计算数学讲义　数学基础之二

常微分方程

南京大学数学系计算数学专业 编

科学出版社

计算数学讲义 数学基础之二

常微分方程

南京大学数学系计算数学专业 编

科学出版社

内 容 简 介

本书共六章：第一、二章介绍关于常微分方程的一些基本概念，以及线性和非线性一阶方程的理论和解法；第三章讨论 n 阶线性微分方程的一般理论；第四章叙述常系数线性微分方程的解法；第五章着重介绍二阶线性微分方程的解法，包括幂级数解法；第六章对线性微分方程组作了初步讨论.

本书可供高等学校计算数学专业使用，也可供科技工作者参考.

计算数学讲义 数学基础之二

常 微 分 方 程

南京大学数学系计算数学专业 编

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1978年10月第一版 开本：787×1092 1/32

1978年10月第一次印刷 印张：6

印数：0001—166,300 字数：135,000

统一书号：13031·846

本社书号：1207·13—1

定价： 0.62 元

说　　明

1. 这一套《计算数学讲义》是在我专业过去所编教材的基础上修改补充而成的.

2. 这套讲义共分下列九册:

（一）数值逼近方法,

（二）线性代数计算方法,

（三）常微分方程数值解法,

（四）偏微分方程数值解法,

（五）最优化方法,

（六）概率统计基础和概率统计方法,

数学基础之一: 线性代数,

数学基础之二: 常微分方程,

数学基础之三: 偏微分方程.

由于篇幅的原因,我们把《概率统计基础》和《概率统计方法》合并为一册.

3. 这套讲义可作为综合性大学理科计算数学专业教材,也可供利用电子计算机从事科学计算的科技人员参考.

4. 这套《计算数学讲义》的主编是何旭初同志.

讲义各册由我专业有关同志分工负责.

这册《常微分方程》的编写者为叶南薰同志,徐鸿义同志也参加了部分工作.

5. 由于理论水平和实践经验所限,讲义中的缺点和错误在所难免,我们衷心盼望读者提出宝贵意见,以便进一步修改.

南京大学数学系计算数学专业

1978 年 3 月

目　　录

第一章　绪　　论

§1　什么是微分方程

许多科学和技术问题的数学描述，常常归结为一个含有自变量、未知函数和它的一个或多个导数的方程的求解问题．这样一个含有自变量、未知函数和它的一个或多个导数的方程称为*微分方程*．

现举例说明如下．

例 1　质量为 m 的物体，在重力作用下，沿铅直线下落．物体下落距离 s（向下为正）随时间 t 而改变．在不考虑空气阻力的情况下，试求出距离 s 应满足的微分方程．

解　按牛顿第二定律，质量 m 与加速度 $\frac{d^2s}{dt^2}$ 的积等于沿加速度方向的作用力 mg．因此，在任意时刻 t 应有

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg,$$

即

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g, \tag{1}$$

其中 g 为重力加速度．这就是所要求的微分方程．

例 2　放射性元素镭，因不断放射出各种射线而逐渐减少其质量，这种现象称为*衰变*．设在任意时刻 t 镭的质量为 $R(t)$．由于衰变率 $-\frac{dR}{dt}$ 与 $R(t)$ 成比例，即

$$\frac{dR}{dt} = -kR, \tag{2}$$

其中 k 是一个正的常数.

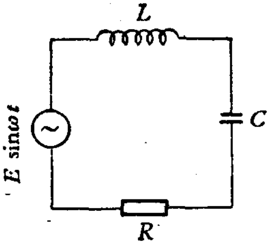

图 1.1

例 3　今讨论一个具有电动势 $E\sin\omega t$ 的振荡回路(图 1.1),它是由电阻 R、电感线圈 L 和电容器 C 串联组成的. 现以 Q 表示电容器上的电荷,则在回路中的电流强度为 $I = dQ/dt$. 再以 V 表示电容器两端的电压降,则回路中的总电压降 $IR + V$ 应等于总电动势 $E\sin\omega t - L\frac{dI}{dt}$,即

$$IR + V = E\sin\omega t - L\frac{dI}{dt}.$$

由于 $V = \frac{Q}{C}$,这又可写为

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E\sin\omega t. \tag{3}$$

例 4　在不可压缩流体的无旋运动中,它的速度势 φ 应满足微分方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{4}$$

为了系统地研究微分方程的理论,就必须把方程按其形式加以分类. 分类方法之一是根据未知函数所依赖的自变量的个数来进行. 在仅有一个自变量的情形,微分方程中只出现通常的导数,这就称为*常微分方程*. 例如方程(1),(2),(3)都是常微分方程. 在有两个以上自变量的情形,微分方程中包含偏导数,这就称为*偏微分方程*,例如方程(4)是偏微分

