

不确定度原理

刘智敏 著

中国计量出版社

TH 101
L 77

369403

国家自然科学基金资助项目

不 确 定 度 原 理

刘智敏 著



中国计量出版社

新登（京）字 024 号

内 容 提 要

本书论述了用于评价测量和认识自然界的极为重要的不确定度的概念、原理和评定方法。不确定度原理是计量、测试和科学研究的基础。本书内容包括基本概念、单变量、多变量、多维测量、动态、非正态展伸、非线性等不确定度的评定和用不确定度评定测量结果的质量的原理和方法。还论述了产品不确定度、相关系数、自由度等问题。书中论述的原理和方法，对计量和测试技术的发展有重要的意义。

该书适用于从事计量、测试的工程技术人员和科学研究人员、大专院校有关专业的师生。

不 确 定 度 原 理

刘智敏 著

责任编辑：李绍贵

中国计量出版社出版
北京和平里西街甲 2 号 (100013)
中国计量出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

开本 850×1168/32 印张 3 字数 80 千字
1993 年 6 月第 1 版 1993 年 6 月第 1 次印刷
印数 1—4000

ISBN 7—5026—0585—1/O·4

定价 2.70 元

版权所有 翻印必究

前 言

为认识自然界和改造自然界，人们对各种量进行着大量的测量工作。测量的水平高低，或者说测量的质量如何，用不确定度来评定。因此，不确定度对自然科学及科学技术的发展极为重要。

人们提出不确定度的概念可溯至1927年，但自国际计量局于1980年提出实验不确定度建议书之后，人们对不确定度的概念才逐渐明确，不确定度的使用也就逐渐扩展。随后国际标准化组织、国际电工委员会、国际计量委员会、国际法制计量组织成立了国际不确定度工作组，本书作者作为其成员，多次参加了国际不确定度指南的讨论和制定。

由于不确定度对科学技术极为重要，我国国家自然科学基金委员会确定了“不确定度原理”为研究项目，即确立为《国家自然科学基金资助项目》，并由本书作者负责该项目的研究工作，本书是该项目研究成果的总结，全书系统地介绍了不确定度的近代概念、原理和评定方法，以及不确定度的最新科研成果。

感谢国家自然科学基金委员会、中国计量科学研究院领导对这项研究工作的支持，感谢中国计量出版社李绍贵同志所作的编、校工作。

书内如有不足之处，切盼读者给予指正。

国际不确定度工作组中国成员

刘 智 敏

1992年12月于中国计量科学研究院

Principle of Uncertainty in Measurement

Liu Zhimin

The Project Supported be National

Natural Science Foundation of China

Abstract

This book is concerned with concept, theory and evaluation of uncertainty, which are very important for evaluating measurement and indentifying nature. The principle of uncertainty is the fundament of metrology, test and scientific research. This book contains basic concept, and monovariant, multivariant, multidimensional, dynamic, nonnormal expanded, nonlinear uncertainty evaluation, as well as theory, method for evaluating quanlity of measurement result by uncertainty. The product uncertainty, correlation coefficient, degrees of freedon are also discussed, The theory and method discussed in this book are meaningful for development of metrology and test technology.

This book is useful for technicians, engineers, scientific researchers on metrology and test. It is also useful for teachers and students on connected specialities of universities and colleges.

Principle of Uncertainty in Measurement

Contents

1. Introduction	(1)
2. Basic Concepts	(2)
2.1 General Outline	(2)
2.2 Concerned Vocabulary	(3)
2.3 Statistical Characteristics	(3)
2.4 Sources of Uncertainty	(4)
2.5 Two Evaluation Types	(4)
3. Base of Uncertainty Evaluation—Uncertainty Evaluation for Monovariant Measurement	(5)
3.1 Type A Evaluation	(5)
3.2 Type B Evaluation	(8)
3.3 Synthesis of Uncertainties	(14)
3.4 Discuss	(16)
4. Correlation Coefficient	(17)
4.1 Meaning and Properties of Correlation Coefficient	(17)
4.2 Methods to Obtain Correlation Coefficient	(19)

