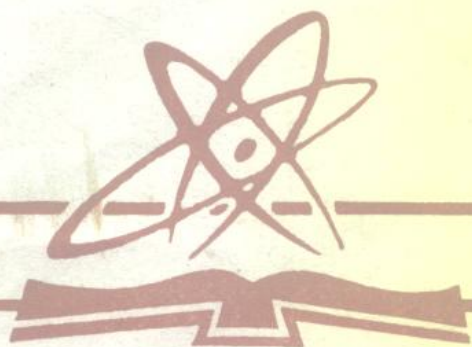


数 字 滤 波 器

西安交通大学 邹理和 编

国防工业出版社



73.7627
758

数字滤波器

西安交通大学 邹理和 编



国防工业出版社

1110179

内 容 简 介

本书介绍数字滤波器的基本原理，主要包括数字滤波器和快速傅里叶变换两部分内容。全书共分七章，第一、二章介绍差分方程、 z 变换及离散傅里叶变换。第三到第六章系统地讲述数字滤波器的原理、结构和设计，以及快速傅里叶变换。第七章介绍数字滤波器计算误差和精度的分析。全书叙述力求深入浅出。

本书可作为大专院校无线电技术专业高年级的选修课教材，也可供电子技术领域从事数字信号处理的工程技术人员作自学读物。

10025/05

数 字 滤 波 器

西安交通大学 邹理和 编

国防工业出版社 出版

北京市书刊出版业营业许可出字第074号

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

787×1092¹/₁₆ 印张11³/₄ 271千字

1979年12月第一版 1982年6月第二次印刷 印数：7,001—14,000册

统一书号：15034·1932 定价：1.25元

序 言

本书为高等院校工科电子类无线电技术专业的统编教材，供高年级网络理论选修课采用。

在电子工程和通讯技术领域，网络理论与滤波器技术的应用一向极为广泛。近年来，更进一步获得了巨大的发展。经典的无源网络理论已远不能满足近代技术科学发展的需要了。当前，网络理论与滤波器技术的发展已经包括了从无源到有源、从集总参数到分布参数、从连续时间系统到离散时间系统等非常广泛的领域。特别是电子计算机的飞跃发展，以及大规模集成技术的进步，使电子技术领域发生着深刻的变化。不少过去主要靠模拟电路来实现的电子系统，现在正在开始采用数字化技术。在这些系统中，传统的滤波器正被数字滤波器所代替。数字滤波器不仅能完成许多模拟信号滤波器的功能，而且它在实现上，不受模拟滤波器实现中许多条件的限制，从而可以实现性能更为特殊的网络和滤波器。数字滤波器是一门由数字计算机技术与网络理论相结合的新兴学科，它在网络理论与滤波器技术中正越来越占有重要的地位。

无线电技术专业类的网络理论课程，包括无源网络综合、有源网络以及数字滤波器等主要内容。由于数字滤波器在分析上与前两者有很大的不同，因此本书自成系统，独立成册。无源网络综合与有源网络部分的选修课内容将另由“网络综合原理”一书提供。“网络综合原理”与“数字滤波器”两书是无线电技术专业网络理论选修课的一对姐妹篇教材。

本书共分七章，第一、二章属于离散时间系统的基础理论，主要是差分方程、 z 变换以及离散傅里叶变换。第三章讨论用差分方程确定数字滤波器的结构。第四、五、六三章则是本书的重点，包括数字滤波器的理论和设计，以及快速傅里叶变换两部分内容。最后第七章，讨论数字化处理所引起的误差和精度问题，这是数字滤波器实际设计时必须掌握的一个问题。通过这七章的内容，尽可能使读者对数字滤波器理论的全貌有初步的了解。本书也可作为“数字信号处理”课程的基础教材。

本教材按45学时编写，但是考虑到选修课的特点，教材在选用上可以有很大的自由。如读者已在“电路、信号与系统”等课程中学过 z 变换理论，则可以跳过第一章，直接从第二章开始。如果读者没有学过统计分析基础，可以略去最后一章。如果学时紧张，也可以只选二、三、四、五等四章的内容，并略去有*号的章节，这样可以构成一个30学时的课程。所有这些取舍，都不会影响课程的系统性和连贯性。

本书力求深入浅出，读者只要熟悉傅氏变换、拉氏变换以及滤波器的初步常识，即可自学。因此，本书也可作为从事数字化技术的工程技术人员的一本自修读物。

本书由北京邮电学院王德隽副教授、南京邮电学院欧阳珉副教授主审。两位老师对本书的编写给予了热情的支持，并提出了许多宝贵意见，在此谨向他们表示深切谢意。同时也向参加审阅的北京邮电学院一系网络理论教研室以及西安交大电工原理教研室的同志们表示感谢。

