弹性力学基础

赵学仁 编著

北京理工大学出版社

弹性力学基础

赵学仁　编著

北京理工大学出版社

(京)新登字149号

内容简介

本书是为高等院校工程专业编写的弹性力学教材，主要介绍了弹性力学的基本概念、基本理论和基本方法。

本书的特点是由浅入深、循序渐进、联系实际、便于自学。可做为大专院校机械设计、建筑结构、宇航航空等专业本科生的必修课或选修课教材。也可供广大工程技术人员参考。

弹性力学基础
赵学仁　编著
*
北京理工大学出版社出版发行
各地新华书店经售
北京市万龙图文信息公司激光照排
清华大学印刷厂印刷
*
850×1168毫米　32开本　9印张　226千字
1994年10月第一版　　1994年10月第一次印刷
ISBN 7－81013－961－4/O·102
印数：1－2000册　　定价：10.00元

前　言

《弹性力学基础》是为高等院校工程专业编写的弹性力学教材。弹性力学的基本理论和处理问题的方法已广泛应用于现代科学技术的许多领域之中，特别是在机械设计、建筑结构、宇航航空等部门受到越来越多的重视。因此，弹性力学这门课不仅被列为固体力学专业的必修课，而且近年来也作为许多工程专业的必修课或选修课。本书是在总结了多年来教学经验并在原编教材的基础上，参考了现行有关教材编写而成的，主要介绍了弹性力学的基本概念、基本理论和基本方法。

本书的特点是由浅入深、循序渐近，在内容上注意理论联系实际，特别是机械工程的实际，注重工程应用。全书共分八章，重点介绍了弹性平面问题，一般用 30—40 学时便可讲授完毕。为使初学者加深对弹性力学基本概念、基本理论的理解和对基本方法的掌握，书中编入了较多的例题和习题，习题附有提示或答案。

本书由北京理工大学程兆雄、薛大为教授进行了认真地审阅，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢！

限于编者水平，书中难免有不妥之处或错误，恳请读者批评指正。

编　者

1994 年 6 月

目　　录

第四章　在直角坐标系中求解弹性平面问题的算例

第五章　在极坐标系中求解弹性平面问题

第六章　在极坐标系中求解弹性平面问题的算例

第七章　弹性空间问题的基本理论

第一章　基本概念

本章将主要介绍弹性力学的基本任务、研究对象、分析方法和基本概念。

§1-1　概　　述

弹性力学是固体力学的一个分支。它研究弹性体在外力或其它因素(例如温度变化等)作用下所产生的应力、应变与位移,并为各种结构物或其构件的强度、刚度和稳定性计算提供必要的理论基础或精确的计算方法。显然,弹性力学与材料力学(或结构力学)的任务是相同的。但是,弹性力学比材料力学(或结构力学)的研究对象更广泛,采用的方法更严密,所得的结果更精确。

我们知道,材料力学的研究对象主要是杆状构件(一维弹性杆件),而且常采用一些关于变形的近似假设。虽然这样求得的常常是近似解,但所得公式却非常简单,并具有工程上所需要的足够精度。结构力学的研究对象主要是杆状构件所组成的杆件系统,例如桁架、刚架等杆系结构。但是,在工程中还会遇到几何形状并非杆件的变形固体(二维或三维的构件),例如滚动轴承中的滚珠或滚柱〔图 1-1(a)、(b)〕、板件、壳体和块体〔图 1-1(c)、(d)、(e)〕等,这些都不是杆件,通常都不属于材料力学的研究范围;再如机器中的很多零件的截面尺寸有突然变化〔图 1-1(f)〕,在这些截面上,实际应力与按材料力学公式算得的结果将有很大差异。上述材料力学难以解决的问题可以在弹性力学里加以解决;同时,弹性力学对杆状构件也作进一步地、精确地分析。对某些问题可依此精确结果来判断初等解答的误差,并可指出在一定的计算精度要求下,初等

