《自动化基础知识丛书》

# 自动控制中的基础数学

## ——线性代数与矩阵理论

王厦生 编著

$$\begin{cases} A = BC \\ A^{+} = C^{H}(CC^{H})^{-1}(B^{H}B)^{-1}B^{H} \end{cases}$$

$$e^{At} = ?$$

$$\mathrm{ranK}(B, AB, \cdots, A^{n-1}B) = ?$$

$$(A-BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(CA^{-1}B-D)^{-1}CA^{-1}$$

$$Im\,\mathcal{A} + \ker\mathcal{A} = C^{n}?$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

科 学 出 版 社

自动化基础知识丛书

# 自动控制中的基础数学

## ——线性代数与矩阵理论

王厦生编著



科学出版社
1987

DU2/C6

# 内 容 简 介

现代控制理论的研究对象是多变量系统，使用时域法或状态变量法，其数学工具除拉氏变换、微分方程、差分方程、概率论与数理统计外，还需要具备线性代数和矩阵理论方面的知识.

本书介绍了线性代数与矩阵理论的基本知识，这些知识是从事自动化理论研究和实际应用工作的同志所必备的，也是阅读本套丛书所必备的数学基础。本书以比较直观和容易掌握的初等变换为主线，用以证明各个定理和解决计算问题，内容由浅入深，循序渐进，就是对数学基础较差的同志来说，读来也不会有多大困难.

本书是《自动控制中的基础数学》中的第二册，另两册《微分方程与差分方程》、《概率论与数理统计》亦由我社出版.

本书可供从事自动化实际应用工作的同志参考，也可供对自动化技术感兴趣的电大、业大、中专、中技学生，自学成材人员，工人技术员参考.

自动化基础知识丛书

自动控制中的基础数学

——线性代数与矩阵理论

王厦生 编著

责任编辑 姚平录

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987年5月第一版 开本：787×1092 1/32

1987年5月第一次印刷 印张：9 1/4

印数：0001—5,400 字数：201,000

统一书号：15031·806

本社书号：5288·15—2

定价：1.75元

# 前　言

本书是中国自动化学会和科学出版社计划编辑出版的《自动化基础知识丛书》之一.

这套丛书编辑出版的目的. 是希望在自动化的实际应用和理论研究之间搭起"桥梁", 向广大读者提供自动化科学技术基础知识和新的信息,有三方面的意图:

1. 向从事自动化实际应用工作的读者, 提供必要的理论方法和数学基础,如: 控制理论、系统仿真、系统辨识及微分方程、线性代数……等.

2. 向从事自动化理论研究工作的读者, 提供有关实际仪表、装置和系统的工程知识, 如: 检测仪表、调节器、随动系统、自寻最优控制器……等.

3. 向广大对自动化有兴趣的读者, 提供自动化科学技术的基本知识和发展动向的信息, 如: 微电脑、机器人、大系统理论、智能控制系统……等.

近四十年来,自动化科学技术日新月异,在广度和深度上都有重大进展,一方面,从单机自动化、机组自动化向车间、工厂、公司的综合自动化发展;从工程技术领域向社会经济、环境生态领域发展;从小系统的过程控制的局部最优化,向大系统的管理决策的全局最优化发展……另一方面, 从常规的自

动检测、调节与控制，向人工智能、模式识别、机器人、智能控制系统发展……等.

自动化是实现工业、农业、国防和科学技术现代化的先进手段，是实现优质、高产、低消耗、保安全的有效方法. 也是现代化社会中科学技术发达、人民生活水平提高的显著标志，自动化在国民经济各部门、社会生活各方面的广泛应用，将人们从繁重的体力和脑力劳动中，从危险的、有害的工作环境中解放出来，大大扩展了人类认识自然、改造自然的能力. 为迅速发展社会生产力，改善人民生活条件作出巨大贡献. 因此，自动化是现代化的"催化剂"，也是现代化的"显影液". 没有自动化，就没有现代化.

我们期望，《自动化基础知识丛书》的编辑出版，能为广大读者提供一个有用的自动化科学技术知识库，为我国的现代化建设服务.

