应用数学丛书

应用组合论

刘振宏 编著

国防工业出版社

应 用 数 学 丛 书

应 用 组 合 论

刘振宏　编著

国防工业出版社

(京)新登字106号

内容简介

本书共十一章，除第一章属于基础知识外，从内容来看可以分为三部分。第二章至第六章，属于组合计数的内容，第七章和第八章的部分内容，属于组态的存在性问题，第九章至第十一章及第八章另部分内容则属于组合算法。特别是第十和第十一两章，是近代组合最优化的内容，有着广泛的应用价值和理论意义。

本书和同类书相比，具有两个突出的特点：其一，举例较多，这有助于读者掌握抽象的概念和方法；其二，内容较新，如后三章的内容都是近几十年发展起来的、近代组合数学的重要内容，其中不少是作者及其同事们的成果。

本书适用于运筹学、系统工程、计算机和应用数学专业的师生和科技人员参考使用。

应用数学丛书
应用组合论
刘振宏 编著

国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路23号）
（邮政编码 100044）
新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
850×1168毫米　32开本　印张$9^3/_4$　254千字
1993年1月第一版　1993年1月第一次印刷　印数：0001—2500册

ISBN 7-118-01004-9/O·78　定价：8.95元

应用数学丛书目录

---

* 表示即将出版的书目。

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相联，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成系统，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前　言

组合论是一个历史悠久的数学分支，由于电子数字计算机的出现和广泛的应用，这门古老的数学分支焕发出新的活力，变得异常活跃，这就使得在理论上和应用上展示了新的面貌。

组合论所研究的内容主要有三个方面：

（1）离散对象间的某种组态的存在性；

（2）离散对象间的某种组态的数目；

（3）在某种最优性的指标下，找出或设计出满足要求的一个最优组态。

前两个问题是古典组合论所研究的内容；后一个问题是属于近代构造数学内容，更确切地说，它属于组合优化范围。

初看起来，组合论所研究的内容似乎比较单纯，但是由于离散对象几乎处处可见，所以涉及到很多其它的学科，如集合论、数论、格论、群论、有限几何、图论、运筹学、概率论和信息论等，从而使组合论又变得非常庞杂，以致于至今没有一套系统的理论，用以处理各种问题。

本书是根据近几年为应用数学系和计算机系的学生讲课时所编写的讲义，以及为运筹学专业和系统工程专业的研究生所编写的讲义综合而成。全书共分十一章。第一章是基础知识，具有一定基础知识的读者，完全可以跳过它。第二章是组合与排列，其中大部分内容高中代数中已有。由于组合与排列要经常用到，所以还是把它做为单独一章，这也是组合论图书的惯例。第二～八章属于古典组合论的内容，但是包含了某些新的结果和方法。为了说明方法，每一章都列举了若干饶有兴趣的例子，用以加深对内容的了解与掌握。第九章是图论中的几个问题，除了这几个问题自身的意义外，它们还是下两章的基础知识。第十章和第十一

章讨论了近三十年来发展起来的一种抽象的组合结构——拟阵，本书没有涉及拟阵的更多性质，而只是建立了拟阵中某些优化问题的算法。由于拟阵是一种抽象的结构，概括了一大类组合优化问题的算法，因此这些算法在实际中是很有用的。

本书所选的这些专题，对于应用数学、计算机科学、运筹学和系统工程专业的学生来说是基本的和有用的；对于在这些领域从事工作的技术人员和教师来说也是有参考价值的。

在工作和教学的实践中，我体会到组合论与其它数学分支不同，它虽然也需要知识，但它更需要智力。组合论中有许多问题，看起来十分简单，甚至用几句话就可以把问题向一个中学生讲清楚，但是要解决问题却不是那么简单，而必须进行深入思考。另外，组合论中有许多饶有兴趣的问题，可以说是一种趣味数学，而在解这些问题时会感到是一种享受和娱乐。因此，学习组合论对增长智力和培养学习数学的兴趣是大有好处的。

最后，我要感谢我的妻子，她在百忙之中不仅负担了繁重的家务劳动，而且为我抄写了本书的手稿。

作　者

目　录

第一章　集合、关系、映射与图

§1.1　集合的基本概念

一个集合就是一些不同对象的总体，这些对象就称为该集合的元素。当集合中元素的个数为有限时，则称它为有限集，否则称它为无限集。

例如，地球上所有的人就构成一个集合，而每一个人就是该集合的一个元素。

又如，所有自然数构成一个集合，而每一个自然数就是该集合的一个元素。显然，人的集合是有限集，而自然数的集合为无限集。

一般用大写英文字母表示集合，用小写字母表示集合中的元素。表示一个集合有几种方式：

当集合中元素个数较少时，可以用列出它的所有元素的方式表示。如：

$$S=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$$

当集合中元素具有一定的规律时，也可以列出其部分元素，然后用省略号表示其余元素。如

$$S=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots\}$$

表示所有正奇数集合。

表示集合的一个重要方式是，用刻划集合中元素的性质来描述集合。如：

$$S=\{x\mid x\text{ 是偶数}\}$$

表示全体偶数的集合。

必须注意，集合中的元素是确定的，也就是说，给定一个集合等价于给出了该集合中的所有元素。因此，任何一个对象或元素 a，它或者属于集合 S，或者不属于集合 S，二者必居其一。