解答适用的范围或条件。

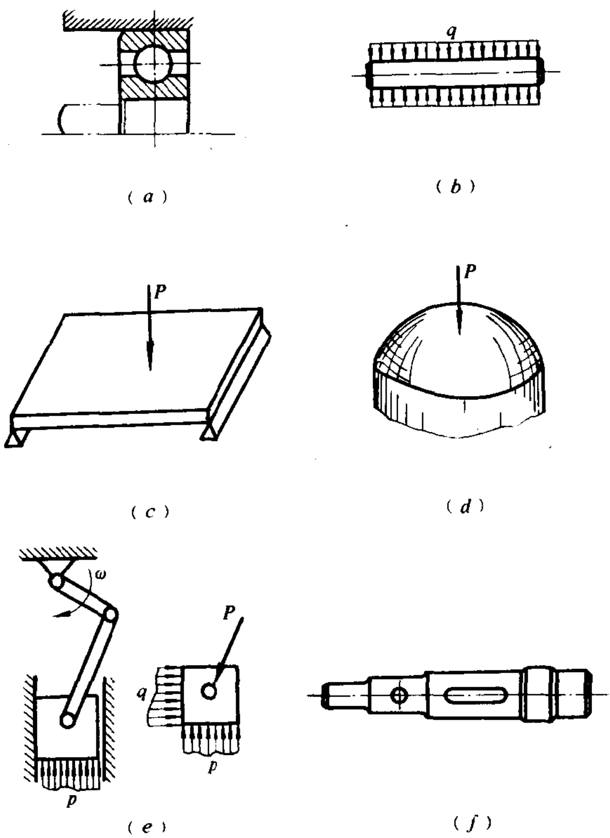

图 1-1

在材料力学(或结构力学)里,除了引用一些必要的“基本假设”外,为了简化计算,还常常根据不同的研究对象,又引入一些“补充假设”。例如,在材料力学中研究直梁弯曲时,引用了“平面截面”的假设;在结构力学中分析薄壁杆件的应力时,引用了“刚周边”的假设,等等。因此,所求得的解答常有一定的近似性。弹性力学在处理问题时,除引用必要的“基本假设”(见§1-2)外,通常不必引入类似于上述的“补充假设”,而是比较严格地按照静力学、几何学和物理学三个条件来考虑,因而所得结果比较精确。如图 1-2

(a)所示的简支梁在分布载荷 q 作用下而发生弯曲，在材料力学中由于引用了“平面截面”和“纵向纤维无挤压”的假设，因此，根据“平面假设”得出的结果是：横截面上的正应力按直线分布。事实上，这只有在梁的截面高度 h 远小于梁的跨度 l 时才与实际情况相符；否则，横截面上的正应力是按曲线分布的，如图 1-2(b)所示。根据“纵向纤维无挤压”的假设得出的结果是：横向的挤压应力 σ_y 沿横截面高度处处为零。显然，这是一种近似。按弹性力学计算，σ_y 沿梁截面高度按三次曲线规律变化，如图 1-3 所示。

