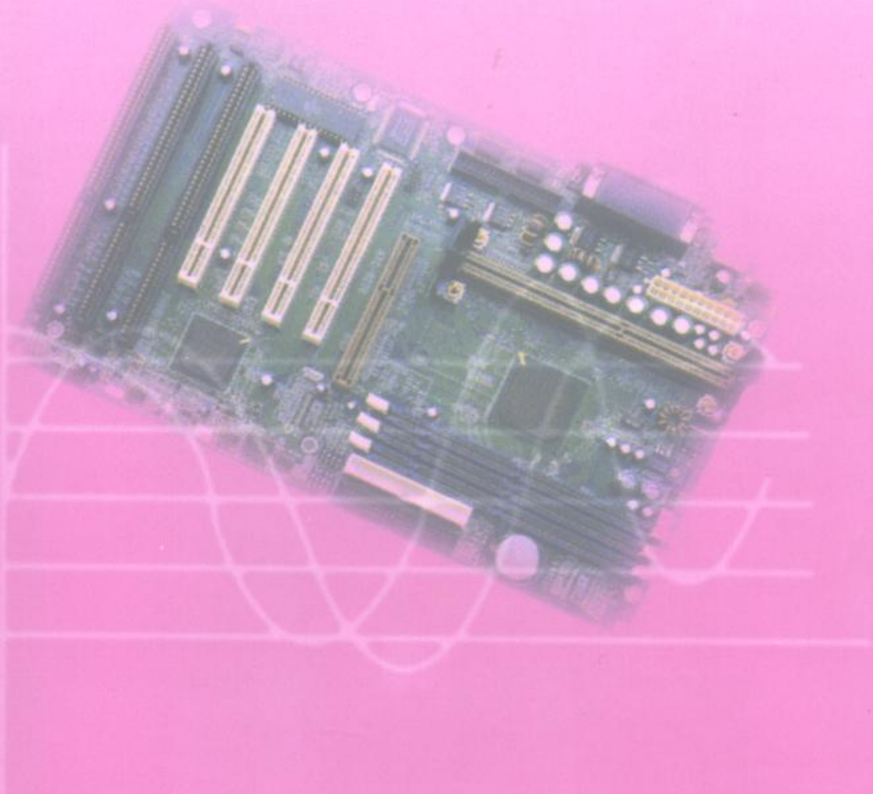
随机信号分析

印勇 主编



中国物资出版社

随机信号分析

印　勇　主编

中国物资出版社

图书在版编目(CIP)数据

随机信号分析/印勇主编．—北京:中国物资出版社,2000.2
ISBN 7-5047-1513-1

Ⅰ.随… Ⅱ.印… Ⅲ.随机信号—信号分析 Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)年第 69647 号

中国物资出版社出版
(北京市西城区月坛北街 25 号　邮编 100834)
全国新华书店经销
北京市宏伟胶印厂印刷
开本:850×1168 毫米　1/32　印张:8.375　字数:210 千字
2000 年 2 月第 1 版　2000 年 2 月第 1 次印刷
ISBN 7-5047-1513-1/G·0393
印数:0001-3000 册
定价:15.80 元

内容简介

本书共七章，内容包括概率论基础知识，随机过程理论，随机信号通过线性系统和非线性系统的理论和分析方法，以及马尔可夫过程等。本书主要侧重于物理概念和分析方法的阐述，深入浅出，便于自学。每章后附有一定数量的习题。

本书可作为各类信息学科，特别是电子、通信类专业高年级本科生和硕士研究生的教材使用，也可供有关科技人员参考。

前　言

当今信息时代，社会的各个方面、各种自然科学和工程技术领域都与信息密切相关，信息具有不确定性，即随机性的特点，使携带信息的信号为随机信号。因此，随机信号的理论和分析方法是信息科学技术的重要基础。

“随机信号分析”是一门理论性强、系统性强的专业技术基础课程。本教材是编者在积累了多年教学实践经验的基础上编写而成的。它系统地介绍了随机过程的基本理论以及随机信号通过线性系统和非线性系统的理论和分析方法，侧重于物理概念和分析方法的阐述，不过分强求数学上的严密性，深入浅出，力求让读者易学易懂。本书可作为各类信息学科，特别是电子信息工程、通信工程以及无线电技术等专业大学本科生的教材使用，也可作为相关专业的硕士研究生的参考教材。

全教材共分七章，第一章介绍概率论的基础知识；第二章叙述了随机过程的基本概念，重点讨论了平稳随机过程和各态历经过程；第三章为随机过程的功率谱密度分析；第四章讨论随机信号通过线性系统的基本理论和分析方法；第五章介绍窄带系统和窄带随机过程；第六章讨论随机信号通过非线性系统的分析方法；第七章介绍马尔可夫过程理论。各章后都附有习题。全教材的参考学时约 65 学时。任课教师可根据实际情况对教材内容酌情取舍。