限于编者水平，书中定有不少错误和不妥之处，希望广大读者以及授课教师对此提出宝贵意见，予以批评指正。

编 者

1979年3月于西安交通大学

目 录

绪 论	1	的设计方法	101
第一章 离散时间系统与 z 变换	4	§ 5.1 线性相位 FIR 滤波器的特点	101
§ 1.1 采样	4	§ 5.2 窗口法	107
§ 1.2 离散时间信号——序列	10	§ 5.3 频率采样法	115
§ 1.3 离散时间系统与差分方程	14	* § 5.4 FIR 滤波器最优设计概述	118
§ 1.4 z 变换	18	§ 5.5 IIR 与 FIR 滤波器的比较	121
§ 1.5 z 变换的定律和特性	28	习 题	122
§ 1.6 拉氏变换、傅氏变换与 z 变换	35	第六章 快速傅里叶变换 (FFT)	124
§ 1.7 系统函数	38	§ 6.1 DFT 运算的特点	125
习 题	48	§ 6.2 按时间抽取	126
第二章 离散傅里叶变换 (DFT)	53	§ 6.3 按频率抽取	133
§ 2.1 离散傅里叶级数 (DFS)	53	§ 6.4 IDFT 的运算方法	136
§ 2.2 离散傅里叶变换 (DFT)	56	* § 6.5 任意基数的算法	137
§ 2.3 频率采样理论	66	* § 6.6 实序列的运算	140
习 题	69	§ 6.7 快速卷积	142
第三章 数字滤波器的结构	72	习 题	149
§ 3.1 数字滤波器的结构特点与表示方法	72	* 第七章 量化效应与有限字长效应	152
§ 3.2 IIR 滤波器的结构	74	§ 7.1 二进制算法基础	152
§ 3.3 FIR 滤波器的结构	79	§ 7.2 A/D 变换的量化效应	159
习 题	83	§ 7.3 定点制运算中的有限字长效应	163
第四章 无限长单位脉冲响应 (IIR) 滤波器的设计方法	85	§ 7.4 浮点制运算中的有限字长效应	169
§ 4.1 IIR 滤波器设计的特点	85	§ 7.5 系数量化对零、极点位置的影响	171
§ 4.2 脉冲响应不变法	86	§ 7.6 系数量化影响的统计分析	176
§ 4.3 双线性变换法	90	习 题	179
§ 4.4 原型变换	92	参考文献	183
习 题	99		
第五章 有限长单位脉冲响应 (FIR) 滤波器		其中标有 * 的章节是供选修时考虑略去的	

绪 论

数字滤波器是处理数字信号的滤波器，是最近十几年来迅速发展起来的一门新技术和新学科，它在理论上和实践上都具有重大的意义。数字滤波器理论正在网络与滤波器理论中占有越来越重要的地位。

过去，在传统的网络综合与滤波器理论中，习惯上只是应用连续时间信号（或模拟信号）。但是近代，由于数字计算机的广泛应用和大规模集成技术的高度发展，电子技术各领域中，正日益广泛地采用离散时间信号（或数字信号）以及数字技术，因而逐渐形成了一门新的学科，这就是“数字信号处理”。数字滤波器正是数字信号处理中的基础部分。

为了对“数字信号处理”有一个大致的轮廓概念，我们先从模拟信号的数字化处理谈起。模拟信号的数字化处理就是先将模拟信号转变为数字信号，然后用数字技术进行加工，最后再还原为模拟信号的处理过程。图 0-1 表示了这样一个系统的方框图。这种系统也称为采样信号处理系统。模拟输入信号 $x_a(t)$ 首先要通过采样器和模/数(A/D)变换器转变为数字信号，这里，采样器每隔 T 秒采集一次输入信号的幅度，并将它存放在 A/D 变换器的保持电路中。经过采样以后的信号称为“离散时间信号”，它只表达时间轴上一些离散点（ $0、T、2T、\dots nT、\dots$ ）上的信号值，这些值为 $x_a(0)、$

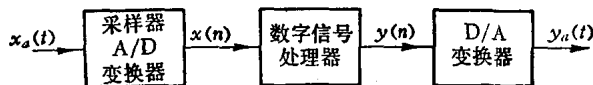


图 0-1 采样信号处理系统简单方块图

$x_a(T)、\dots x_a(nT)$ ，如图 0-2(b)。因此，离散时间信号就是指一组特定时间下表达信号数值的函数，采样过程也就是对模拟信号的时间取量化的过程。

A/D 变换器的功能则是将保持电路中的采样信号电平进一步转换成数字，一般都是采用二进制数码。由于数码的长度总是有限的，因而这些数码所能代表的信号幅度就有一定限制。例如每个数字用 5 位二进制码表示吧，那么只能表达 $2^5=32$ 种不同的信号幅度，这些幅度称为量化电平。当离散时间信号的幅度不同于量化电平时，就必须以最相近的一个量化电平来近似。因而，经过 A/D 转换后，信号在幅度上也量化了，这种信号称为“数字信号”。数字信号代表的是时间和幅度上都量化以后的信号，它本质上只是一序列的“数”，而每个数则是用有限个数码来表示的。

数字信号序列我们用 $x(n)$ 来表示，自变量 n 是一个整型变量，它表示这个数在序列中的次序位置。为了形象起见，总是用一根线段来表示其数值的大小，如图 0-2(c) 所示。数字信号序列 $x(n)$ 经过数字处理器按一定的要求加工以后，转变为另一组输出序列 $y(n)$ ，然后再在数/模(D/A)变换器中，将数码反过来转换成模拟电压（或电流），这些电压在时间点 $0、T、2T\dots$ 上的幅度，应该等于序列 $y(n)$ 中相应数码所代表的大小。最后通过一定的滤波器，滤去这些模拟电量中不需要的一些高频成分，就得到系统所需要的输出，这就是模拟信号 $y_a(t)$ ，如图 0-2(d)(e) 所示。

实际上一个系统并不一定都需要图 0-1 中所有的三个部分的，很多系统就不需要最后

的 D/A 变换，终端可以直接以数字形式打印，或用数码管显示，例如雷达和声纳系统，最终可以直接显示目标的方位、距离等参数。另外有一些系统，其本身的输入就是数字量，这样，开始的 A/D 变换当然也就不需要了，这种系统有时也称为纯“数字系统”。

