高等数学

下册

西安交通大学《高等数学》编写组编

人民教育出版社

目　　录

第四章　微积分的应用

内 容 提 要

在本书的上册，我们从实际问题入手，以微分和积分这一对矛盾的发生、发展与转化为线索，阐述了微积分学中的基本概念及其联系；介绍了微分与积分的计算方法；并运用微分与积分的概念和方法解决了一些物理学和几何学中的问题。这一章，我们将综合运用微积分的概念和方法，进一步介绍微积分在科学技术中的一些应用。

本章共分五节，各节的内容保持一定的独立性，可根据实际需要选学一节或数节。

主要内容为：

（一）通过实例讲解微分方程的一些基本概念；结合工程技术中几个常用的微分方程，综合运用微积分的概念和运算，介绍建立微分方程和解微分方程的常用方法；

（二）利用微积分方法从参数方程和极坐标方程研究曲线，举例说明它们在工程技术中的应用；

（三）利用导数求曲线的曲率，举例说明曲率的应用；

（四）利用导数将函数用多项式近似表示，举例说明其应用。

学习本章时，应着重于培养分析问题和解决问题的能力。在分析实际问题中要注意加深对微积分基本概念的理解；在解决实际问题中要注意总结微积分方法的基本规律。通过对本章的学习，要求进一步掌握微积分的基本方法。

第一节　用积分法解几个微分方程

在第一章里我们已知道，函数是客观事物的内部联系在数量方面的反映，利用函数关系可以从量的方面对客观事物的规律进行研究。因此，如何寻求函数关系，在实践中具有重要意义。但是，在工程技术的许多问题中，往往不能直接找出所需要的函数关系。有时根据问题所提供的情况，可以先列出要找的函数及其导数或微分之间的关系式。这样的关系式就是“微分方程”。微分方程建立以后，进一步对它进行研究，设法找出未知函数来，这就是解微分方程。

一、微分方程的基本概念

按照“**由浅入深，由片面到更多的方面**”[①] 的认识秩序，我们通过几个具体例子来说明有关微分方程的基本概念。

例 1　一曲线通过点$(1,2)$，且在该曲线上任意点$M(x,y)$处的切线斜率为$2x$，求这曲线的方程。

［解］　根据导数的几何意义，我们知道所求曲线$y=y(x)$应满足方程

$$\frac{dy}{dx}=2x。\qquad (4\text{-}1)$$

对方程两边求积分，得

$$y=\int 2x dx,$$

即

$$y=x^2+C, \qquad (4\text{-}2)$$

其中C是任意常数。

---

① 《实践论》，《毛泽东选集》第 260 页。

由于所求的曲线通过点(1, 2), 因此, 方程(4-2)还应满足下面的条件:

$$x=1\text{ 时},\ \ y=2。\qquad (4\text{-}3)$$

把条件(4-3)代入(4-2)式, 得

$$2=1^2+C,$$

由此定出 $C=1$。把 C 的值代入(4-2)式, 即得所求曲线方程为

$$y=x^2+1。$$

在第三章第三节中, 我们已经看到 $y=x^2+C$ 的图形是一族抛物线(图 4-1), 而所求曲线 $y=x^2+1$ 是这族抛物线中通过点(1, 2)的那一条。

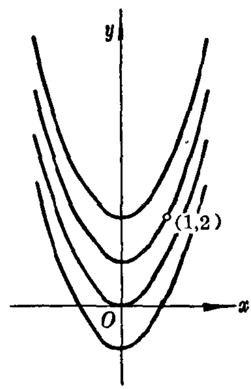

图 4-1

例 2 列车在直线轨道上以 20 米/秒(相当于 72 公里/小时)的速度行驶, 制动时列车获得加速度 -0.4 米/秒^2。开始制动后经过多少时间才能把列车刹住? 在这段时间内列车行驶了多少路程?