重庆大学曾孝平教授审阅了本教材的原稿，并提出了许多非常宝贵的意见。在教材的编写过程中，作者所在单位重庆大学通信与测控工程学院的领导和同事给予了大力支持和热情鼓励。在此一并表示感谢！

由于编者水平有限，教材中难免存在不妥和错误之处，恳请读者批评指正。

编　者

1999 年 10 月于重庆大学

目　录

第一章　概率论基础

§1.1　随机事件及其概率

1.1.1　随机现象

自然界和人类社会所发生的现象可以粗略地划分为确定的、可以预测的一类和随机的、不可预测的另一类。第一类称之为必然现象或确定性现象，这类现象在一定的条件下进行多次重复试验，必然产生同一结果。例如，在一个标准大气压下，把水加热到100℃，水就会沸腾；在带电体之间，总是同性相斥异性相吸等等。另一类现象称为随机现象，是指在相同条件下进行多次重复试验，有各种可能的结果，但在试验前不能准确预言它的结果。例如，掷一硬币，可能出现正面，也可能出现反面，但在试验前不能预言究竟出现哪一面；同一门大炮向同一目标射击，各次射击的弹着点不尽相同，且每次射击之前无法预言弹着点的确切位置等等。

表面看来，随机现象似乎是没有规律的，其实它还是有规律性的，不过这种规律体现在大量重复试验时的集体现象之中。人们发现在相同条件下，对同一随机现象进行大量的重复试验，就会呈现出确定的规律性——统计规律性。概率论就是研究和揭示随机现象统计规律性的数学学科。

1.1.2　随机试验

为了掌握随机现象的统计规律，就必须对随机现象进行大量观测或试验。例如：

例 1　抛硬币试验 $E1$：抛一枚硬币，观察其正面 H，反面 T 出现的情况。

例 2　掷骰子试验 $E2$：掷一颗骰子，观察出现的点数。

例 3　产品抽样测试试验 $E3$：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

这些试验均具有以下三个特点：

(1)试验有多种可能结果，并且事先明确知道该试验的所有可能的结果；

(2)每次试验出现哪个结果，是不能准确预言的；

(3)试验可以在相同条件下重复进行；

在概率论中，将具有以上三个特点的试验称为随机试验，简称试验，常用 E 来表示。随机试验是研究随机现象统计规律性的手段。

1.1.3　随机事件

在随机试验的结果中，可能发生，也可能不发生，但在大量重复试验中，却具有某种规律性的事件，叫做此随机试验的随机事件。

随机试验的每一种可能出现的结果都是一个随机事件，它们是该试验的最简单的随机事件，通常称这种简单的、不可再分割的随机事件为基本事件，例如：

$E1$："出现正面 H，出现反面 T"

$E2$："出现 1 点，出现 2 点，…，出现 6 点"

一随机试验中，除基本事件外，还有其它的随机事件，如在 $E2$

中，“出现偶数点”也是一随机事件，它是由“出现 2 点”、“出现 4 点”、“出现 6 点”这三个基本事件所组成的，当且仅当这三个基本事件之一发生时，它才发生。

在试验 E 中必然会发生的事件叫做必然事件，不可能发生的事件就叫做不可能事件，例如 $E2$ 中“出现点数不大于 6”是必然事件，“出现点数大于 6”是不可能事件。必然事件和不可能事件本来没有不确定性，也就是说它们不是随机事件，但为了今后讨论方便起见，我们把它们当作一种特殊的随机事件。

1.1.4 样本空间

为了便于研究随机试验 E，我们将随机试验 E 的所有基本事件所组成的集合叫 E 的样本空间，记为 S，S 中的元素就是试验 E 的基本事件。基本事件也称样本点。

下面写出试验 $E_k(k=1,2,3)$ 的各样本空间 S_k。

$$S_1:\{H,T\}$$

$$S_2:\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$S_3:\{t\,|\,t\geqslant 0\}$$

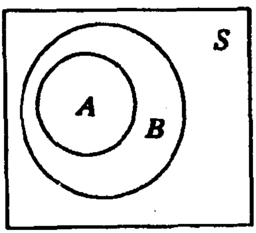
要注意的是，样本空间中的元素是由试验内容所确定的，例如在试验 E_1 中，如果将硬币的正面编号为 1，反面编号为 2，那么 S_1 不再是 $\{H,T\}$，而是 $\{1,2\}$。