当a属于S时，则记$a \in S$；当a不属于S时，记为$a \notin S$。如果一集合S它不包含任何元素，则称它为**空集**，并记为$S=\phi$。若集合S包含所讨论的一切元素，则称它为**全集**，记$S=E$。注意，由集合的定义可知，一个集合中任何两个元素是不同的。

给定两个集合S_1和S_2，如果S_1中每一个元素也是S_2中的元素，则称S_1是S_2的**子集**，并记为$S_1 \subseteq S_2$或$S_2 \supseteq S_1$；若$S_1 \subseteq S_2$且$S_1 \supseteq S_2$则称S_1和S_2相等，记为$S_1=S_2$；若$S_1 \subseteq S_2$，但$S_1 \neq S_2$，则称S_1是S_2的真子集，并记为$S_1 \subset S_2$或$S_2 \supset S_1$。关于两个集合之间的包含关系有下述性质：

（1）若$A \subseteq B$，$B \subseteq C$，则有$A \subseteq C$；

（2）若$A \subseteq B$及$B \subseteq A$，则有$A=B$；

（3）$A \subseteq A$，$\phi \subseteq A$。

除集合的包含关系外，还可以建立集合之间的一些代数运算：

由集合A和集合B的所有元素组成的集合，称为A和B的**并集**，并记为$A \cup B$。

例　A为自然数集合，B为偶数集合，则$A \cup B$是由所有非负整数及负偶数组成的集合，或者

$$A \cup B=\{k, -2k \mid k=0, 1, 2, \cdots\}$$

由集合A和B的一切公共元素所组成的集合，称为A和B的**交集**，并记为$A \cap B$。

例　A是自然数集合，B是偶数集合，则$A \cap B$为正偶数组成的集合，即

$$A \cap B=\{2k \mid k=1, 2, 3, \cdots\}$$

关于集合A和B的并与交的运算满足下述定律：

（1）结合律

$$A \cup (B \cup C)=(A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C)=(A \cap B) \cap C$$

（2）交换律

$$A \cup B=B \cup A, \quad A \cap B=B \cap A$$

（3）分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

用$A-B$表示在集合A里而不在集合B里的元素全体所组成之集合，并称之为集合A对集合B的差集。全集E对集合A的差集，称为A的补集，并记为$\overline{A}=E-A$。

例如，若A是自然集合，B为偶数集合，则$A-B$为所有正奇数的集合。又如若E为所有整数集合，A为自然数集合，则$\overline{A}=E-A$为小于等于0的整数集合。

显然，$\overline{\phi}=E$，$\overline{E}=\phi$，$\overline{\overline{A}}=A$

设集合A和B的非公共元素的集合为$A\ominus B$，即$A\ominus B=(A-B)\cup(B-A)$，并称之为$A$和$B$的对称差集。对称差运算$\ominus$满足：

（1）交换律　$A\ominus B=B\ominus A$

（2）结合律　$A\ominus(B\ominus C)=(A\ominus B)-C$

（3）分配律　$A\cap(B\ominus C)=(A\cap B)\ominus(A\cap C)$

（4）　$A\ominus\phi=A$

（5）　$A\ominus A=\phi$

关于集合的并、交和补运算的狄·莫根（De Morgan）定律是很有用的，该定律为：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

集合是指不同对象的总体，即集合中任何两个元素是不同的，然而在许多情况下，这一概念还不能满足需要。如把一个图书馆里的书视为一个总体，那么这个总体中的元素未必不同，因为同一个版本的书可能有几本，因而就提出了重集的概念。

一个重集，定义为一些对象的总体，但这些对象不必不同。如$S=\{a, a, a, b, b, c\}$为一个重集。在重集里，一个元素的重数定义为它在该集合中出现的次数。如a在S中出现三次，因此a的重数为3。b的重数为2，c的重数为1。不在S中的元素，可视为它的重数为0。把重集也简记为不同元素的总