从图 0-1 我们可以看到，最核心的部分是数字信号处理器。数字信号处理的目的是对信号进行过滤，也可能是进行预测或参量估值等等，所有这些都需靠一定的数字滤波器来完成。数字滤波器的输入是一个数字序列，输出是另一个数字序列，所以本质上说，数字滤波器只是一个序列的运算加工过程。数字滤波器用来完成这种运算的基本功能部件是存储单元（包括存储器、移位寄存器等）、相加器、乘法器等数字硬件，以及用来指挥它们工作的控制设备等。

与模拟信号的滤波器比较起来，数字滤波器具有以下一些突出的优点：

(1) 精度高：我们知道在模拟网络中，元器件精度要达到 10^{-8} 以上已经不容易了，而数字系统 17 位字长可以达到 10^{-5} 的精度，这是很平常的。因此，在很多高精密的系统和测量中，数字技术是很有效的工具，甚至有时只有采用数字技术，否则不可能达到精度要求。

(2) 可靠性高：模拟系统中各种参数都有一定的温度系数，都随环境条件而变化，并且容易出现感应、杂散效应甚至振荡等，而数字系统受这些因素的影响要小得多。

(3) 灵活性高：一个数字系统的性能主要是由乘法器的各系数决定的，而这些系数是存放在系数存储器中，只要对这些存储器输入不同的

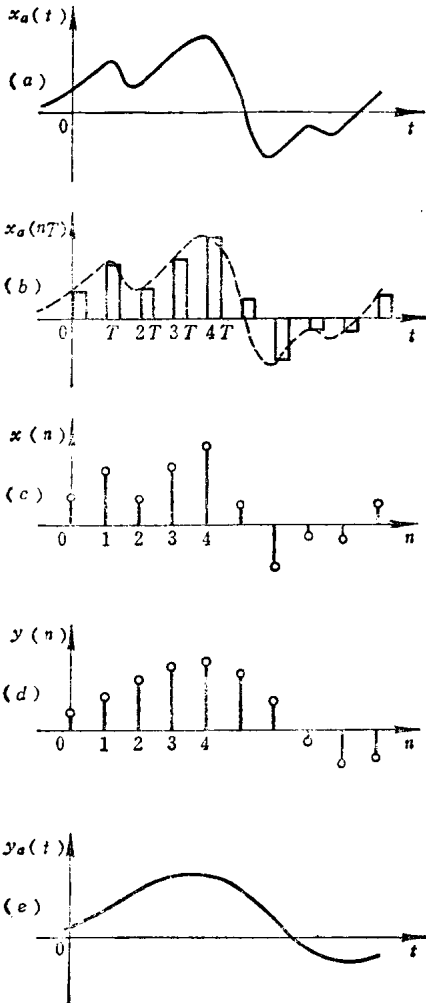


图0-2 采样信号处理过程

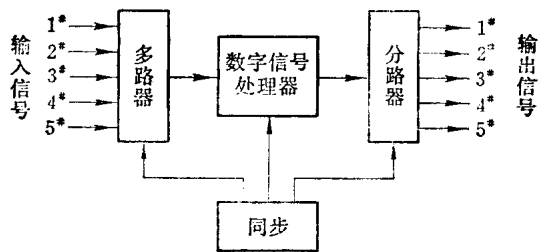


图0-3 时分多路数字信号处理系统

数据，就可以随时改变系统的参数，从而得到不同的系统，这对实验研究来说尤其便利。

数字处理的一个重大优点，是它可能利用一套计算设备同时处理几路独立的信号，这就是“时分”应用，它的方框图如图 0-3。当各路输入信号分别输入一序列值时，同步系统控制它们在时间上前后错开，并依次进入处理器，处理器在算完一路的结果以后，再算第二路的结果，在各路输入信号输入第二个序列值以前，处理器已将各路信号算完一遍，并将结果分别送给了各路输出，因此对于每一路信道来说，都好像是单独占用着处理器

一样。处理器的运算速度越高，它所能同时处理的信道也越多，因而功能也越灵活。

就是在处理器内部，一节滤波器也可以复用，例如将每个输入序列循环通过它三次，这样，这一节滤波器的作用就可以等效一个三节级联的高阶滤波器，从而节省了硬件，降低了成本，扩大了功能。

(4) 便于大规模集成：数字部件具有高度规范性，便于大规模集成、大规模生产，没有模拟网络中各种电感器、电容器及其它各种非标准件。特别是对低频信号，如在遥测中或地震波分析中，需要过滤数赫或数十赫的信号，用模拟网络处理时，电感器、电容器的数值和体积都将大到惊人的程度，甚至不可能获得很好的选择性。这时采用数字滤波器就将特别显示出体积、重量和性能的优越性来。

(5) 数字滤波器可以获得有限长的单位脉冲响应，可以很容易的实现准确的线性相位的滤波器响应，这些用模拟网络都是很难实现的。

(6) 多维过滤：数字系统的一个重大特点是可以具备庞大的存储单元。因而可以将一帧或数帧的图象信号存储起来，实现对图象信号的二维滤波或者帧间过滤。

数字滤波器当然也有自己的缺点和局限性。目前，一般说，数字系统的速度还不算高，A/D 变换器、采样器、以及逻辑硬件的速率目前也只在几十兆赫以下，因而还不能处理很高频率的信号。另外，目前数字滤波器的设计和结构还比较复杂，价格尚昂贵，因此对于一般要求不太高的简单系统来说，还不便于采用。