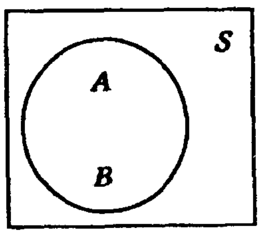
由于随机事件是基本事件，或是由基本事件所组成的，故引入了样本空面 S 之后，我们看到试验 E 的事件是样本空间 S 中的子集，而且事件发生，当且仅当子集中的一个样本点发生。例如，上面所说的事件 A:“出现偶数点”是由基本事件“2”“4”“6”所组成的，A 是 S_2 的子集，即 A:“2,4,6”。又如事件 B:“点数小于 3”是子集 $\{1,2\}$，即 $B:\{1,2\}$。特别，必然事件就是样本空间 S，不可能事件就是空集 Φ。

1.1.5　事件之间的关系与运算

在一个随机试验中，可以观测到很多事件，它们各有其特点，彼此之间又有一定的联系，而且其中有些事件比较简单，有些事件比较复杂。如何用一些简单事件表示复杂的事件？因此，需要研究事件之间的关系与运算，下面讨论事件之间的几个主要关系和运算。

1）子事件





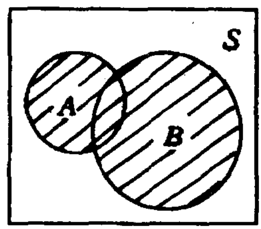


图 1.1—1 子事件　　图 1.1—2 两事件相等　　图 1.1—3 和事件

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 是事件 B 的子事件，或称事件 A 含于事件 B 中（或 B 包含 A），记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

这可用图 1.1—1 来说明，图中正方形表示样本空间 S，园 A 与园 B 分别表示事件 A 与事件 B，事件 B 包含事件 A。

2）两事件相等

若事件 A 含于事件 B，事件 B 也含于事件 A，即 $A\subset B$，$B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$。如图 1.1—2 所示。

3）和事件

事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这一事件称为事件 A 与 B 的和（或 A 与 B 的并）。记为 $A+B$ 或 $A\cup B$。如图 1.1—3 所示。图中阴影部分即表示事件 A 与事件 B 的和。

类似地，事件 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 中至少有一个发生，这一事件称为

$A_1,A_2,\cdots A_n$ 的和，记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$，简记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$。

4）积事件

事件 A 与事件 B 同时发生，这一事件称为事件 A 与 B 的积（或 A 与 B 之交）。记为 AB 或 $A\cap B$。如图 1.1—4 所示。图中阴影部分表示 AB。

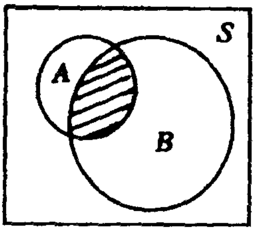


图 1.1—4 积事件

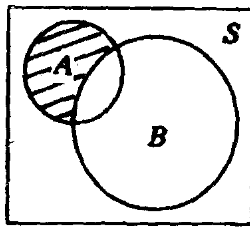


图 1.1—5 差事件

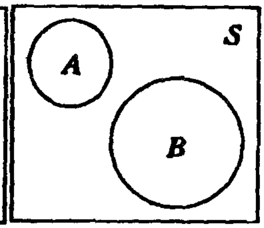


图 1.1—6　互不相容事件

类似地，可以定义 $A_k(k=1,2\cdots n)$ 的交 $A_1A_2\cdots A_k$，简记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$。

5）差事件

事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为 A 与 B 之差，记为 $A-B$，如图 1.1—5 所示，图中阴影部分表示 $A-B$。

6）互不相容事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，亦即 $AB=\Phi$，则称 A 与 B 不相容。图 1.1—6 直观地表示了 A 与 B 是互不相容的。显然，基本事件是互不相容的。

7）逆事件

若事件 A 与事件 B 中必然有一个发生，且仅有一个发生，即 A、B 满足条件：

$$\begin{cases}A+B=S\\AB=\varnothing\end{cases}$$

则称 A 与 B 互逆，又称 A 是 B 的对立事件（或 B 是 A 的对立事

件)。记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$。图 1.1－7 直观地表示了 A 与 B 互逆。

不难理解,对任意事件 A 和 B,都有

$A-B=A\overline{B}$ 或 $B-A=B\overline{A}$

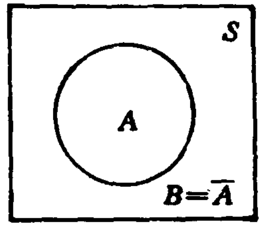


图 1.1－7 逆事件

1.1.6 随机事件的频率与概率

一个随机试验有许多可能结果,我们常常希望知道某些结果出现的可能性有多大。例如,要在某河上建筑一座防洪水坝,为了确定水坝的高度,就要知道该河流在造水坝地段每年最大洪水达到某高度的可能性的大小。最大洪水达到某一高度是随机事件,我们希望能将一个随机事件发生的可能性大小用一个数来表达。