[解] 设列车开始制动后 t 秒内行驶了 s 米, 根据题意, 反映制动阶段列车运动规律的函数 $s=s(t)$ 应满足方程

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-0.4。\qquad (4\text{-}4)$$

此外, 未知函数 $s=s(t)$ 还应满足下列条件:

$$t=0\text{ 时},\quad s=0,\ \ v=\frac{ds}{dt}=20。\qquad (4\text{-}5)$$

把方程(4-4)两边积分一次, 得

$$v=\frac{ds}{dt}=-0.4t+C_1,\qquad (4\text{-}6)$$

再积分一次, 得

$$s=-0.2t^2+C_1t+C_2, \tag{4-7}$$

这里 C_1、C_2 都是任意常数。

把条件“$t=0$ 时，$v=20$”代入(4-6)式，得

$$20=-0.4\times 0+C_1,$$

把条件“$t=0$ 时，$s=0$”代入(4-7)式，得

$$0=-0.2\times 0^2+C_1\times 0+C_2,$$

由此定出 $C_1=20, C_2=0$。把 C_1、C_2 的值代入(4-6)和(4-7)式，得

$$v=-0.4t+20, \tag{4-8}$$

$$s=-0.2t^2+20t。 \tag{4-9}$$

在(4-8)式中令 $v=0$，得到列车从开始制动到完全刹住所需的时间

$$t=\frac{20}{0.4}=50(秒)。$$

再把 $t=50$ 代入(4-9)式，得到列车在制动阶段行驶的路程

$$s=-0.2\times 50^2+20\times 50=500(米)。$$

通过以上两个例子我们来说明微分方程的几个基本概念。

方程(4-1)和(4-4)都是含有未知函数的导数的方程。我们把含有未知函数的导数(或微分)的方程，叫做微分方程。例如方程(4-1)和(4-4)都是微分方程。

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，叫做这个微分方程的阶。例如方程(4-1)是一阶微分方程，方程(4-4)是二阶微分方程。

满足微分方程的函数都叫做该微分方程的解。换句话说，如果把某个函数以及它的导数代入微分方程，能使该方程成为恒等式的话，那末这个函数就叫做该微分方程的解。例如函数 $y=x^2+C$ 和 $y=x^2+1$ 都是方程 $\frac{dy}{dx}=2x$ 的解；函数 $s=-0.2t^2+C_1t+C_2$ 和

$s=-0.2t^2+20t$ 都是方程$\frac{d^2s}{dt^2}=-0.4$ 的解。

如果微分方程的解含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解，叫做微分方程的通解。例如函数 $y=x^2+C$ 是方程 $\frac{dy}{dx}=2x$ 的解，它含有一个任意常数，而方程 $\frac{dy}{dx}=2x$ 是一阶的，所以它是该方程的通解。又如函数 $s=-0.2t^2+C_1t+C_2$ 是方程$\frac{d^2s}{dt^2}=-0.4$ 的解，它含有两个任意常数，而方程 $\frac{d^2s}{dt^2}=-0.4$ 是二阶的，所以它是该方程的通解。

由于通解中含有任意常数，它只能反映微分方程所描写的某一类客观事物运动变化过程的一般规律，还不能反映其中某一具体变化过程的特殊规律。要完全确定地反映某一具体变化过程的规律，必须确定这些任意常数。为此，要根据具体问题的实际情况，提出能确定这些任意常数的条件。就是说，用微分方程解决实际问题时，除了列出微分方程外，还要列出附加条件，才能得到确定的解。例如例 1 中的附加条件是(4-3)，或写成

$$y\Big|_{x=1}=2;$$

例 2 中的附加条件是(4-5)，或写成

$$s\Big|_{t=0}=0,\quad s'\Big|_{t=0}=20。$$

这种用以表明运动的初始状态或表明曲线的起始点状态的附加条件，习惯上叫做初始条件。一般地说，当自变量取某值时，要求未知函数及其导数取给定值的条件叫做初始条件。

由于一阶微分方程的通解只含有一个任意常数，因而要使这个任意常数取定值，只需给出一个初始条件，如例 1 中的(4-3)那样；而二阶微分方程的通解含有两个任意常数，所以要使这两个任