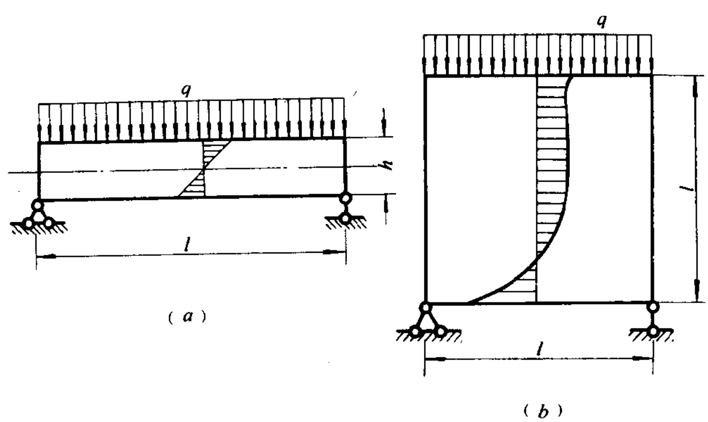

图 1-2

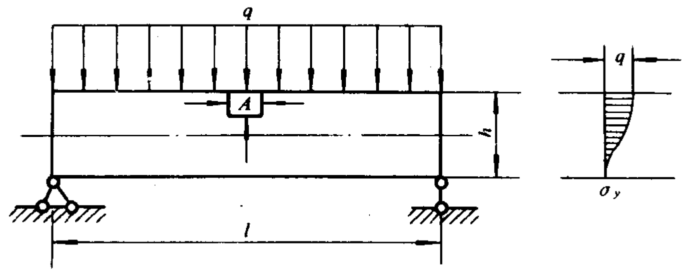

图 1-3

按照材料力学分析应力的方法所求得的应力分量，虽能保证

杆件整段的平衡，但往往不能保证每一微小部分（微体）的平衡。如图 1-4(a)所示的变截面杆，若采用材料力学方法计算其应力，则认为任一截面 m-n 上的正应力 σ_y 是均匀分布的，且无剪应力，从而得 $\sigma_y=P/A$（A 为横截面 m-n 之面积）；同时认为杆的纵向纤维无挤压，如图 1-4(b)所示。这样，若在杆的边界上截取一微小部分来分析，可知其各个面上的应力分布如图 1-4(c)所示。可见，这一微小部分无法平衡 。显然，这个结论是错误的。事实上，这一微小部分在外力作用下也是处于平衡状态的。

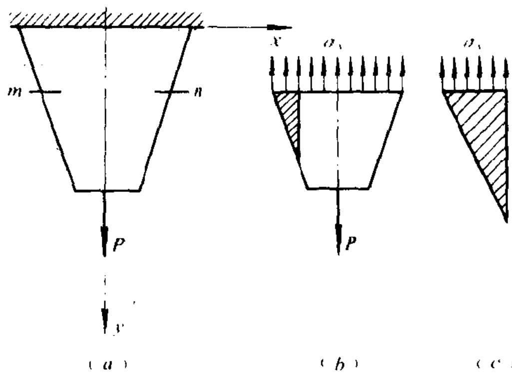

图 1-4

在弹性力学里，假想物体是由无限多个微小平行六面体—“单元体”所组成。当研究某点的应力状态时，就在该点附近取一“单元体”，考虑这一“单元体”的平衡，可得一组平衡微分方程，它能保证弹性体所有各微小部分的平衡。按照弹性力学的研究方法，图 1-4(c)所示的微小部分（如果取得足够小，即为所谓“单元体”）的两个互相垂直的截面上均有正应力和剪应力存在，如图 1-5 所示。

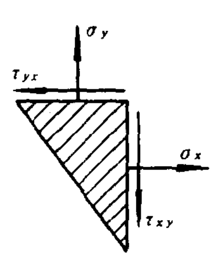

图 1-5

综上所述，弹性力学可以解决材料力学无法解决的很多问题；并对杆状构

件进行精确分析，以及检验材料力学公式的适用范围和精度。

弹性力学可以解决一些几何形状比较复杂的变形固体问题。由于使用了较多的数学工具，因此能求得比较精确的解答。可是，由于弹性力学要求满足的条件比较严格，以致给许多问题的求解带来困难。因此，一些行之有效的实验方法以及有限差分法、有限单元法等数值方法，都是对弹性力学解析法的有力补充。