1) 随机事件的频率

一般地,在同样条件下,大量进行重复试验,来观察事件 A 发生或不发生(如抛硬币,出现 H 的事件为 A)。若在 n 次独立试验中,随机事件 A 出现 n_A 次,比值

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率。

当 n 不大时,$f_n(A)$具有显著的随机性,当 n 逐渐增大,$f_n(A)$以微小的摆动逐渐接近一个常数 $P(A)$。

用频率来刻划事件发生的可能性的大小有缺点,因为它有随机波动性,不过当 n 逐渐增大时,频率 $f_n(A)$逐渐稳定于某个常数 $P(A)$,即当 n 很大时就有 $f_n(A)\approx P(A)$。这个数 $P(A)$是客观存在的,即对于每一随机事件 A 总有这样一个数 $P(A)$与之相对应。因此,用稳定值 $P(A)$来刻划事件 A 发生的可能性的大小是比较恰当的。

2) 概率的定义

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一事件赋予一实数，记为 $P(A)$，称之为事件 A 的概率，显然

$$P(A)\approx\frac{n_A}{n}(n\to\infty) \tag{1.1.1}$$

由于概率是频率的稳定值，因而对任何随机事件 A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

而对必然事件 S 和不可能事件 Φ，显然有

$$P(S)=1,P(\Phi)=0$$

前面所说的"抛硬币"、"掷骰子"的试验，它们具有两个共同的特点：

①试验的样本空间的元素只有有限个；

②试验中每个基本事件出现的可能性相同。

一般地，设试验 E 的样本空间为 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，如果每一个基本事件的概率相等，即 $P(e_1)=p(e_2)=\cdots=P(e_n)$，则称这类试验为等可能概型，又叫古典概型。对于等可能概型，由于

$$S=e_1+e_2+e\cdots+e_n$$

$$P(S)=nP(e_i)=1$$

得到

$$P(e_i)=\frac{1}{n}$$

因此，在等可能概型中，若事件 A 包含 k 个基本事件，则有

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}} \tag{1.1.2}$$

3）概率的性质

性质 1（有限可加性）　设有有限个两两互不相容事件 A_1，$A_2,\cdots,A_n$，则

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1.1.3}$$

作为性质 1 的特例，设有互不相容事件的两个事件 A、B，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1.1.4}$$

性质 2 设 A 为任一随机事件，则

$$P(A)=1-P(\overline{A}) \tag{1.1.5}$$

性质 3 设 A、B 为任意两事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.1.6}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB) \tag{1.1.7}$$

§1.2 条件概率与统计独立

1.2.1 条件概率

在随机试验中，研究的主要对象是随机事件的发生情况。除研究事件自身的发生情况外，还特别需要研究事件在一定条件下发生的情况，即在一个事件发生的条件下另一事件发生的概率。这就是条件概率问题。

定义 设 A、B 为随机试验的两个事件，且 $P(A)>0$，则称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.2.1}$$

为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

类似地，有（$P(B)>0$）

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.2.2}$$

1.2.2 乘法定理

由条件概率的定义，可立即推出下面的乘法定理。

乘法定理 设 $P(B)>0$，则有

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \tag{1.2.3}$$

如果 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \tag{1.2.4}$$

概率的乘法定理的意义是：两事件积的概率等于其中某一事件的概率乘另一事件在前一事件已发生的条件下的条件概率。

乘法定理可以推广到 n 个事件之积的情况，即设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件($n\geqslant 2$)，且 $P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1.2.5}$$

1.2.3　全概率公式

1. 完备事件组

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=S$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组。

构成完备事件组的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 可用图 1.2—1 形象地表示，它们表现为任意两个事件都不含公共的样本点，而这几个事件的全体恰好构成整个样本空间 S。

虽然，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 可以不是基本事件，而随机试验 E 的所有基本事件构成一个完备事件组。

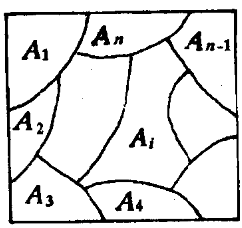


图 1.2—1 完备事件组

2. 全概率公式

如果某个事件可能在多种情况下发生，而且它在各种情况下发生的可能性大小也都知道，试问该事件发生的“总的可能性”或“全部可能性”多大？这类问题是常见的。由概率的有限可加性和条件概率的定义可导出计算事件“总的可能性”的全概率公式。

设 B 为 E 的事件，$A_1,A_2,\cdots A_n$ 构成 E 的完备事件组，B 发生，只能与事件 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 中的一个同时发生，且仅能与它们之一同时发生，现在要确定 A 发生的概率。