体，只是在元素的前面标上该元素的重数。如

$$S=\{a, a, a, b, b, c\}=\{3a, 2b, c\}$$

类似地可定义重集的包含关系，以及并、交和差的运算：

设 S_1 和 S_2 是两个重集，若 S_1 中每一个元素的重数都不大于 S_2 中对应元素的重数，则称 S_1 包含于 S_2，或 S_1 是 S_2 的子集，记为 $S_1\subseteq S_2$。两个重集 S_1 和 S_2 的并集表示为 $S_1\cup S_2$，它的每个元素的重数定义为该元素在 S_1 和 S_2 中重数的最大者。如

$$S_1=\{3a, c, 2d\}, \quad S_2=\{2a, b, 2c\}$$

则

$$S_1\cup S_2=\{3a, b, 2c, 2d\}$$

两个重集 S_1 和 S_2 的交集也是一个重集，它的每一个元素的重数定义为该元素在 S_1 和 S_2 中重数的最小者，记为 $S_1\cap S_2$。如上例

$$S_1\cap S_2=\{2a, c\}$$

两个重集 S_1 和 S_2 的差，记为 S_1-S_2，也是一个重集，它的每一个元素的重数等于它在 S_1 中的重数减去在 S_2 里的重数及 0 中之最大者。如上例

$$S_1-S_2=\{a, 2d\}$$

一个重集 S，如果 S 中每一个元素的重数都是有限数，则称 S 为**重数有限的重集**，否则称为**重数无限的重集**。

§1.2 集合的基数(势)

两个集合 A 和 B，若它们的元素之间能建立起一一对应的关系，则说 A 和 B 的基数相同，并记为 $A\sim B$。

对有限集而言，一个集合的基数就是它含有元素的个数。若 A 是有限集，用 $|A|$ 表示 A 中元素的个数，即基数。显然 $|\phi|=0$。

设 $N=\{1, 2, 3, \cdots\}$ 为自然数集合。若集合 A 满足 $A\sim N$，则称 A 为**可列集**。

定理1.1 设 A 是一个无限集，则 A 必包含一个可列集作为其子集。

证 从 A 中任取一元素 a_1，从 $A-\{a_1\}$ 中任取一元素 a_2，…，

一般地，从$A-\{a_1, a_2, \cdots, a_i\}$中任取一元素$a_{i+1}$，由于$A$是无限集，故这一过程可以无限地进行下去，这样就得到一个集合

$$B=\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$$

显然B是可列集，且$B\subseteq A$。

定理1.2 设A是可列集，B是A的真子集。若B是无限集，则B也是可列集。

证 因A是可列集，故A可写为

$$A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$$

因为B是A的子集，故可表示为

$$B=B\cap A=\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \cdots\}$$

形式，因此$B\sim N$。

由此可见，无限集中基数最小的集合为可列集。

定理1.3 任何一个无限集A，它必有一个真子集B，使得$B\sim A$。

证 由定理1.1及1.2知，A包含一个可列的真子集A'，记$A'=\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$，$A=A'\cup M$。令$B=(A'-\{a_1\})\cup M$，显然$B\subset A$。下面建立$B$中元素与$A$中元素的一一对应关系：

对任意$a\in B$，若$a=a_i\in A'$，则让a_i与a_{i+1}对应；若$a\in M-A'$，则让a与其自身对应。因此有$B\sim A$。

例1.1 整数值Z是可列集。

事实上可建立下述的对应关系：

$$\begin{array}{ccccccccc}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \cdots, & 2k, & 2k+1, & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\
0, & -1, & 1, & -2, & 2, & \cdots, & -k, & k, & \cdots
\end{array}$$

因此$Z\sim N$。

例1.2 有理数集Q是可列集。

证 构造一个集合M，它的元素为形式$\pm\dfrac{n}{m}$，其中n为非负整数，m为正整数。集合M可按下述方式列出：

$$M=\left\{0,\ \frac{1}{1},\ -\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ -\frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{1},\right.$$
$$\left.-\frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \cdots\right\}$$

即按分母和分子的和由小到大排列，负分数排在相应的正分数之后，分子和分母和相等的两个正分数，值大的排在前面。这样一来有$M\sim N$。即M为可列集。

由于Q中每一个有理数均可表示为$\pm\frac{n}{m}$的形式，故$Q\subseteq M$。由于Q是无限集，由定理1.2知Q是可列集。

例1.3 实数集R不是可列集。

证 首先证明开区间（0，1）内的实数集与R的基数相等。为此，建立一一对应关系：

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}-1 & x\in\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right]\\[2ex] \dfrac{1}{2(x-1)}+1 & x\in\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right)\end{cases}$$

显然，对每一个$x\in(0,\ 1)$，有唯一的一个y与之对应；反之对任一个y，也有唯一的x与之对应：

$$x=\begin{cases}\dfrac{1}{2(y+1)} & y\geqslant 0\\[2ex] \dfrac{1}{2(y-1)}+1 & y\leqslant 0\end{cases}$$

因此（0，1）$\sim R$。

其次，证明（0，1）中的实数是不可列的。因为对任意$x\in(0,\ 1)$，x可表示为

$$x=0\cdot y_1y_2y_3\cdots$$

其中$y_i\in\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9\}$。假如（0，1）中的实数是可列的，则（0，1）中的实数可列为：x_1，x_2，x_3，…，其中

$$x_j=0\cdot y_{j_1}y_{j_2}y_{j_3}\cdots,\quad j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

令$x=0\cdot b_1b_2b_3\cdots$，其中