4. 3	Applications of Correlation Coefficient	(22)
5.	Degrees of Freedom	(24)
5. 1	Concept of Degrees of Freedom ...	(24)
5. 2	Properties of Degrees of Freedom ...	(25)
5. 3	Applications of Degrees of Freedom	(30)
6.	Uncertainty for Nonlinear Model	(38)
7.	Nonnormal Product Uncertainty	(40)
7. 1	General Outline	(40)
7. 2	Characteristics of Nonnormal Variate	(41)
7. 3	Product Statistics	(44)
7. 4	Fine Evaluation for Expanded Uncertainty—Evaluation for Nonnor- mal Expanded Uncertainty	(49)
8.	Uncertainty for Multivariant Measurement	(58)
8. 1	Evaluation Methods	(58)
8. 2	Evaluation Properties	(63)
9.	Uncertainty for Multidimensional Measurement	(65)
9. 1	General Outline	(65)
9. 2	Uncertainty Evaluation	(67)

9.3	Discuss	(68)
10.	Dynamic Uncertainty	(69)
10.1	Meaning	(69)
10.2	Measurement for Continuous Parameter	(69)
10.3	Measurement for Series	(73)
	References	(82)

目 录

1	引言	(1)
2	基本概念	(2)
2.1	概述	(2)
2.2	有关名词	(3)
2.3	统计特征	(3)
2.4	不确定度来源	(4)
2.5	两类评定	(4)
3	不确定度评定基础——单变量测量不确定度评定	(5)
3.1	A类评定	(5)
3.2	B类评定	(8)
3.3	不确定度综合	(14)
3.4	讨论	(16)
4	相关系数	(17)
4.1	相关系数意义与性质	(17)
4.2	相关系数求法	(19)
4.3	相关系数应用	(22)
5	自由度	(24)
5.1	自由度概念	(24)
5.2	自由度性质	(25)
5.3	自由度应用	(30)
6	非线性不确定度	(38)
7	非正态、产品不确定度	(40)
7.1	概述	(40)

7. 2	非正态随机变量的特征	(41)
7. 3	产品统计	(44)
7. 4	展伸不确定度的精细评定—— 非正态展伸不确定度评定	(49)
8	多变量测量不确定度	(58)
8. 1	评定方法	(58)
8. 2	评定特点	63)
9	多维测量不确定度	(65)
9. 1	概述	(65)
9. 2	不确定度评定	(67)
9. 3	讨论	(68)
10	动态不确定度	(69)
10. 1	意义	(69)
10. 2	连续参数测量	(69)
10. 3	序列测量	(73)
	参 考 文 献	(82)

1 引 言

为了改造自然使之满足人们的需要，我们要认识自然。由于能力的不足，我们的认识带有不确定性，认识结果带有不确定度。

在科学技术中进行着大量的测量工作，借以认识事物，测量结果的质量如何，要用不确定度来说明。不确定度愈小，测量结果对真值愈靠近，其质量愈高，其使用价值愈高；不确定度愈大，测量结果对真值愈远离，其质量愈低，其使用价值愈低。

测量不确定度必须正确评定。不确定度评定过大，会因测量不能需要而需再投资，造成浪费；不确定度评定过小，会对产品质量造成危害，会对生产、国防造成危害。

不确定度与计量科学技术密切相关，不确定度用以说明基准标准、检定测试的水平，作为量值传递的依据。不确定度还用来表明仪器设备的质量。

1927年海森堡(Heisenberg)提出了不确定度关系，又称测不准关系。以坐标 x ，动量 p 为例，不确定度关系可写为

$$\overline{(x - \bar{x})^2} \cdot \overline{(p - \bar{p})^2} \geq \frac{h^2}{16\pi}$$