意常数取定值，就需要给出两个初始条件，如例 2 中的(4-5)那样。

满足给定的附加条件的解，叫做微分方程的特解。换句话说，根据附加条件定出通解中的任意常数后所得出的解，叫做微分方程的特解。例如函数 $y=x^2+1$ 是方程$\frac{dy}{dx}=2x$ 的特解，这个特解满足初始条件(4-3)；函数 $s=-0.2t^2+20t$ 是方程$\frac{d^2s}{dt^2}=-0.4$ 的特解，这个特解满足初始条件(4-5)。

上面通过两个例子阐明了微分方程的几个基本概念，同时我们也看到，在实际问题中利用微分方程寻求未知函数的一般步骤如下：

第一步　分析问题，建立微分方程，并提出附加条件；

第二步　求出微分方程的通解；

第三步　根据附加条件求出微分方程的特解。

例 3　冷却问题。

将一个加热到 50°C 的物体，放在 20°C 的恒温室中冷却，求物体温度的变化规律。

[解]　第一步　建立微分方程，提出附加条件。

根据实验可知：温度为 θ 的物体，在温度为 θ_0 的周围环境中冷却的速度与温差 $\theta-\theta_0$ 成正比，这就是所谓冷却定律。

在冷却过程中，设物体的温度 θ 与时间 t 的函数关系是 $\theta=\theta(t)$，为了找出 $\theta(t)$，首先根据冷却定律，建立 $\theta(t)$ 应满足的微分方程。

由于物体冷却的速度就是物体的温度 θ 对时间 t 的变化率——$\frac{d\theta}{dt}$，由冷却定律，$\frac{d\theta}{dt}$ 应与 $\theta-20$ 成正比，即

$$\frac{d\theta}{dt}\propto(\theta-20),$$

这里，$\propto$表示成正比的符号。如果引进比例常数α，就有

$$\frac{d\theta}{dt}=\alpha(\theta-20)。$$

由于θ随t的增加而减小，所以$\frac{d\theta}{dt}<0$，而$\theta-20>0$，因此α应为负数。设$\alpha=-k$，$k>0$，上式成为

$$\frac{d\theta}{dt}=-k(\theta-20), \qquad (4\text{-}10)$$

这就是冷却过程中物体的温度$\theta=\theta(t)$应满足的微分方程。

根据题设，$\theta=\theta(t)$尚需满足初始条件

$$\theta\Big|_{t=0}=50。\qquad (4\text{-}11)$$

第二步　求通解。

为了求出函数$\theta(t)$，就要解微分方程(4-10)。这个微分方程不能象前面两个例子那样，用直接积分的方法来求它的解。因为，如果把(4-10)直接积分，得

$$\theta=\int-k(\theta-20)\,dt,$$

由于被积函数$-k(\theta-20)$中含有θ，而θ与t的函数关系是未知的，因此无法把积分求出来。直接积分的方法在这里遇到了困难。怎么办？

毛主席教导我们："**对于物质的每一种运动形式，必须注意它和其他各种运动形式的共同点。**"① 我们回想在代数中解一元一次方程时，解题的关键是移项，移项的目的是分离已知数与未知数，使未知数与已知数分别处于等式的两边，从而求出解来。这个思想启发我们：是否可将方程(4-10)中的自变量t与因变量θ分离在等式的两边，从而达到能利用积分法来求解的目的呢？