方程．本教程只讨论常微分方程，因此以后将把这个“常”字省略掉．

§2 微分方程的阶．线性微分方程

微分方程的阶就是出现在方程中的未知函数的最高阶导数的阶．例如，方程(1)，(3)都是二阶的，方程(2)是一阶的．

设 x 是自变量，y 是 x 的函数，函数 y 对 x 的一阶、二阶、…… n 阶的导数依次记为 y'，y''，$\cdots$，$y^{(n)}$，则 n 阶微分方程的一般形式可写为

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{5}$$

方程(5)表示 $n+2$ 个变元 $x, y, y', \cdots, y^{(n)}$ 之间的函数关系．微分方程的另种重要分类法是看它们是线性的还是非线性的．如果方程(5)中的 F 是变元 $y, y', \cdots, y^{(n)}$ 的线性函数，那么，就称它是线性微分方程，否则就称它是非线性微分方程．这样，一般 n 阶线性微分方程可写为

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x), \tag{6}$$

其中 $a_0(x)$，$a_1(x)$，$\cdots$，$a_n(x)$ 和 $g(x)$ 都是 x 的已知函数．例如方程(1)，(2)，(3)都是线性的，而微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \sin y = 0$$

和

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\frac{dy}{dx} + 3x = 0$$

则是非线性的．除去某些特殊的一阶和二阶的非线性方程外，本教程主要讨论线性微分方程．

在这里，我们还要指出，在适当条件下，可由(5)解出 $y^{(n)}$，得

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}). \tag{7}$$

今后除特加申明外，我们总是假定可由已知微分方程解出最高阶导数，从而把方程写为(7)的形式. 这样做法主要是为了避免由隐式方程 (5) 而可能产生的歧义，因为方程(5)有时会表示为几个微分方程的总合. 例如由隐式方程

$$(y')^2 + 2xy' - y^2y' - 2xy^2 = 0$$

可以得到方程

$$y' + 2x = 0 \text{ 和 } y' - y^2 = 0.$$

练习 指出以下各微分方程的阶，并说明哪些是线性的，哪些是非线性的：

1. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x.$

2. $(1 + y^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = e^x.$

3. $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + y = 1.$

4. $\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0.$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} + \sin(x + y) = \sin x.$

§3 微分方程的解

所谓微分方程(7)在区间 $\alpha < x < \beta$ 内的解，是指这样一个函数 $y = \varphi(x)$，它在所述区间内存在导数 $\varphi'(x)$，$\varphi''(x)$，$\cdots$，$\varphi^{(n)}(x)$，且对于区间 $\alpha < x < \beta$ 内的每一个 x，等式

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x))$$

都成立. 因为 y 是明显地用 x 的函数表示的，所以把 $y=\varphi(x)$ 称为微分方程(7)的显式解.

练习

1. 验证 $y = e^x$ 是微分方程 $y'' - y = 0$ 的一个解.

2. 验证 $y = x^2 + x$ 是微分方程

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

的一个解。

3. 验证 $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x}$ 是微分方程

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

的解，其中 C_1, C_2, C_3 都是任意常数。

隐式解 我们说

$$\phi(x, y) = 0$$

在区间 $\alpha < x < \beta$ 内是(7)的隐式解，如果 $\phi(x, y) = 0$ 定义的函数 $y = \varphi(x)$，具有导数 $\varphi'(x), \varphi''(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)$，而且对于 $\alpha < x < \beta$ 内每一点 x 都满足下面的方程：

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

隐式解常呈现解释上的困难. 例如 $x^2 + y^2 = C^2$(C 是任意常数)是微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

的隐式解，因为把 y 视为 x 的函数，而把 $x^2 + y^2 = C^2$ 的两端对 x 求导数，便得 $2x + 2yy' = 0$，即 $y' = -x/y$. 现在我们要问，由隐式方程 $x^2 + y^2 = C^2$ 所表示的哪些函数是所设微分方程的解，它们的定义区间又是什么？对本例来说，不难看出，由隐式方程 $x^2 + y^2 = C^2$ 解出 y 而得到的

$$y_1 = \sqrt{C^2 - x^2} \text{（上半平面 } y > 0 \text{ 内的半圆）}$$

和

$$y_2 = -\sqrt{C^2 - x^2} \text{（下半平面 } y < 0 \text{ 内的半圆）}$$

在开区间 $-C < x < C$ 内都是连续的和可微的，因而都是所设微分方程的解. 如果进一步指定求 $x = 0$ 时 $y = 3$ 的解，那么就必须放弃 y_2 而选择 $C = 3$ 时的 $y_1(x)$. 于是

$$y(x)=\sqrt{9-x^2},\quad -3<x<3.$$

在刚才所讨论的例子中,我们很容易由隐式方程$\phi(x,y)=0$解出 $y=\varphi(x)$, 从而挑选所设微分方程的解, 但通常却不是这样的. 要由一个隐式方程解得封闭形式的显函数往往是困难的. 例如,非线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{1+y^2} \tag{8}$$