《自动化基础知识丛书》编委会

# 序

在工程技术上，通常把五十年代前后建立起来的自动化理论称为经典控制理论．其研究对象一般是单变量系统，主要采用频域法，而其基本的数学模型是传递函数．随着现代工业的发展，特别是空间科学的突飞猛进，对控制系统提出了愈来愈高的要求，经典控制理论已经不可能完全满足这些新的要求了．这样，在六十年代前后逐渐发展和形成了一种新的控制理论，通常称为现代控制理论或第二代控制理论．在这期间，电子计算机的发展，为这种理论的应用提供了强有力的工具．

现代控制理论的研究对象是多变量系统，使用时域法或状态变量法，其数学工具除了拉普拉斯变换外，还需要具备线性代数和矩阵理论、微分方程和差分方程以及概率论等基本知识．

现代控制理论的内容十分丰富，我们仅就定常线性系统的基本理论，粗略地看一看，其中如何应用了线性代数，特别是矩阵理论的基本知识．

现代控制理论在研究动态系统时，通常采用微分方程组（对连续系统）和差分方程组（对离散系统）来描述系统的状态．例如，图 1 是一个二级水槽的示意图．设水管 1，2，3 的

流量分别为 $q_1, q_2, q_3$；水槽甲，乙的液面高度分别为 $h_1$，$h_2$，假定当流量 $q_1 = q_2 = q_3 =$ 常数 $q_0$，阀门 $A$，$B$ 的开度分别为 $\mu_0$，$\nu_0$ 时，两水槽的液面高度处于平衡状态：$h_1 = h_1^{(0)}$，$h_2 = h_2^{(0)}$. 今设阀门 $A$，$B$ 的开度都有变化，我们可以列出阀门开度的增量 $u_1(t)$，$u_2(t)$ 和液面高度 $h_1$，$h_2$ 的增量 $x_1(t)$，$x_2(t)$的关系方程式：

$$\begin{cases} F_1 \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{x_1}{R_1} + N_1 \cdot u_1(t) \\ F_2 \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{x_1}{R_1} - \dfrac{x_2}{R_2} + N_2 \cdot u_2(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $F_1$，$F_2$ 分别为水槽甲，乙的横截面积；$R_1$，$R_2$ 为它们的液阻系数；$N_1$，$N_2$ 为比例常数.

（1）可改写成标准型式：

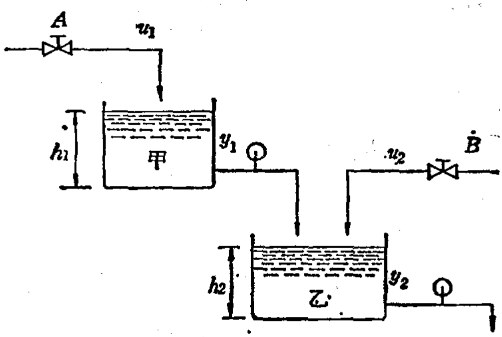


图 1 二级水槽示意图

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{x_1}{F_1R_1} + \dfrac{N_1}{F_1} u_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{x_1}{F_2R_2} - \dfrac{x_2}{F_2R_2} + \dfrac{N_2}{F_2} \cdot u_2(t) \end{cases} \quad (2)$$

设水槽甲和乙在单位时间内的流出量分别为 $y_1$ 和 $y_2$，并且可以用仪表测量，那么，很显然有

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{x_1}{R_1} \\ y_2 = \dfrac{x_2}{R_2} \end{cases} \tag{3}$$

如果开始时两个水槽都是空的，试问应如何控制阀门 $A$ 与 $B$，即如何选择流入量 $u_1(t)$ 与 $u_2(t)$，以使得这两个水槽的液面高度分别达到并保持在平衡状态：$h_1 = h_1^{(0)}, h_2 = h_2^{(0)}$，而且要求累计的流出量 $y_2$ 尽可能小。

在这个例子中，用来描述系统状态的微分方程组(2)称为状态方程；$x_1$，$x_2$ 称为状态变量；$u_1(t)$ 称为输入变量或控制变量。用来描述系统输出与状态变量、输入变量的关系式是代数方程(3)，称为输出方程。一般地说，状态变量是表示系统内部特性的变量，而输入、输出变量是描述系统外部特性的变量。状态变量不一定是可以直接测量的，而输入和输出变量通常是可以测量的。

实际系统往往要复杂得多。例如，多变量系统可能有 $n$ 个状态变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$；$m$ 个输入变量 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 和 $p$ 个输出变量 $y_1, y_2, \cdots, y_p$，而线性系统的状态方程可能有：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1m}u_m \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2m}u_m \\ \cdots\cdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{nm}u_m \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$, $i = 1, 2, \cdots, n$。而常见的输出方程可能有如下形式:

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ y_p = c_{p1}x_1 + c_{p2}x_2 + \cdots + c_{pn}x_n \end{cases} \tag{5}$$

如果我们学习了关于 $n$ 维向量和矩阵的概念,那么,用矩阵来表示,方程(4)与(5)可改写为向量矩阵形式的状态方程如下:

$$\dot{X} = AX + Bu \tag{6}$$

$$y = CX \tag{7}$$

其中

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ & \cdots\cdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{pmatrix}$$

上述的线性系统是理论上最完善，应用上最广泛的一种

系统. 为简单起见,通常简称为系统 $(A, B, C)$.

利用向量矩阵方程(6)与(7)来代替相应的方程组 (4)和(5),不但简化了数学表达方式,便于进行运算,而且便于利用矩阵的各种性质进行理论上的研究,和便于应用计算机进行处理.