① 《矛盾论》，《毛泽东选集》第283页。

我们把方程(4-10)改写成微分的形式

$$d\theta=-k(\theta-20)\,dt。$$

为了把 t 与 θ 分离，将 $\theta-20$ 移到等式左边，得

$$\frac{d\theta}{\theta-20}=-k\,dt,$$

两边积分

$$\int\frac{d\theta}{\theta-20}=\int-k\,dt,$$

得 $$\ln(\theta-20)=-kt+C_1,$$

或 $$\theta-20=e^{-kt+C_1}=e^{C_1}\cdot e^{-kt}。$$

因 C_1 为任意常数，e^{C_1} 仍为任意常数，把它改记作 C，上式成为

$$\theta=20+Ce^{-kt}, \qquad (4\text{-}12)$$

容易验证，(4-12)式就是方程(4-10)的通解。

第三步　求特解。

为了得出问题中要求的解，利用初始条件来定(4-12)式中的任意常数 C，把条件(4-11)代入(4-12)式，得

$$50=20+C, \quad 即 \quad C=30。$$

从而所求的函数为

$$\theta=\theta(t)=20+30e^{-kt}。$$

函数 $\theta=\theta(t)$ 的图形如图 4-2 所示。从图上看出，随着时间 t 的增加，物体的温度在下降，开始快，以后逐渐变慢，并且愈来愈接近于室内的温度 $\theta=20°C$。可见我们从方程(4-10)中求出的函数 $\theta(t)$ 是符合于客观实际的，是反映了物体的冷却规律的。

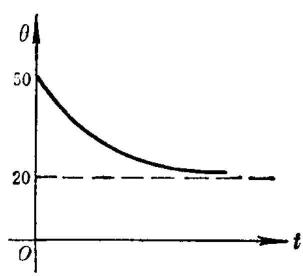

图 4-2

二、可分离变量的一阶方程

从以上例子我们看得很清楚，方程(4-10)之所以能用积分法求解，关键在于自变量和因变量(或未知函数)的分离。变量可以分离的微分方程叫做可分离变量的微分方程。用变量分离把微分方程化为可以求积分形式的方法叫做分离变量法。例如

方程 $y'=\dfrac{y^2}{x^2}$ 可以改写成 $\dfrac{dy}{y^2}=\dfrac{dx}{x^2}$；

方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x(3+y^2)}{y(1+x^2)}$ 可以改写成 $\dfrac{ydy}{3+y^2}=\dfrac{xdx}{1+x^2}$；

所以它们都是可分离变量的微分方程。

一般来说，凡是具有以下形式的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)\psi(y)$$

是可以分离变量的。求解的方法是

分离变量

$$\frac{dy}{\psi(y)}=\varphi(x)dx;$$

两边积分

$$\int\frac{dy}{\psi(y)}=\int\varphi(x)dx+C;$$

求出积分，即得通解。

例 4 求微分方程 $x\sqrt{1+y^2}dx-y\sqrt{1+x^2}dy=0$ 的通解。

［解］ 分离变量，得

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}};$$

两边积分，得

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dy;$$

求出积分，得

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+y^2} + C。 \qquad (4-13)$$

(4-13)式给出了满足微分方程的函数关系，它就是所求微分方程的通解。

例 5 RC 电路充放电问题。

设有一电阻、电容串联电路连接着一直流电源，如图 4-3 所示。已知电阻为 R，电容为 C，电源电动势为 E，这里 R、C、E 都是常量，K_1 和 K_2 表示开关。如果合上开关 K_1 前电容器上的电压 $u_C=0$，当开关 K_1 闭合后，电源就向电容器充电，电路中有电流 i 通过，电容上的电压 u_C 逐渐升高。求 u_C 的变化规律，即求函数 $u_C(t)$。

