切线向量 (70)

三、空间曲线族的密度 (75)

第二节 空间曲线族的包络 (80)

一、隐式表示的空间曲线族的包络 (80)

二、参数表示的空间曲线族的包络 (87)

三、零密度曲线与包络 (93)

四、双参数及 n 参数空间曲线族的包络 (94)

第三节 包络的曲率及曲线族的综合曲率 (95)

一、包络的曲率 (95)

二、空间曲线族的综合曲率 (100)

三、隐式表示的空间曲线族包络的曲率 (101)

四、隐式表示的空间曲线族的综合曲率 (105)

第三章 平面族的包络 (108)

第一节 单参数平面族的包络 (108)

一、单参数平面族的表示 (108)

二、用向量方程表示的单参数平面族的包络 (111)

三、用隐式及参数式表示的单参数平面族的
包络 (112)

第二节 可展曲面与平面族的包络 (115)

第三节 n 参数平面族的包络 (124)

一、双参数平面族的包络 (124)

二、 n (≥ 3) 参数平面族的包络 (127)

第四节 单参数平面族包络的曲率 (130)

一、包络的法曲率 (130)

二、包络的主曲率 (133)

三、包络的总曲率、渐近曲线和曲率线	(135)
四、单参数平面族的综合曲率	(136)
第四章 曲面族的包络	(138)
第一节 曲面族的表示	(138)
一、简单曲面	(138)
二、单参数曲面族的表示	(141)
三、双参数及 n ($n \geq 3$) 参数曲面族的表示	(141)
第二节 单参数曲面族的包络	(143)
一、参数式表示的曲面族的包络	(143)
二、显式和隐式表示的曲面族的包络	(146)
三、曲面族的脊线	(148)
四、单参数曲面族包络的矩阵表示	(150)
五、单参数曲面族的包络与偏微分方程	(152)
第三节 双参数曲面族的包络与单参数曲面族的二次包络	(154)
一、双参数曲面族的包络	(154)
二、单参数曲面族的二次包络	(160)
三、两种包络的联系	(164)
四、其他两种包络条件	(166)
第四节 n参数曲面族的包络与单参数曲面族的n次包络	(167)
一、概念	(167)
二、隐式表示的 n (≥ 3) 参数曲面族的包络	(168)
三、参数式表示的 n 参数曲面族的包络	(171)
四、两种包络的联系	(174)
第五章 曲面族包络的曲率	(177)
第一节 相对曲率	(177)
一、概念	(177)
二、任意方向的相对法曲率	(178)
三、相对主曲率和相对主方向	(179)

第二节 诱导曲率	(185)
一、接触线方向的诱导法曲率	(185)
二、任意方向的诱导法曲率	(189)
第三节 综合曲率	(191)
一、用两类基本量表示的综合曲率	(192)
二、隐式表示的单参数曲面族的综合曲率	(194)
三、单参数平面族(一次包络)的综合曲率	(198)
四、双参数平面族(二次包络)的综合曲率	(199)
第四节 函数矩阵在综合曲率中的应用	(201)
一、单参数曲面族的包络(一次包络)的综合 曲率与函数矩阵	(201)
二、在双参数曲面族包络(二次包络)的综合曲 率中函数矩阵的应用	(207)
第六章 包络的应用	(214)
第一节 在轧钢生产中的应用	(214)
一、斜矫辊面的确定	(214)
二、斜轧辊面的确定	(222)
第二节 在机械制造中的应用	(230)
一、空间运动分析	(230)
二、盘铣刀型面方程	(231)
第三节 在机器人工程中的应用	(233)
一、基本概念	(234)
二、工作空间的形成	(234)
三、确定工作空间表面的方法	(235)
四、例	(237)
第四节 在轮齿啮合传动中的应用	(247)
一、平面啮合	(247)
二、空间啮合	(250)
参考文献	(261)

第 一 章

平面曲线族的包络

平面曲线族的包络在包络理论中占有重要的位置，它是空间曲线族的包络及曲面族包络的基础，我们要进行较为详细的讨论。这一章的内容包括平面曲线族的密度，隐式和参数表示的平面曲线族的包络，包络的曲率及其与常微分方程奇解的关系。