式中 h 为普朗克常数， \bar{x} ， \bar{p} 为 x ， p 的平均值。

上式说明，在任何状态下对 x 、 p 测量，所得结果两者都离平均值很近是不可能的，一方越接近平均值，则另一方越远离平均值。

1970年前后，一些学者逐渐使用不确定度一词，但其含义不清。1970年以来，各国计量部门逐渐使用不确定度来评定测量结果，由于评定方法不一样，评定结果不一致，使得各国在互相利用成果时极为困难，并对各国测量结果的比较带来很大的不方便。

1980年国际计量局在征求各国意见的基础上，提出了实验不确定度建议书 INC-1，该建议书得到了国际计量委员会的批准。

1986年国际标准化组织、国际电工委员会、国际计量委员会、国际法制计量组织成立了国际不确定度工作组。我国代表刘智敏为国际不确定度工作组成员。该工作组连续召开会议，研究不确定度及其使用，从而使不确定度的研究进入一个新阶段。

2 基本概念

2.1 概述

不确定度为被测量值知识缺乏的程度，其表达数字为测量值所带有的参数，用以表示测量值的范围，而被测量的真值评定落于其中。

表达不确定度数字一般是标准差，也可用标准差的倍数。

随机性与模糊性是产生不确定度的原因。随机性是由于条件不充分，从而产生的认识的不确定，模糊性是由于事物本身概念不明确，从而产生的认识的不确定。

事物本身有明确含义，只是由于条件不充分，使得在条件与事物之间不能出现决定的因果关系，从而在事件的出现与否表现出不确定的程度，这是随机性产生的不确定度。

模糊性是由于事物的模糊，在这里，概念本身就没有明确含义，一个对象是否符合这个概念难于确定，导致模糊性产生的不确定度。

随机性是因果律的一种破缺，模糊性是排中率的一种破缺。

研究随机性要对大量结果进行统计分析，找出统计规律，这与概率统计有关。研究模糊性要对多种对象分析，找出从属关系，这与模糊数学有关。

可靠性是在规定时间规定条件下，完成规定功能的能力。在规定时间规定条件下，完成规定功能的概率称可靠度。目前研究

可靠性是研究随机性在可靠问题上的特性。在测量领域中，我们认为事物确定但其表现条件不充分，使事物出现有不确定性，故不确定度主要用概率统计来处理，某些情况也用模糊规律来认识。

2. 2 有关名词

标准不确定度：以估计标准差表示的测量不确定度，简称不确定度。

A类(评定的)不确定度：由观测列的统计分析评定的不确定度，也称统计不确定度。

B类(评定的)不确定度：由不同于观测列的统计分析评定的不确定度，也称非统计不确定度。

合成(标准)不确定度：测量结果由其它量得来时，按其它量的方差和协方差算得的测量结果的标准不确定度。

展伸不确定度：用以确定测量结果附近区间的一个量，测量的值可望以高置信概率(置信水平)落于该区间。也称总不确定度。

包含因子：为获得展伸不确定度，对合成标准不确定度所乘的数值。

2. 3 统计特征

若随机变量 ξ 有分布函数 $F(x)$ ，则其：

期望 $E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x)$ ，也写作 $E\xi$ 。

方差 $V(\xi) = E\{(\xi - E(\xi))^2\}$ ，也写作 $V\xi$ 或 $Var(\xi)$ 。

标准差 $\sigma(\xi) = \sqrt{V(\xi)}$ ，在 ξ 无须说明时写作 σ 。

K 阶原点矩 $\alpha_K = E(\xi^K)$ 。

K 阶中心矩 $\mu_K = E\{(\xi - E(\xi))^K\}$ 。

特征函数 $\theta(t) = E\{e^{it\xi}\}$ 。

s 阶半不变量 $\ln\theta(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\kappa_s}{s!} (it)^s$ 中 κ_s 。

偏倚系数

$$\beta = \kappa_3 / \sigma^3。$$

超越系数

$$\gamma = \frac{\kappa_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

2. 4 不确定度来源

不确定度可来源于：

- (1) 被测量定义不完善
- (2) 定义实现的不完善
- (3) 测量样本不完全代表被测量
- (4) 对环境了解不全面，及测量环境影响量不完善
- (5) 人员读数不准
- (6) 仪器的分辨率，及数字仪器的最小读数
- (7) 基标准及标准物质的值
- (8) 从外部取得并用于计算的常数或参数值
- (9) 测量原理、方法和程序不理想
- (10) 重复测量的偶然变化