有隐式解

$$y^3+3y-x^3+C=0, \tag{9}$$

其中 C 为常数. 为了验证,我们把方程(9)对 x 微分,得

$$3y^2y'+3y'-3x^2=0,$$

于是解出 y' 便得微分方程(8).就本例来说, 不仅从方程 (9) 解得满足(8)的显式解 $y=\varphi(x)$ 是困难的, 而且用解析方法确定解的定义区间也是困难的.

线性和非线性微分方程之间的重要差别之一是: 对于线性方程我们往往可以求得显式解并可由此确定解的定义区间;相反,对于非线性方程得到的解通常是隐式解.

通解 这里我们通过以下两个线性微分方程的例子介绍通解概念. 这个问题在以后有关章节中还将继续讨论.

例 5 考虑例 2 中镭的质量 R 所满足的一阶线性微分方程

$$\frac{dR}{dt}=-kR. \tag{2}$$

容易验证,

$$R(t)=Ce^{-kt} \tag{10}$$

是它的解, 其中 C 是任意常数. 在第二章中将看到所设微分方程的一切解都包含在 $R(t)=Ce^{-kt}$ 内. 因此,我们称(10)是方程 (2) 的通解. 如果要完全确定常数 C, 就需要一个附

加条件.例如,设 $t=0$ 时 $R=R_0$, 则由(10)得 $C=R_0$, 故

$$R(t)=R_0e^{-kt}. \tag{11}$$

在通解中给予任意常数以确定的值而得到的解称为特解. 例如(11)就是方程(2)的一个特解.

例 6　考虑例 1 中的二阶线性微分方程

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g. \tag{1}$$

把方程(1)对 t 求两次不定积分,得

$$V(t)=\frac{ds}{dt}=gt+C_1 \tag{12}$$

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2. \tag{13}$$

其中 C_1, C_2 都是任意常数, $V(t)$ 是物体下落的速度.如果要完全确定 $s(t)$, 需要有两个附加条件. 例如设 $t=0$ 时 $s=0$, $V=0$, 则由(12)及(13)得 $C_1=0$, $C_2=0$, 故

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2. \tag{14}$$

二阶线性微分方程(1)的解(13)中含有两个任意常数. (13)就是方程(1)的通解,而(14)是一个特解.

§4　方　向　场

微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{15}$$

本身具有其几何解释. 设函数 $f(x,y)$ 在 xy 平面的定义区域是 G. 在区域 G 内每一点 (x,y), 画出由斜率等于 $f(x,y)$ 的小线段,因而在 G 内每一点确定一个方向. 我们说, 这个微分方程在区域 G 内定义一个*方向场*. 经过 G 内若干个点, 画出

具有已知斜率的小线段，即可得方向场的略图.

例 7　画出微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \tag{16}$$

的方向场的略图.

解　在 xy 平面上(除坐标原点外)的若干个点 (x, y)，画出斜率等于 $\frac{y}{x}$ 的小线段. 于是便得到 (16) 的方向场的略图(图 1.2).

例 8　画出方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

的方向场的略图.

解　在 xy 平面 (除坐标原点外) 的若干个点 (x, y)，画出斜率等于 $-\frac{x}{y}$ 的小线段，它垂直于该点至原点的联线. 所得方向场如图 1.3 所示.

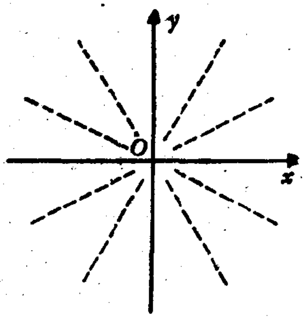

图 1.2

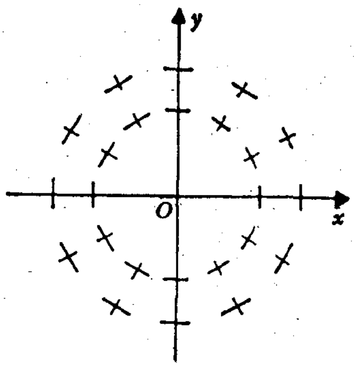

图 1.3

从几何观点来看，所谓微分方程的解就是这样的曲线，在其上每一点的切线方向与方向场在该点的方向都是一致的.

我们称这样的曲线为微分方程的积分曲线.