第一节 平面曲线族的密度

一、简单曲线弧

对于一条平面曲线，通常的表示方式有三种：显式，隐式和参数式。这三种形式具备一定的条件时，它们就规定了一条简单曲线弧。

定义1 若函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 区间上单值，有连续的导数，则动点 (x, y) 的轨迹，称为 $[a, b]$ 上的简单曲线弧，简称为曲线弧。

由定义1可知，简单曲线弧本身不相交，它的每一点的切线随着动点的运动而连续转动，并且为了在每一点有确定的导数值，简单曲线弧每一点的切线不平行于 y 轴。同时，它还具有下面重要的分析性质：

定理1 简单曲线弧上任一点 $M(x, y)$ 到其上一点 $M_0(x_0, y_0)$ 的切线的距离与这两点距离之比，对 $x \rightarrow x_0$ 时是高价无穷小量。

证：设过 M_0 点任一割线的斜率为 k ，则割线的方程为

$$Y - y_0 = k(X - x_0)$$

其中 (X, Y) 是割线上动点的流动坐标。点 $M(x, y)$ 到割线的

距离为

$$\overline{MP} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} [f(x) - f(x_0) - k(x-x_0)] \quad (1-1)$$

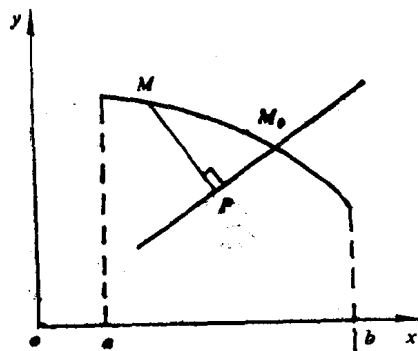


图 1-1 曲线和割线的位置

设 $f''(x)$ 在 x_0 点的某邻域内存在，将函数 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂展为一阶的泰勒公式，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0 + \theta x)(x-x_0)^2 \quad (1-2)$$

将上式代入 (1-1)，有

$$\overline{MP} = \frac{f'(x_0) - k}{\sqrt{1+k^2}} (x-x_0) + \frac{f''(x_0 + \theta x)}{2\sqrt{1+k^2}} (x-x_0)^2 \quad (1-3)$$

当 $f'(x_0) \neq k$ 时，即割线不是 M_0 点的切线时， $\overline{MP}$ 与 $x-x_0$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 的同阶无穷小（可以证明它也是 $\overline{MM_0}$ 的同阶无穷小）。如果割线是过 M_0 点的切线，即 $f'(x_0) = k$ ，则 $\overline{MP}$ 与 $x-x_0$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的高阶无穷小量。在这种情形下，我们证明 $\overline{MP}$ 与 $\overline{MM_0}$ 之比是 $x \rightarrow x_0$ 的高阶无穷小。

事实上，若设 $f''(x_0 + \theta x) = k_1$ ，则据 (1-3) 有

$$\overline{MP} = \frac{1}{2} \frac{k_1}{\sqrt{1+k^2}} (x-x_0)^2$$

而
$$\overline{MM_0} = \sqrt{(y-y_0)^2 + (x-x_0)^2}$$

$$= \sqrt{[f(x)-f(x_0)]^2 + (x-x_0)^2}$$

不失一般性, 设 $x-x_0 > 0$, 并将 (1-2) 代入上式,

$$\overline{MM_0} = (x-x_0) \sqrt{1 + [k + \frac{1}{2}k_1(x-x_0)]^2} = K(x-x_0)$$

其中, $K = \sqrt{1 + [k + \frac{1}{2}k_1(x-x_0)]^2},$

$x \rightarrow x_0$ 时, $K \rightarrow \sqrt{1+k^2}$

有
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\overline{MP}}{\overline{MM_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \frac{1}{K} (x-x_0) = 0$$

(证完)

定理2 若在平面某个区域 D 内, 方程 $F(x, y) = 0$ 的 $F(x, y)$ 有连续的一阶偏导数, 且 F_x, F_y 不同时为零, 则在任一点 $M_0(x_0, y_0)$ 满足 $F(x_0, y_0) = 0$ 的某个邻域内, $F(x, y) = 0$ 确定一简单曲线弧。