弹性力学是在不断地解决工程实际问题的过程中发展起来的。由于建筑工程的需要，伽里略(G. Galileo)于 1638 年研究了梁的弯曲问题。虎克(R. Hooke)根据试验结果于 1660 年提出了弹性体变形与所受外载荷成正比的物理定律(虎克定律)，为弹性力学提供了坚实的物理基础。但当时仍局限于解决杆、梁、柱、拱等简单的一维问题。在 1821—1822 年间，纳维埃(Novier)和哥西(A. L. Cauchy)导出了弹性力学的普遍方程，为弹性力学建立了数学基础。此后，许多学者都致力于解决二维和三维的典型工程问题(例如柱体的扭转与弯曲问题、平面问题、板壳问题、接触问题以及孔边附近或裂纹尖端的应力集中问题，等等)，使弹性力学取得了重大的进展。由于弹性力学的基本方程十分复杂，要精确地求解各种复杂的工程结构问题，在数学上仍有很大困难，因此，在 1908 年和 1915 年里兹(W. Ritz)和伽辽金(Г. б. Галёркин)分别提出了基于能量原理的直接解法，从而开创了近似求解弹性力学问题的新途径。随后又出现了有限差分法、有限单元法、边界元法等有效的数值计算方法。特别是近代大型、高速电子计算机的出现及其广泛应用，目前对各种复杂的工程结构及其构件进行弹性分析原则上已不存在困难。

弹性力学是以理论力学、材料力学等课程为基础，并为进一步学习有限单元法、实验应力分析、板壳力学、塑性力学和断裂力学等课程打下坚实的基础。

§1-2　弹性力学的基本假设

为了便于建立理想弹性体模型及数学处理，在弹性力学里对材料的性质作了某些假设。引用这些假设在于突出矛盾的主要方面，忽略一些次要因素。现将弹性力学的几个基本假设叙述如下：

(1)物体是连续的。假设物体所占据的全部几何空间都被组成该物体的介质所充满，没有任何空隙。这样，物体中的应力、应变和位移等物理量都是连续变化的，可以用坐标的连续函数来表示，并可用微积分手段来分析物体受力后各物理量的变化。实际上，所有物体都是由微小颗粒组成的，它们之间存在着空隙，是不符合连续性假设的。但是，微粒的尺寸以及它们之间的空隙相对于宏观物体来说都是很微小的，故可不考虑物体内的分子构造。因而，将物体看成是连续的不会引起显著误差。

(2)物体是均匀的。假设整个物体是由同一种材料组成的，物体内的各部分具有相同的力学性质。例如，物体的弹性常数(弹性模量和泊松系数等)不随坐标位置而改变。这样，当我们对物体中的任何一部分进行研究时，均可代表整个物体的力学性质。实验证明，这一假设对于许多固体材料，特别是金属材料是比较符合的。如果物体是由两种以上材料混合组成的，那么只要每种材料的颗粒远小于物体的尺寸，而且在物体内均匀分布，也可把它视为均匀的。

应当指出的是，均匀性与连续性是两个不同的概念。例如，把两块不同材料的金属板焊接在一起，便成为一块连续而不均匀的板。

(3)物体是各向同性的。假设物体内每一点沿各不同方向的力学性质都是相同的，例如，物体的弹性常数不随方向而改变。均匀性与各向同性是有区别的，前者是指物体内各点的力学性质相同，而后者是指物体内某一点沿各个不同方向的力学性质相同。当然，

若用显微镜观察，即使是工程上常用的钢材及其合金材料，它们所含的晶粒也是各向异性的。但是，由于晶粒相对于物体的尺寸来说是非常微小的，而且是杂乱排列的，物体的性质是无数晶粒的平均性质，所以从统计的观点来看，仍可认为钢材是各向同性的。有些工程材料，例如木材、竹材等则是各向异性的。为了更好地发挥材料的性能，在工程中往往人为地将材料做成各向异性的，例如夹层板等。

(4)物体是完全弹性的。假设物体在外加因素(载荷、变温等)作用下引起的变形，当外加因素除去后能完全恢复原来形状而没有任何残余变形；同时还假定材料服从虎克定律，即应力与应变成正比。这就保证了应力与应变之间的一一对应关系。当然，完全弹性的材料是没有的。但由实验可知，对于工程上的大多数材料，当应力不超过某一限度时，这个假设与实际情况基本相符。