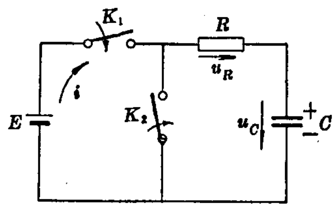

图 4-3

[解] 第一步 建立微分方程，提出附加条件。

根据电学中回路电压定律——闭合回路中各部分电压之和等于电路中电动势之和。把这个定律应用到图 4-3 的 RC 回路中，有

$$u_R + u_C = E, \qquad (4-14)$$

其中 u_R 为电阻的电压降，u_C 为电容上的电压降。

现在 u_R 和 u_C 都是未知的。由关系式(4-14)求不出 u_C，还要找出 u_R 和 u_C 的关系。根据欧姆定律

$$u_R = Ri,$$

电流 i 仍是未知的，还要找出 i 和 u_C 的关系。在电学中我们知道

$$i = \frac{dq}{dt}, \text{ 而 } q = Cu_C,$$

所以 $$u_R=Ri=R\frac{dq}{dt}=R\frac{d(Cu_C)}{dt}=RC\frac{du_C}{dt},$$

代入(4-14)式，得 u_C 应满足的微分方程为

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E。\qquad(4-15)$$

因为合闸前电容器上的电压 $u_C=0$，而合闸时 $(t=0)$电容器上电压不能突变，故初始条件是

$$u_C|_{t=0}=0。\qquad(4-16)$$

第二步　求通解。

方程(4-15)是可分离变量的方程。分离变量后，就有

$$\frac{RC}{E-u_C}du_C=dt,$$

两边积分，得

$$-RC\ln(E-u_C)=t+A\quad(A\text{ 为任意常数}),$$

即 $$\ln(E-u_C)=-\frac{1}{RC}(t+A)。$$

为了解出 u_C，把上式写成

$$E-u_C=e^{-\frac{1}{RC}(t+A)}=e^{-\frac{t}{RC}}e^{-\frac{A}{RC}}=ae^{-\frac{t}{RC}},$$

这里 $a=e^{-\frac{A}{RC}}$ 仍是任意常数，所以

$$u_C=E-ae^{-\frac{t}{RC}},\qquad(4-17)$$

这就是方程(4-15)的通解。

第三步　求特解。

把初始条件(4-16)代入上式，得

$$0=E-ae^0=E-a,$$

所以 $$a=E。$$

把 $a=E$ 代入(4-17)式，得所求的函数 u_C 为

$$u_C=E(1-e^{-\frac{t}{RC}}),\qquad(4-18)$$

它表示合闸后电容器上电压的变化规律。

图 4-4 是函数 $u_C(t)$ 的图形。从图中可知 $u_C(t)$ 随 t 的增大而增大，并且逐渐接近电源的电动势 E。而充电的快慢决定于时间常数 $\tau=RC$，RC 越大，充电过程越长。u_C 的这段变化过程，通常称为电容器充电的过渡过程。

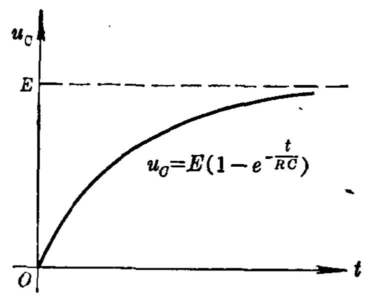

图 4-4

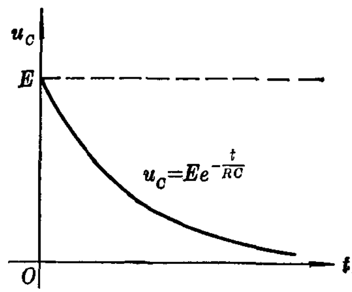

图 4-5

用同样的方法，可以求出如图 4-3 所示的电路中电容器放电时电压 u_C 的变化规律。也就是说，当我们对电容 C 充电完毕(即电压 u_C 达到 E)之后，迅速拉开开关 K_1，合上开关 K_2，这时电容器就向电阻 R 放电，于是电压 u_C 逐渐变小，直到变为零为止。根据回路电压定律，注意到此时电路中没有电源，用前面的分析方法，可求得 u_C 应满足的微分方程及初始条件为

$$\begin{cases} RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=0, \\ u_C\Big|_{t=0}=E。\end{cases}$$

用分离变量法，求得通解

$$u_C=Ae^{-\frac{t}{RC}}。$$

根据初始条件，定出 $A=E$，从而得特解

$$u_C=Ee^{-\frac{t}{RC}}。\qquad (4\text{-}19)$$