证: 据隐函数存在定理, 知在点 M_0 的某个领域 $D' \subset D$ 内, 确定一条曲线 $y = f(x)$ 。由于 F_x, F_y 在 D' 内不全为零, 不妨设 $F_y \neq 0$, 有恒等式

$$F[x, f(x)] \equiv 0$$

对 x 微分, 有 $F_x + F_y \cdot y' = 0$, 得

$$y' = -F_x/F_y$$

上式中由于 $F_y \neq 0$, 故 y' 对于 $x \in D'$ 皆存在, 并且 y' 在 D' 内连续。据定义1, 知 $y = f(x)$ 为简单曲线弧。

定义2 如果动点坐标 (x, y) 满足方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (1-4)$$

且当 $t \in [a, b]$ 时, $x(t)$ 与 $y(t)$ 单值连续, $\dot{x}(t)$ 与 $\dot{y}(t)$ 连续且不同时为零, 则称动点的轨迹为 $[a, b]$ 上的一条正则曲线弧, $[a, b]$ 称为正则区间。

定理3 在正则区间某一点 t_0 的某个邻域内, 正则曲线弧必为简单曲线弧。

证: 因在 t_0 的某个邻域内 $\dot{x}(t)$ 与 $\dot{y}(t)$ 不同时为零, 不妨设 $\dot{x}(t) \neq 0$, 则隐函数

$$F(x, t) = x(t) - x = 0$$

由于 $F_t = \dot{x}(t) \neq 0$, 据隐函数存在定理, 上式确定单值连续函数 $t = t(x)$, 代入 $y = y(t)$, 得 $y = y[t(x)]$, 有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

且 $\frac{dy}{dx}$ 为连续函数, 据定义1知曲线 $y = f(x)$ 为简单曲线弧。

要注意, 此定理仅就 t_0 的某个邻域内确定的正则曲线是简单曲线弧, 具有局部的性质。有的曲线, 满足定理3的条件, 但在 $[a, b]$ 上并不是简单曲线弧, 如图1-2, 在 M_0 点曲线本身自交, 它在 $[a, b]$ 上不是简单曲线弧, 尽管该曲线的方程 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 在 $[a, b]$ 上单值连续且 $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ 不同时为零, 但在 t_0 的某个邻域内, 却是简单曲线弧。今后, 若无说明, 都讨论简单曲线弧, 且简称曲线。

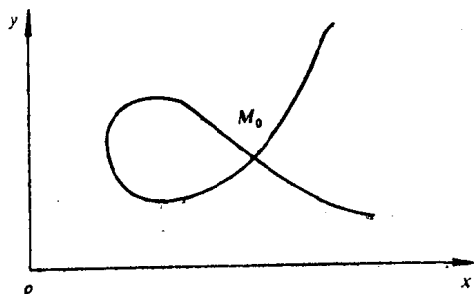


图 1-2 曲线的局部性质

二、曲线的切向量和法向量

对于用参数式给出的曲线

$$C: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

我们规定 t 增加的方向为曲线 C 的正向。当动点由 t 增加 $\Delta t (>0)$ 时, 有切向量为

$$\frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \dot{x}(t) i + \dot{y}(t) j = T$$

其中 $r(t) = x(t)i + y(t)j$ 称为曲线 C 的向量方程。由于 $\Delta t > 0$, 故切向量的指向与曲线 C 的正向相一致。又设在 t 点的法向量为

$$N = Ai + Bj$$

据 $T \cdot N = 0$, 并取 $A = \dot{y}$, 则有 $N = \dot{y}i - \dot{x}j$, 结果, 有公式

$$\begin{cases} T = \dot{x} i + \dot{y} j \\ N = \dot{y} i - \dot{x} j \end{cases} \quad (1-5)$$

为了确定 N 的方向, 我们规定所讨论的平面为有向平面, 即平面的法向量 n 已选定 (一般与纸面相垂直, 指向为向上), 则向量 T 、 N 及 n 服从右手系, 如图1-3。当 $y'' > 0$ 时, N 指向凹侧,