人们可以从矩阵 $A$, $B$, $C$ 及其相互联系上来研究该系统的特性. 例如所谓系统的稳定性问题,为了简化起见,假定在不加任何控制的情况下(即 $u_i = 0, i = 1, 2, \cdots, m$),当初始状态 $x_i(0) = 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$,那么状态方程(6)的解显然是 $x_i(t) = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 这样的解是否稳定呢? 即当系统的初始状态 $x_i(0)$稍为偏离 0 不太大时,则在相当时刻之后,系统的状态 $x_i(t)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$. 虽偏离 0 但不致超出预先指定的范围 (称为李雅普诺夫稳定性问题). 对此问题, 我们有如下的结论: 当而且只当 $A$ 的最小多项式的根其实数部分都是负数时,则系统 $\dot{x} = AX$ 是稳定的;如果 $A$ 的特征根其实数部分都是负数,则系统也必然是稳定的.因此问题归结为求矩阵 $A$ 的最小多项式或特征多项式的根. 这是一个线性代数的问题 (关于特征多项式和最小多项式的详细叙述见正文第三章).

又如,在系统的结构理论中,要讨论系统的完全能控性和完全能观性问题. 所谓系统的完全能控性, 是指对于任意的初始时刻 $t_0$ 和初始状态 $X(t_0)$, 存在 (分段连续的) 输入向量 $u(t)$,在它的作用下,经过有限的时间间隔 $[t_0, t_f]$ 之后, 可使系统的状态 $x(t_f) = 0$. 对此, 卡尔曼证明了, 系统完全能控

的充要条件是矩阵

$(B\quad AB\cdots A^{n-1}B)$ 的秩＝状态向量的维数 $n$ 所谓系统完全能观是指，对于任意的初始时刻 $t_0$，存在有限的时间间隔 $[t_0, t_f]$，当观测到输出向量 $y(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 的变化情况之后，就能唯一地确定出在时刻 $t_0$ 的状态 $X(t_0)$. 对此，卡尔曼证明了，系统完全能观的充要条件是矩阵

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \text{的秩＝状态向量的维数 } n$$

这里我们需要有关于矩阵的分块表示和矩阵的秩的概念和计算方法.

系统的状态变量是描述系统内部特性的一组变量，通常希望这组变量的个数最少，但表示方式可以不同.这样就有一个适当选取状态变量，以便用它来描述系统时，有尽可能简明的形式，以利于研究该系统的特性. 这就是所谓系统的“标准形”问题. 在数学上，我们把这种 $n$ 维状态看作是 $n$ 维列向量空间的向量（或坐标向量）.问题就在于如何选择坐标系，使系统的状态方程有尽可能简单的形式.例如系统$(A, B, C)$在变换 $X = T\tilde{X}$ 之下（这里设矩阵 $T$ 的秩等于 $n$），状态方程变成

$$\frac{d}{dt}(T\tilde{X}) = AT\tilde{X} + Bu$$

或

$$\dot{\tilde{X}} = T^{-1}AT\tilde{X} + T^{-1}Bu$$

其中 $T^{-1}$是 $T$ 的逆矩阵. 观测方程变成

$$Y = CX = (CT)\hat{X}$$

换句话说，系统（$A$，$B$，$C$）变成了系统（$T^{-1}AT$，$T^{-1}B$，$CT$）．于是，问题是选择 $T$，使 $T^{-1}AT$ 有尽可能简明的形式．这是矩阵的"标准形"(或叫"法式")的问题．它是一个典型的线性代数问题．

例如，在用电子计算机模拟给定传递函数

$$\frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

的情况下，常用"比例-积分"环节表示的"能控标准形"实现．设第 $i$ 个积分器方框的状态为 $x_i$，则系统有如下的标准形：

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + Bu \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u \\ Y &= CX \\ &= (b_n, b_{n-1}, \cdots, b_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

这个系统是能控的，因为矩阵（$B \quad AB \cdots A^{n-1}B$）有如下形

式:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & \iddots \\ 0 & \iddots & \iddots & \\ 1 & & & * \end{pmatrix} \text{(记为 } M\text{)}$$

它的秩显然等于 $n$. 另一种用"比例-积分"环节表示的"能观标准形"实现，其系统的标准形是 $(A^T, C^T, B^T)$. 它是能观的,因为矩阵

$$\begin{pmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{pmatrix} \text{也等于} M$$

上面简略地讨论了定常线性系统的一些性质，说明这些性质的研究和线性代数有着多么密切的联系. 在系统的设计问题中情况也是如此.