由上面的图象可见,方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

的解是直线族 $y=Cx$ (C 是任意常数);方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

的解是以原点为中心的圆族 $x^2+y^2=C^2$, 这里 C 是任意常数。

在实际问题中我们常遇到形如 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的方程,其解析解很难求得. 但是我们总可画出它的方向场, 从而对解的几何性态可以有所了解. 从一个起点 $P_0(x_0, y_0)$ 开始, 并沿在该点的方向线段移到新的点 $P_1(x_1, y_1)$. 然后改变方向,沿在点 $P_1(x_1,y_1)$ 的方向线段移到第三个点 $P_2(x_2, y_2)$, 等等, 如图 1.4 所示. 这样就构造了一个"折线"函数 $P(x)$, 它在

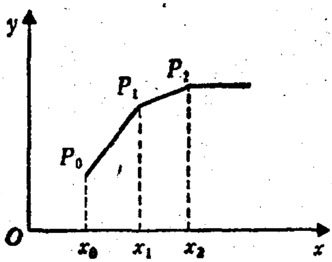

图 1.4

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots$$

的每一个区间上的图象都是线性的,并且有

$$P'(x_0)=f(x_0, P(x_0)),\ P'(x_1)=f(x_1, P(x_1)), \cdots.$$

我们指出, 如果对方程(15)的右端函数 $f(x,y)$ 加以限制,并且所取诸点 $x_0, x_1, \cdots$ 是充分接近的, 那么如上求得的"折线"函数将逼近于方程(15)的解.

练习 画出微分方程

$$\frac{dy}{dx}=x$$

的方向场的略图．并画出过点(1, 1)的积分曲线的近似图象．用不定积分法求所给微分方程过点(1, 1)的积分曲线．

§5 微分方程基础中讨论的问题

在§1中，我们举例说明了寻找物理问题中的变量之间的关系，可归结为求微分方程解的问题．现在我们很自然地会提出下列问题．

第一、任意给定的微分方程是否都有解？这就是解的存在问题．并不是所有微分方程都有解；而且解的存在问题也不纯粹是数学问题．如果一个意义完全的物理问题被正确地用数学方法归结为一个微分方程，那么这个问题就会有解．工程技术人员正是在这个意义上来检验他的数学表达方法的正确性．

第二、如果所给方程有一个解，它是否还有其它解？如果有其它解，要附加什么条件才能得到一个特解？这就是解的唯一性问题．存在和唯一性问题是困难的问题，以后将逐步扼要讨论．

第三、就是更为实际的问题：给定形如(7)的方程，如何求它的解．如果能求得所给方程的解，那么解的存在问题也就解决了．然而，在大多数情况下，即使知道方程(7)的解是存在的，可是这个解也往往不能用初等函数的有限组合表示出来．尽管如此，熟悉常微分方程的某些理论仍然是必要的．为此，我们将首先讨论用比较初等的方法可解的微分方程，这些解是用初等函数或它们的积分以及两者的组合来表示的．其次我们将讨论可用收敛幂级数表达解的微分方程．最后我

们还要讨论微分方程的数值解法，由于高速电子计算机的出现，这类方法愈来愈重要．数值解法将在下一本教程中介绍．

习　　题

指出以下各微分方程的阶，并说明哪些是线性的，哪些是非线性的(1—6)：

1. $x^3y'' + xy' + 2y = \sin x$。

2. $y''' + \dfrac{1}{x-1}y'' + \sqrt{x}\,y + \ln x = 0$。

3. $x(y')^2 - 2xy' - x = 0$。

4. $(7x - 3y)dx + (2x + 5y)dy = 0$。

5. $dy + (2x - x^3y)dx = 0$。

6. $y'' - 2y(y')^2 + 2y' - xy = 0$。

对以下各题验证所给函数(或几个函数)是微分方程的解(7—11)：

7. $x^2y'' + 5xy + 4y = 0(x>0)$；　$y_1 = \dfrac{1}{x^2}$，　$y_2 = \dfrac{\ln x}{x^2}$。

8. $y^{(4)} + 4y''' + 3y = x$；　$y_1 = \dfrac{x}{3}$，$y_2 = e^{-x} + \dfrac{x}{3}$。

9. $y'' + y = \sec x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$；$y = \cos x\ln(\cos x) + x\sin x$。

10. $y''' - y'' + y' - y = 0$；　$y = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\sin x$ (C_1，C_2，C_3 是任意常数)。

11. $y' - 2xy = 1$；$y = e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2}$。

确定 r 的数值使以下各线性微分方程具有形为 e^{rx} 的解(12—13)：

12. $y' + 2y = 0$。

13. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$。

确定 r 的值使以下各线性方程具有形如 x^r 的解 (14—15)：

14. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$，$x>0$。

15. $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$，$x>0$。

试验证下列方程所确定的隐函数是否为相应微分方程的解 (16—