(5)物体的变形是微小的。假设物体在载荷或温度变化等外加因素作用下各点所产生的位移都远小于物体的原始尺寸，因而应变分量和转角都远小于1(但要注意：应变小不足以保证位移与转角也小)。这样，在分析物体变形后的平衡状态时，可以用变形前的尺寸来代替变形后的尺寸(此即硬化原理)；考虑物体的变形建立几何方程和物理方程时，可以略去应变和转角的二次幂或二次乘积以上的项(高阶微量)，使得到的基本方程都简化为线性偏微分方程，从而大大减少了求解中的困难，并且可以应用叠加原理。

在上述基本假设中，前四个属于物理假设，通常称为理想弹性体假设，第五个假设属于几何假设。本书所研究的实际受力体都被当作理想弹性体。当然，在有些受力体中往往还存在初应力，但在通常情况下可以略去不计，而在某些特殊情况下(譬如，焊接结构等)则须注意；只有当初应力与载荷或变温等引起的应力叠加后不超过材料的比例极限时，按弹性力学所得的结果才是正确的。

以上述基本假设为基础的弹性力学称为线弹性力学。由于它发展得早、理论严密和系统完整，因而在工程实际中得到广泛应

用。本书所研究的问题就限于这个范围。如果物体中的应力超过弹性极限，物体便处于弹塑性状态，此时应力与应变已不再是线性关系(此即物理上的非线性)。研究物体处于弹塑性状态时的应力与应变的学科称为塑性力学。如果物体的变形不是微小的，则不能把应变、转角的二次幂或二次乘积以上的项略去不计(此即几何上的非线性)，于是得出的基本方程将是非线性的偏微分方程，研究这类问题的弹性力学称为非线性弹性力学。

§1-3 弹性力学的研究方法

这里，回顾一下在材料力学中求解超静定问题时基本方程的建立以及求解的方法。图1-6(a)所示为一简单超静定桁架，设所给结构为对称结构，各杆的横截面面积均为A，弹性模量均为E，其长度分别为$l_{14}=l/\cos\alpha=l_{34}$，$l_{24}=l$。在节点4处作用一铅垂向下的载荷$P$。现假想地将各杆拆开，取分离体如图1-6($b$)所示。设各杆的轴力分别为$N_{14}=N_{34}$(根据对称性)、$N_{24}$；变形为$\Delta_{14}=\Delta_{34}$、$\Delta_{24}$；节点4在铅垂方向的位移为$u$。

为了确定各杆的内力及节点4的铅垂位移u，必须进行三个方面的分析：节点处内力与外力的平衡分析；杆件变形与节点位移的几何分析；杆件的内力与变形的物理分析。也就是必须从静力学、几何学和物理学条件的分析入手。