在自动控制中，往往采用状态反馈的办法来改善系统的输出. 所谓状态反馈是将系统的状态变量 $X$，经过适当的处理之后，加到系统输入端. 例如，对于定常线性系统$(A,B,C)$,输入向量 $u$ 改为

$$u = U - KX \tag{8}$$

其中 $U$ 是新的输入向量，$K$ 是适当的变换矩阵. 图 2 是这种反馈的示意图.

将(8)代入状态方程 $\dot{X} = AX + Bu$, 得到

$$\dot{X} = (A - BK)X + BU \tag{9}$$

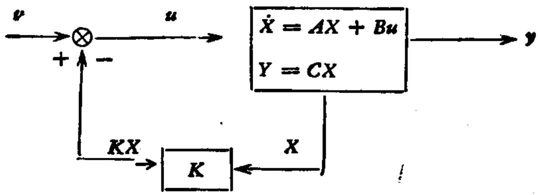


图 2 状态反馈示意图

因此,原有系统 $(A, B, C)$ 变成系统 $(A - BK, B, C)$. 设计状态反馈的问题就是选择 $K$ 改善新系统 $(A - BK, B, C)$ 的特性. 这里就需要研究上述"闭环系统"对原有系统的特性有些什么关系等一系列问题. 例如它会不会改变原系统的完全能控性? 答案是不会的. 即系统 $(A - BK, B, C)$ 完全能控的充要条件是原系统 $(A, B, C)$ 是完全能控的, 其证明可以在本书第二章中找到.

可是状态向量 $X$ 一般是不能直接测量的, 如何实现上面所说的反馈呢? 我们能不能用可以测量的系统的输入和输出变量来产生状态 $X$ 的近似值, 或者说产生与直接测量效果相当的间接"观测器"呢? 这类问题在控制论中称为"观测器"问题. 如果系统 $(A, B, C)$ 是定全能观的, 那么可适当选择 $G$ 并且构成以下式表示的

$$\begin{cases} \dot{Z} = (A + GC)Z + Bu - Gy \\ W = Z \end{cases}$$

$n$ 维状态观测器. (图 3 是采用这种观测器实现状态反馈的系统的示意图), 并且矩阵 $A + GC$ 的特征根在左半复平面内可以任意配置. 但是如果原系统不是完全能观的, 则不能

任意配置．这里也将用到矩阵的一些运算及其性质，还将涉及向量的收敛性和微分等基本概念．

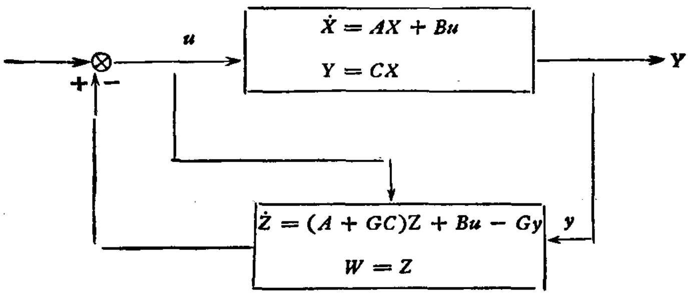


图3 用观测器实现状态反馈的系统

最优控制是现代控制理论的一个重要组成部分，它所研究的中心问题是：怎样选择控制规律，使得控制系统的特性和品质在某种意义上说是最优的．所谓“某种意义”，在数学上往往用一个或多个所谓“性能指标(目标函数)”来表示．例如，对于系统 $(A, B, C)$，常见的性能指标具有如下形式(二次型)：

$$J = \frac{1}{2} X^T(t_f)SX(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [X^T(t)Q(t)X(t) + u^T(t)R(t)u(t)]\,dt$$

其中 $S$，$Q$ 和 $R$ 都是对称矩阵．问题是如何选择控制规律 $u(t)$，$t_0 \leqslant t \leqslant t_f$，使 $J$ 达到最小．这就是著名的线性系统的“二次型”性能指标的最优控制问题．这里就需要应用“二次型”的基本理论，特别是关于“正定性”的理论．二次型理论也是线性代数的重要内容，它在系统的稳定性分析中也是很有

用的。

在本书的序中，我们不可能涉及现代控制理论的各个方面，甚至连一些基本问题，如系统辨识问题，滤波问题等等，也不可能一一涉及。但是，仅从上面提到的某些方面已经可以看出，现代控制理论和线性代数，特别是矩阵理论，有着多么密切的联系。

最后，我们必须说明，在绪言中讲到的现代控制论中的一些基本问题，对于未曾接触过控制理论的读者不一定能完全理解，不过这没有关系，因为即使如此，对于阅读本书的其他章节也不会有任何影响。同样，本书各章中的有关内容，凡涉及对控制论的应用举例部分，如果读者有困难，也可以略去而不影响阅读其他的内容。

在本书编写过程中，承蒙凃莘生和王子平同志先后提出许多宝贵意见和建议，这里一一表示谢意。

作者