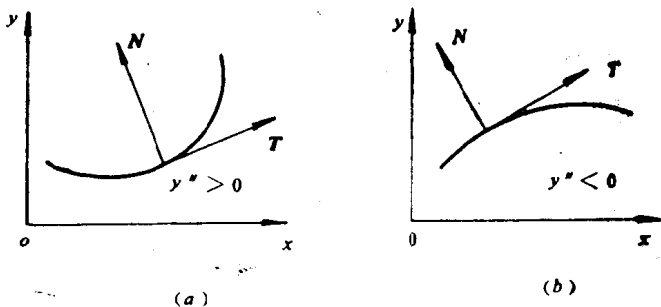


图 1-3 曲线的法向量

(a) 曲线为凹时的 N (b) 曲线为凸时的 N

而 $y' < 0$ 时, N 的指向刚好相反。后面将会看到, 这种规定与空间曲线法向量指向的规定不同。

如果平面曲线 C 由显式 $y = f(x)$ 给出, 可把它写成参数式 $x = x, y = y(x)$, 这里的 $x = t$, 有

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} = y'$$

结果, 有

$$\begin{cases} T = i + y' j \\ N = y' i - j \end{cases} \quad (1-6)$$

如果平面曲线 C 由隐式 $F(x, y) = 0$ 给出, 则它确定函数 $y = y(x)$, 从恒等式 $F(x, y(x)) \equiv 0$ 求出

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

得到

$$T_1 = i - \frac{F_x}{F_y} j, \quad N_1 = -\frac{F_x}{F_y} i - j$$

可以取

$$\begin{cases} T = F_y i - F_x j \\ N = F_x i + F_y j \end{cases} \quad (1-7)$$

其中的 T 与 N 的指向, 仍然要由右手规则来确定。如果发现由 (1-7) 式算出的 T 与 N 不符合右手规则, 则要在 T 、 N 表达式前面添加正负号。

根据 (1-5) 至 (1-7) 求出的 T 及 N , 容易写出在该点处的切线和法线方程, 例如由参数式给出的曲线, 据 (1-5), 它在 $M_0(x_0, y_0)$ 点的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y_0}{\dot{y}(t_0)},$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{y(t_0)} = \frac{y-y_0}{-x(t_0)}$$

三、单参数平面曲线族的密度

1. 讨论曲线族密度的意义

单参数平面曲线族 $\{C_a\}$ ，可用方程 $F(x, y, a) = 0$ 来表示。当 a 取得不同的实数时，将会得到不同的族中曲线。例如， $a = a_0$ 时，称曲线 $F(x, y, a_0) = 0$ 为曲线 a_0 。假定三元函数 $F(x, y, a)$ 对自变量有连续的偏导数（一般需要假定有二阶和二阶以上的连续偏导数）。特别当 a 确定之后，方程 $F(x, y, a) = 0$ 满足隐函数存在条件。

如果参数 a 由 a_0 变到 $a_0 + \Delta a$ 时，曲线 a_0 与曲线 $a_0 + \Delta a$ 相离甚远，我们就认为曲线族 $\{C_a\}$ 对于 Δa 的密度较大；反之，如果两曲线很贴近，就认为曲线族 $\{C_a\}$ 的密度较小，如图1-4。这种定性的关于曲线族密度的描述，在工程上是有意义的。例如，曲线族 $\{C_a\}$ 代表两个构件啮合时的接触线，当其密度较大时，接触区较大，承受载荷较有利，构件就不易破坏，反之，如果对同样的 Δa ，曲线族的密度较小，接触区很小，构件啮合时，在小接触区上反复作用，在相同的条件下，构件就很易破坏。

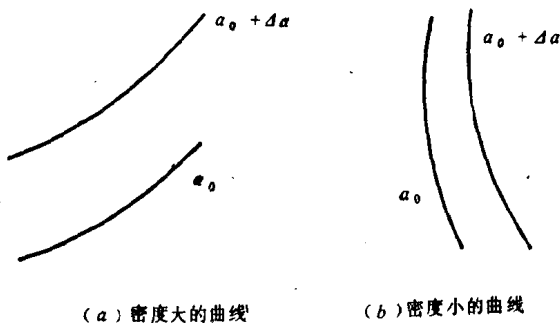


图 1-4 两曲线的密度