目前，数字滤波器和数字信号处理已经应用在地震法勘探、地震测报、雷达、声纳、通讯、语言的分解与合成、空间技术、高空摄影、遥感、生物医疗以及电视等许多方面。并且随着大规模集成技术的进一步发展，它的运用还将与日俱增，越来越广泛，越来越普及。

第一章 离散时间系统与 z 变换

数字滤波器以至数字信号处理系统的分析可以分作两步来进行。第一步是离散时间信号及离散时间系统理论，也即本章及下一章的内容，它的研究对象是仅仅在时间上量化的信号，幅度上则认为没有误差的，这个理论是数字滤波器和数字系统分析、设计的基础。第二步，再考虑幅度上量化以及运算过程中数字表达精度有限所造成的影响，这部分内容将放在最后一章去讨论。

§ 1.1 采 样

从前面绪论中，我们已经看到，采样是由连续时间信号到离散时间信号的过渡桥梁，采样可以看作信号的数字化处理的第一个环节。因此，首先应该考察一下，信号经过采样以后，将发生一些什么变化？例如，信号频谱将发生怎样变化，信号内容会不会有丢失，以及反变换应该怎样进行，即由离散信号恢复成连续信号应该具备那些条件。采样的这些性质对离散信号和系统的分析都是十分重要的，要了解这些性质，让我们首先从采样过程的分析开始。

采样器一般由电子开关组成，它的工作原理可由图 1-1(a)来说明，开关每隔 T 秒短暂地闭合一次，将连续信号接通，实现一次采样。如果开关每次闭合的时间为 τ 秒的话，那么采样器的输出将是一串重复周期为 T ，宽度为 τ 的脉冲。而脉冲的幅度，却是重复着在这段 τ 时间内信号的幅度。如果我们以 $x_a(t)$ 代表输入的连续信号如图 1-1(b)，以 $x_p(t)$ 表示采样输出信号，它的结构就如图 1-1(d) 所示。显然，这个过程我们可以把它看作是一个脉冲调幅的过程。被调的脉冲载波，是一串周期为 T 、宽度为 τ 的矩形脉冲信号，如图 1-1(c)，并以 $P(t)$ 表示，而调制信号就是 (d)

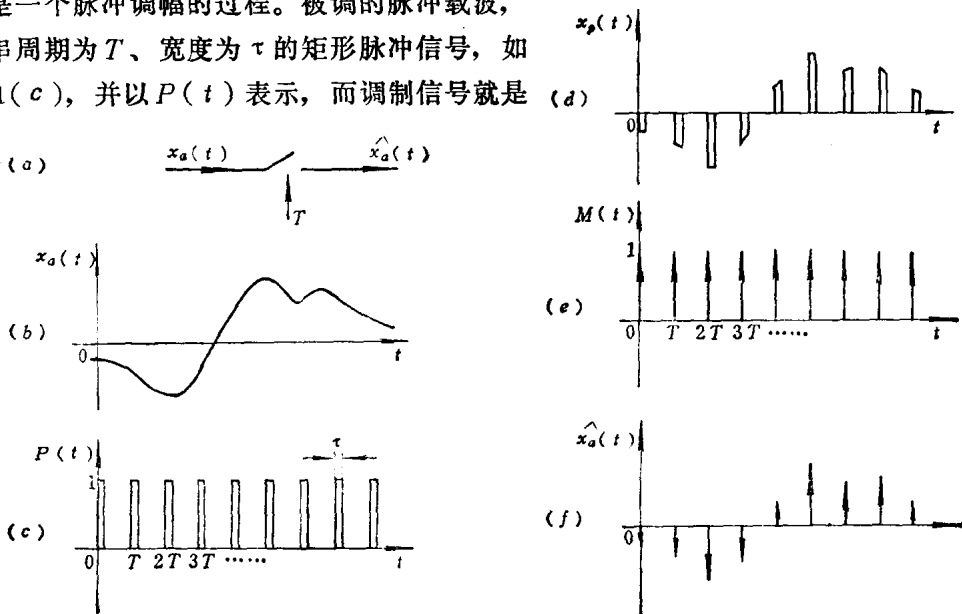


图1-1 采样过程

输入连续信号, 也就是说

$$x_p(t) = x_a(t) \cdot P(t)$$

一般开关闭合时间 τ 都是很小的, 而且 τ 越小, 采样输出脉冲的幅度就越准确地反映输入信号在离散时间点上的瞬时值。当 $\tau \ll T$ 时, 采样脉冲就接近于 δ 函数的性质。下面我们引入一个重要的概念。

理想采样

理想采样就是假设采样开关闭合时间无限短, 即 τ 趋于零的极限情况。这时采样序列将表示为一个冲激函数的序列, 这些冲激函数准确的出现在采样瞬间, 而它的面积 (即积分幅度) 则准确地等于输入信号在采样瞬间的幅度, 如图 1-1(f) 所示。换句话说, 理想采样也可以看作是对冲激脉冲载波的调幅过程。我们以 $M(t)$ 表示这个冲激脉冲载波, 如图 1-1(e),

$$M(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1-1)$$

以 $\hat{x}_a(t)$ 表示理想采样的输出, 以后我们都以下标 a 表示连续信号 (或称模拟信号), 如 $x_a(t)$; 而以它的顶部符号 ($\hat{}$) 表示它的理想采样, 如 $\hat{x}_a(t)$ 。这样我们就可以将理想采样表达为