从不确定度来源可见，不确定度形成的机理是测量设备、测量环境、测量人员、测量方法和被测对象。

2. 5 两类评定

测量结果的不确定度形成于若干分量，按其数值评定方法，不确定度分量分为：

A类评定的：以统计法评定，以实验标准差 s_x 表征。

B类评定的：以不同于统计的其它法评定，以等价标准差 u_j 表征。

我们知道，概率是对随机事件赋予的从 0 至 1 的实数，其描述可以是发生结果的相对频率，也可以是对发生事件的信任程度。

A类由测量列的统计分析评定，由观测列可得出发生结果的相对频率。B类可由对事件的信任程度估计，故两类不确定度都有概率意义。

A类基于观测列频率的概率分布, B类基于其它方法估计的概率分布(先验分布), 两者都可评定标准差, 从而都有标准不确定度。这样, 两类不确定度分量概率意义相同, 合成方法都按随机处理, 故分量 s_i , u_i 其实都可记为 u_i 。

3 不确定度评定基础

——单变量测量不确定度评定

3. 1 A类评定

3. 1. 1 基本方法

对某量 μ 多次测量得 x_1, x_2, \dots, x_n , 而 x_i 独立同分布 (iid) 服从期望 μ , 标准差 σ 的正态分布 $N(\mu, \sigma)$, 记为

$$x_i \text{ iid } N(\mu, \sigma)$$

则评定标准差的基本方法有:

(1) 贝塞尔法

若测得 $x_i \text{ iid } N(\mu, \sigma)$

算平均值 \bar{x} 及残差 v_i ,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i \quad v_i = x_i - \bar{x}$$

则 σ^2 的无偏估计为 $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum v_i^2$

而 σ 的估计为 $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum v_i^2}$

(2) 最大残差法

若测得 $x_i \text{ iid } N(\mu, \sigma)$

由残差 $v_i = x_i - \bar{x}$ 找出最大残差绝对值 $\max |v_i|$, 由 $\max |v_i|$ 的期望可得 σ 的无偏估计

$$s = C \cdot \max |v_i|$$

C 值见表 1。

表 1

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
C_n	1.77	1.02	0.83	0.74	0.68	0.64	0.61	0.59	0.57	0.51	0.48

(3) 彼得斯法

若测得

$$x_i \text{ iid } N(\mu, \sigma)$$

则残差绝对平均

$$\vartheta = \frac{1}{n} \sum |x_i - \bar{x}|$$

的期望

$$E\vartheta = \sigma \left\{ \frac{2(n-1)}{n\pi} \right\}^{1/2}$$

故 σ 的无偏估计 $s =$

$$s = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{n(n-1)}{2\pi}}} \sum |x_i - \bar{x}|$$

$$\approx 1.253 \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sum |x_i - \bar{x}|$$

(4) 最大误差法

若测得 $x_i \text{ iid } N(\mu, \sigma)$, 误差 $\delta_i = x_i - \mu$, 由最大误差绝对值 $\max|\delta|$ 的期望可得 σ 的无偏估计

$$s = C_n' \max|\delta|$$

 C_n' 值见表 2。

表 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
C_n'	1.25	0.88	0.75	0.68	0.64	0.61	0.58	0.56	0.55	0.53	0.49	0.46

(5) 极差法

若测得 $x_i \text{ iid } N(\mu, \sigma)$, 算极差

$$w = \max x_i - \min x_i$$

由 w 的期望可得 σ 的无偏估计 $s = \frac{1}{d_n} w$ d_n 值见表 3。

表 3

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
d_n	1.13	1.69	2.06	2.33	2.53	2.70	2.85	2.97	3.08	3.47	3.73

(6) 分组极差法