1.静力学条件

根据静力学平衡条件，由节点4的平衡方程$\sum F_x = 0$，可得

$$N_{24} + 2N_{14}\cos\alpha = P \tag{a}$$

由于只能列出一个平衡方程，而有两个未知轴力，因此必须考虑该问题变形的几何条件。

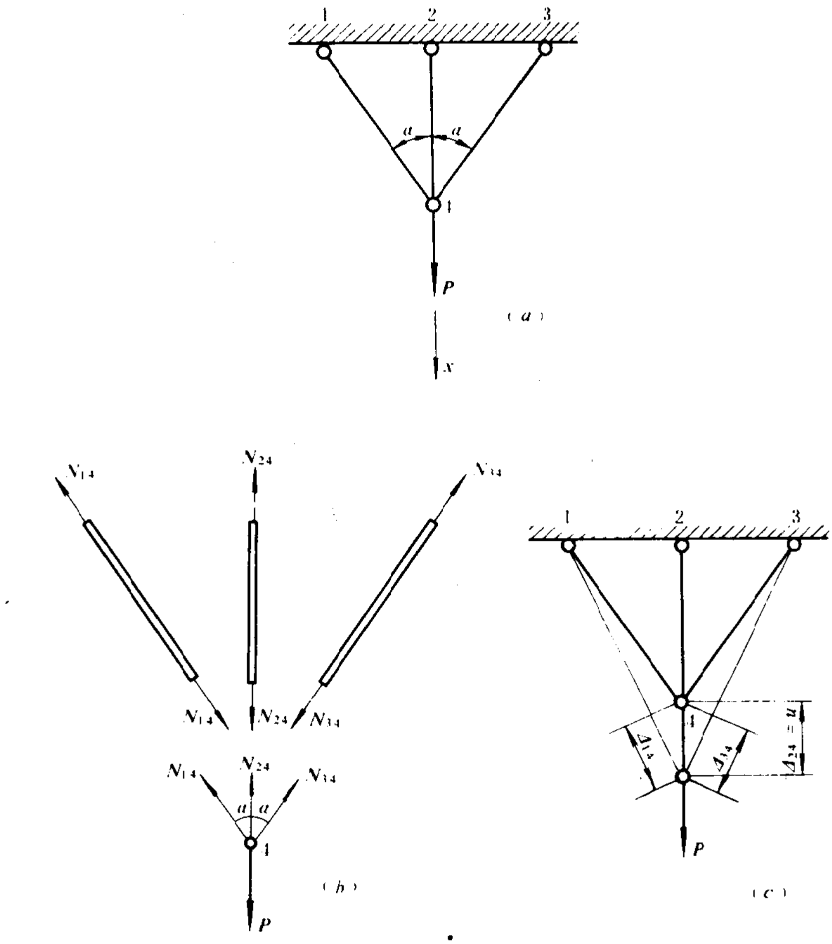

图 1-6

2. 几何学条件

根据杆件的变形与节点位移之间的关系，由图 1-6(*c*)可得

$$\Delta_{24} = u, \quad \Delta_{14} = u\cos\alpha \tag{b}$$

由式(*b*)消去位移 *u*，便得

$$\Delta_{14} = \Delta_{24}\cos\alpha \tag{c}$$

式(c)表明各杆间的变形关系，称为变形协调条件(或连续条件)。通过几何分析增加了一个方程式(c)，但多了两个未知量。因而，必须建立杆件内力与变形的物理学条件。

3. 物理学条件

根据变形与轴力间的关系，由物理方程(虎克定律)可得

$$\Delta_{24} = \frac{N_{24}l_{24}}{EA}, \quad \Delta_{14} = \frac{N_{14}l_{14}}{EA} \tag{d}$$

通过上面三个方面的分析，得到式(a)～(d)4 组方程。显然，式(b)与式(c)是等价的，因而可从两个方面来综合上述方程：

综合式(a)、(c)、(d)，有

$$\left.\begin{aligned} & N_{24} + 2N_{14}\cos\alpha = P \\ & \Delta_{14} = \Delta_{24}\cos\alpha \\ & \Delta_{24} = \frac{N_{24}l}{EA} \\ & \Delta_{14} = \frac{N_{14}l}{EA\cos\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

综合式(a)、(b)、(d)，有

$$\left.\begin{aligned} & N_{24} + 2N_{14}\cos\alpha = P \\ & \Delta_{24} = u, \Delta_{14} = u\cos\alpha \\ & \Delta_{24} = \frac{N_{24}l}{EA} \\ & \Delta_{14} = \frac{N_{14}l}{EA\cos\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

式(1-1)及式(1-2)即为求解该结构的方程组。由于方程式(1-1)有 4 个方程，4 个未知数；方程式(1-2)有 5 个方程，5 个未知数，而且都是代数方程，因而可以直接求解。

但是，在力学中一般不是由式(1-1)及式(1-2)直接求解，而是根据式(1-1)及式(1-2)分别进行消元，得到常用的应力法及位移法方程。