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot M(t) \quad (1-2)$$

代入 (1-1) 式则

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT) \quad (1-3)$$

但是对于 $\delta(t - nT)$ 来说, 只在 $t = nT$ 时非零, 因此

$$x_a(t) \delta(t - nT) = x_a(nT) \delta(t - nT)$$

因此 (1-3) 式又可表达为

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \quad (1-4)$$

在实际采样器中, 任何开关都不能达到宽度为零的极限情况。但是当 τ 远远小于 T 时, 实际采样器就很接近于一个理想采样器了。理想采样可以看作是实际采样的一种科学的本质的抽象, 它可以更集中地反映采样过程的一切本质的特性。在以后的叙述中, 我们还将看到, 理想采样的概念对 z 变换来说, 是相当重要的。

下面我们来分析理想采样的一些重要特性。

频谱的周期延拓

我们首先看看通过理想采样后信号频谱发生什么变化。设输入信号的傅里叶变换为 $X_a(j\Omega)$, 即

$$X_a(j\Omega) = \mathcal{F}[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (1-5 a)$$

$$x_a(t) = \mathcal{F}^{-1}[X_a(j\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (1-5 b)$$

以 $\hat{x}_a(j\Omega)$ 表示理想采样 $\hat{x}_a(t)$ 的傅里叶变换

$$\hat{x}_a(j\Omega) = \mathcal{F}[\hat{x}_a(t)] = \mathcal{F}[x_a(t) \cdot M(t)] \quad (1-6)$$

现在就来分析 $\hat{x}_a(j\Omega)$ 与 $X_a(j\Omega)$ 的关系。我们先看冲激序列 $M(t)$ 是以采样频率重复的冲

激脉冲, 因此是一个周期函数, 我们可以用傅氏级数来表达它

$$M(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{jm\Omega_s t}$$

级数的基频也就是采样频率

$$\Omega_s = 2\pi/T$$

(一般称 $f_s = \frac{1}{T}$ 为频率, 称 $\Omega_s = 2\pi f_s$ 为角频率, 两者差别只是单位不同, 习惯上都统称为“频率”, 它们的区别由符号 f 及 Ω 来识别), 根据傅氏级数的知识, 我们知道系数 a_m 可以通过以下运算来求得

$$a_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} M(t) e^{-jm\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-jm\Omega_s t} dt$$

在 $|t| \leq \frac{T}{2}$ 的积分区间内, 只有一个冲激脉冲 $\delta(t)$, 其他冲激 $\delta(t - nT)$, $n \neq 0$ 都在积分区以外, 因此

$$a_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jm\Omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

$$M(t) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\Omega_s t} \quad (1-7)$$

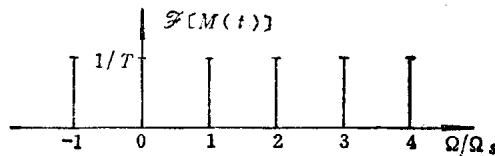


图1-2 $M(t)$ 的梳状谱

(1-7) 式表明冲激序列 $M(t)$ 具有梳状谱的结构, 即它的各次谐波都具有相等的幅度 $\frac{1}{T}$, 如图 1-2 所示。将 (1-7) 式代入 (1-6) 式

$$\begin{aligned} \hat{x}_a(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) M(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\Omega_s t} e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j(\Omega - m\Omega_s) t} dt \end{aligned}$$

根据 (1-5 a) 式 $\int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j(\Omega - m\Omega_s) t} dt = X_a(j\Omega - jm\Omega_s)$

因此
$$\hat{x}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jm\Omega_s) \quad (1-8)$$

或者
$$\hat{x}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\Omega - jm\frac{2\pi}{T}\right) \quad (1-9)$$

(1-8) 式清楚地表明, 一个连续信号经过理想采样以后, 它的频谱将延着频率轴, 从 $\Omega = 0$ 开始, 每隔一个采样频率 Ω_s 重复出现一次 (当然还要乘以一个常数 $\frac{1}{T}$), 即频谱产生周期延拓。如图 1-3 所示, 理想采样信号的频谱是频率的周期函数, 它的频域周期等于采样频率 Ω_s 。这种频谱周期性重复的现象我们也可以从脉冲调制的角度得到解释。由于脉冲序列 $M(t)$ 具有相等大小的各阶谐波分量, 如图 (1-2) 所示, 因而当 $M(t)$ 被 $x_c(t)$ 调幅以后, $x_s(t)$ 的频谱就被调制到 $M(t)$ 的各阶谐波上, 出现基带的频谱搬移。 $\hat{X}_s(j\Omega)$ 正是这些调制频谱的总和。

从图 1-3 我们可以看到, 如果信号 $x_c(t)$ 是带限信号, 并且最高频谱不超过 $\Omega_s/2$, 即

$$X_s(j\Omega) = \begin{cases} X_c(j\Omega), & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} \end{cases} \quad (1-10)$$

那么理想采样频谱中, 基带频谱以及各次谐波调制频谱彼此是不重叠的。如果用一个带宽为 $\frac{\Omega_s}{2}$ 的理想低通滤波器, 是可以将它各次调制频谱滤掉, 从而只保留不失真的基带频谱, 也就是说, 可以不失真的还原出原来的连续信号来。

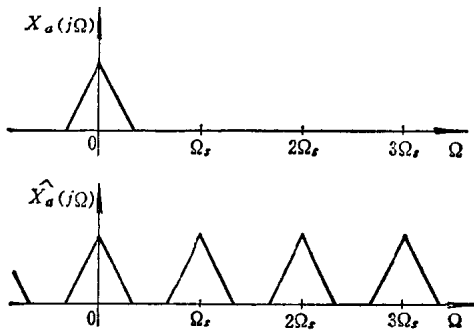


图1-3 频谱的周期延拓

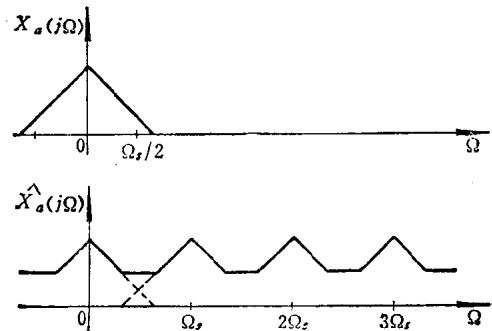


图1-4 频谱的混淆

但是, 如果信号最高频谱超过 $\Omega_s/2$, 那么在理想采样频谱中, 各次调制频谱就会互相交叠起来, 这就是频谱“混淆”现象, 如图 1-4 所示。当然一般 $X_s(j\Omega)$ 是复数, 因此交叠也是复数相加。为了简明起见, 在图 1-4 中我们将 $X_s(j\Omega)$ 作为标量来处理。出现频谱混淆以后, 一般就不可能无失真的滤出基带频谱, 因而恢复出来的信号就要失真了。

因此, 采样频率的一半 $\frac{\Omega_s}{2}$ 也称为折叠频率, 因为它好象一面镜子, 信号频谱超过它时, 就会被折叠回来, 造成频谱的混淆。

从这里我们可以得到一个结论: 为使信号采样后能够不失真还原, 采样频率必须大于两倍信号最高频谱, 这就是奈奎斯特采样定理。

一般实际工作中, 为了避免频谱混淆现象发生, 采样频率总是选得比两倍信号最高频谱更大些, 例如选到三倍至四倍。同时为了避免高于折叠频率的杂散频谱进入采样器造成频谱混淆, 在采样器以前常常加一个保护性的前置低通滤波器, 阻止一切高于 $\Omega_s/2$ 的频率分量进入, 如图 1-5 所示。

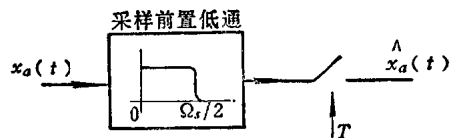


图1-5 用前置低通滤波器来防止频谱混淆的产生

前面我们已经看到,任何具体的采样都可看作是一个脉冲调幅过程,因而都会产生采样频率各次谐波上的调制频谱,只是各次谐波上的频谱幅度不象理想采样那样都是相等罢了,因而频谱的周期延拓和奈奎斯特定律对所有采样器的工作都是普遍成立的。

最后,这些关系也同样反映在采样过程的拉氏变换上。若以 $X_a(s)$ 表示模拟输入信号 $x_a(t)$ 的拉氏变换[●],即

$$\left\{ \begin{aligned} X_a(s) &= \mathcal{L}[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-st} dt, \quad c_1 < \operatorname{Re}\{s\} < c_2 \\ x_a(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_a(s) e^{st} ds, \quad c_1 < c < c_2 \end{aligned} \right. \quad (1-11)$$

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_a(s) e^{st} ds, \quad c_1 < c < c_2 \quad (1-12)$$

若以 $\hat{x}_a(s)$ 表示理想采样 $\hat{x}_a(t)$ 的拉氏变换,则

$$\hat{x}_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) M(t) e^{-st} dt \quad (1-13)$$

代入 $M(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$, 并将积分号与求和号对调

$$\hat{x}_a(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t-nT) e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-nsT} \quad (1-14)$$

(1-14)式表示了采样值 $x_a(nT)$ 与拉氏变换 $\hat{x}_a(s)$ 的关系。将级数表达式 $M(t) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\Omega_s t}$

× $e^{jm\Omega_s t}$ 即 (1-7)式代入,并改变积分与求和的次序,则

$$\hat{x}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{(jm\Omega_s t - st)} dt$$

并考虑到 (1-11) 式

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-(s-jm\Omega_s)t} dt = X_a(s-jm\Omega_s)$$

因此

$$\hat{x}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(s-jm\Omega_s) \quad (1-15)$$

(1-15)式表示了理想采样后使信号的拉氏变换在 s 平面上沿虚轴周期延拓,也即 $\hat{x}_a(s)$ 在 s 平面的虚轴上是周期函数。

● 这里所引用的拉氏变换是双边拉氏变换,它与单边拉氏变换的主要区别是

(1) 在时域上,双边变换处理的信号不受限制,单边变换只处理单边的时间函数或称因果信号。即

$$x'_a(t) = \begin{cases} x_a(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

单边变换为

$$X'_a(s) = \int_0^{\infty} x'_a(t) e^{-st} dt$$

(2) 频域上,双边变换收敛于 S 平面上 $c_1 < \operatorname{Re}\{s\} < c_2$ 的一条垂直带域内,单边变换则收敛于 s 平面上 $\operatorname{Re}\{s\} > c_0$ 的右半平面上,详细内容请参阅其他信号分析的教材。

采样的恢复

如果理想采样满足奈奎斯特定律，即信号最高频谱不超过折叠频率

$$X_a(j\Omega) = \begin{cases} X_a(j\Omega), & |\Omega| < \Omega_s/2 \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_s/2 \end{cases}$$

那么理想采样后的频谱就不会产生混淆，即

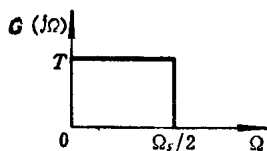
$$\hat{x}_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jm\Omega_s)$$

$$\hat{x}_s(j\Omega) = \frac{1}{T} X_a(j\Omega), \quad |\Omega| < \Omega_s/2$$

这样，我们可以将采样信号 $\hat{x}_s(t)$ 通过一个理想低通滤波器，这个理想低通应该只让基带频谱通过，因而其带宽应该等于折叠频率，它的特性

如图 1-6 所示

$$G(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \Omega_s/2 \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_s/2 \end{cases}$$



采样信号通过这个滤波器后，就可滤出原信号频谱来

$$Y(j\Omega) = \hat{x}_s(j\Omega) G(j\Omega) = X(j\Omega)$$

因此在输出端可以得到恢复的原模拟信号

$$y(t) = x_a(t)$$

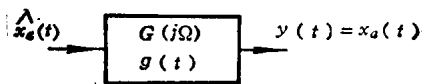


图1-6 采样的恢复

当然，一个理想低通滤波器是不可能实现的，但是总可以在一定精度上，用一个可实现网络去逼近它。

采样内插公式

我们再来看一下采样信号 $\hat{x}_s(t)$ 通过 $G(j\Omega)$ 的响应过程。理想低通 $G(j\Omega)$ 的冲激响应为

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$= \frac{\sin \frac{\Omega_s}{2} t}{\frac{\Omega_s}{2} t} = \frac{\sin \frac{\pi}{T} t}{\frac{\pi}{T} t}$$

根据卷积公式，低通的输出为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_s(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(\tau) \delta(\tau - nT) \right] g(t - \tau) d\tau$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau) g(t - \tau) \delta(\tau - nT) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) g(t - nT)$$

这里 $g(t - nT)$ 称为内插函数

$$g(t-nT) = \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \quad (1-16)$$

它的波形如图 1-7 所示, 其特点为: 在采样点 nT 上, 函数值为 1, 其余采样点上, 函数值都为零。

由于 $y(t) = x_a(t)$, 因此以上卷积结果也可表示为

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \quad (1-17)$$

(1-17) 式称为采样内插公式, 它表明了连续函数 $x_a(t)$ 如何由它的采样值 $x_a(nT)$ 来表达, 即 $x_a(t)$ 等于 $x_a(nT)$ 乘上对应的内插函数的总和。如图 1-8 所示, 在每一个采样点上, 由于只有该采样值所对应的内插函数不为零, 所以很明显, (1-17) 式保证了各采样点上信号值不变。而采样点之间的信号则是由各采样值内插函数的波形伸延叠加而成。这也正是理想低通滤波器 $G(j\Omega)$ 中的响应过程。

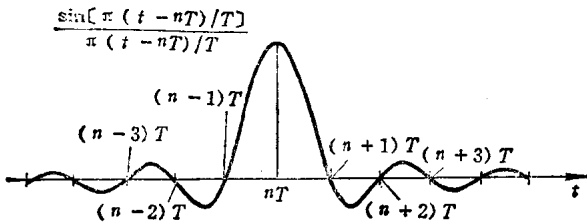


图1-7 内插函数

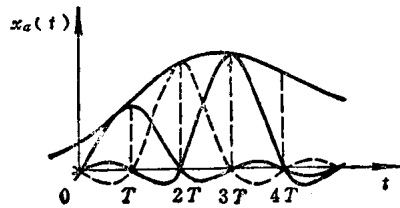


图1-8 采样内插恢复

(1-17) 式内插公式的理论意义在于证明了: 只要满足采样频率高于两倍信号最高频谱, 整个连续信号就可以用它的采样值完全代表, 而不致损失任何信息。这就是奈奎斯特定律的具体内容。

§ 1.2 离散时间信号——序列

前面我们看到通过采样可以得到离散时间信号。但是离散时间信号也可以不是采样信号, 例如有些系统的输入可能直接就是离散时间信号或者是数字信号。另外在信号处理过程中, 系统内部也经常需要产生一些数字信号, 这些都是离散时间信号, 但不属于采样信号, 因此更确切的说, 离散时间信号是时间上不连续的一个序列。在采样信号的表示中, 我们以等间隔的时间 (nT) 作为信号的宗量, 表明了这些信号是在这些离散的时间点上出现的。但是这些时间表示法在以后的信号加工过程中就不一定非常必要, 因为在加工过程中, 信号储存在存储器中, 可以随时取用它, 甚至可以把它的时间顺序颠来倒去都可以, 只有在需要将数字信号最终还原为连续信号输出时, 在 D/A 变换器中才有必要重新将它们排列在等间隔的时间上。在很多情况下, 信号处理是非实时的, 例如地震信号分析、遥感信号的分析等, 都是先记录、后分析, 几秒钟的记录可能要几分钟甚至几小时才能分析完。所以, 对于处理离散时间信号来说, 往往可以不必以 nT 作为变量, 而直接以 $x(n)$ 表

示离散时间信号序列。 n 就是表示它们在序列中前后位置的序号，是一个整数，一个离散信号就是一个序列值的集合 $\{x(n)\}$ 。由采样产生的序列常称为采样序列，这时

$$x(n) = x_a(nT)$$

用作图表示序列时，为了直观起见，仍然以一根线段的长短表示序列值的大小。有时也将它们的端点连接起来，以便更确切看出序列值之间的关系，如下面的图 1-13, 1-14。

在数字信号处理中常常要遇到序列的相加、相乘以及延时，例如，如果 $\{x(n)\}$ 、 $\{y(n)\}$ 两个序列的数值为

$$\begin{array}{ll} x(0) = 1.00 & y(0) = 1.00 \\ x(1) = 0.95 & y(1) = -1.00 \\ x(2) = 0.90 & y(2) = 1.00 \\ x(3) = 0.85 & y(3) = -1.00 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$z(n) = x(n) + y(n)$ 表示这两个序列的相加，它是指两序列值逐项相加所形成的一个新序列 $\{z(n)\}$

$$\begin{array}{l} z(0) = x(0) + y(0) = 2.00 \\ z(1) = x(1) + y(1) = -0.05 \\ z(2) = x(2) + y(2) = 1.90 \\ z(3) = x(3) + y(3) = -0.15 \\ \vdots \end{array}$$

序列相乘 $f(n) = x(n)y(n)$ ，是指两序列值逐项相乘所形成的一个新序列 $\{f(n)\}$

$$\begin{array}{l} f(0) = x(0)y(0) = 1.00 \\ f(1) = x(1)y(1) = -0.95 \\ f(2) = x(2)y(2) = 0.90 \\ f(3) = x(3)y(3) = -0.85 \\ \vdots \end{array}$$

序列延时 $w(n) = x(n-2)$ ，是指原序列逐项依次延时两位所形成的一个新序列 $\{w(n)\}$

$$\begin{array}{l} w(2) = x(2-2) = x(0) = 1.00 \\ w(3) = x(3-2) = x(1) = 0.95 \\ w(4) = x(4-2) = x(2) = 0.90 \\ w(5) = x(5-2) = x(3) = 0.85 \\ \vdots \end{array}$$

如图 1-9 所示。序列延时也称为序列移位，其一般形式为 $w(n) = x(n-m)$ ，它表示 $x(n)$ 序列向后移 m 位。也可以向前移位， $w(n) = x(n+m)$ 表示 $x(n)$ 序列向前移 m 位。

下面我们介绍几种最常用的典型序列。

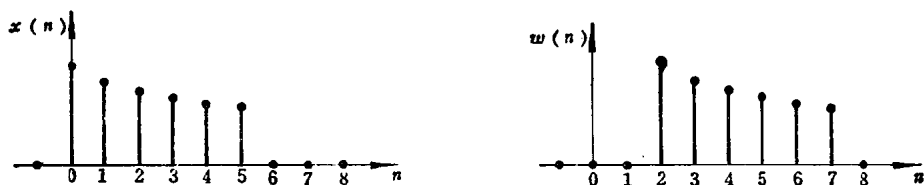


图1-9 序列的延时

(1) 单位脉冲序列

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

这个序列只在 $n = 0$ 处有一个单位值 1，其余点上皆为 0，因此也称为“单位采样序列”。我们在以后将会看到，这是最常用、最重要的一种序列。它在离散时间系统中的作用，很类似于连续时间系统中单位冲激函数 $\delta(t)$ 所起的作用。但是，在连续时间系统中， $\delta(t)$ 的脉宽为零，幅度为 ∞ ，完全是一种数学的极限，并非任何现实的信号。而离散时间系统中的 $\delta(n)$ ，却完全是一个现实的序列，它的脉冲幅度是 1，是一个有限值。

(2) 单位阶跃序列

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

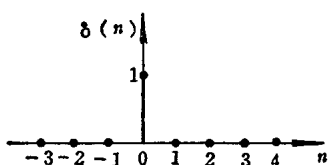


图1-10 $\delta(n)$ 序列

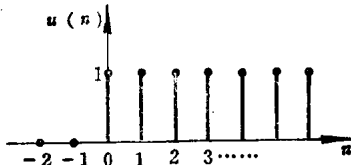


图1-11 $u(n)$ 序列



图1-12 $R_N(n)$ 序列

它很类似于连续时间信号中的单位阶跃脉冲。

(3) 矩形序列

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0, n \geq N \end{cases}$$

它从 $n = 0$ 开始，含有 N 个幅度为 1 的数值，其余都为零。不难看出以上三个序列彼此间有以下关系

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N)$$

(4) 指数序列

$$x(n) = a^n u(n)$$

即

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

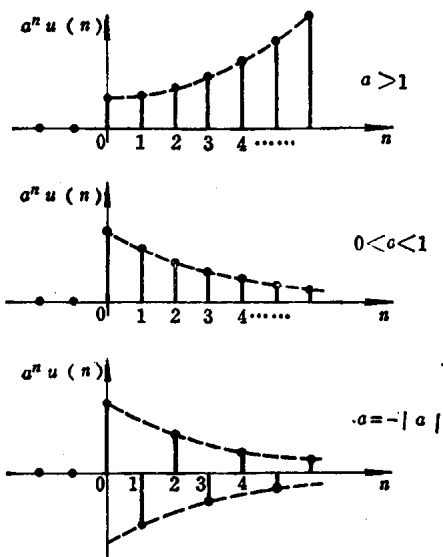


图1-13 指数序列