

应用数学丛书

应用组合论

刘振宏 编著

国防工业出版社

应用数学丛书

应用组合论

刘振宏 编著

国防工业出版社

(京)新登字106号

内 容 简 介

本书共十一章,除第一章属于基础知识外,从内容来看可以分为三部分。第二章至第六章,属于组合计数的内容,第七章和第八章的部分内容,属于组态的存在性问题,第九章至第十一章及第八章另部分内容则属于组合算法。特别是第十和第十一两章,是近代组合最优化的内容,有着广泛的应用价值和理论意义。

本书和同类书相比,具有两个突出的特点,其一,举例较多,这有助于读者掌握抽象的概念和方法;其二,内容较新,如后三章的内容都是近几十年发展起来的、近代组合数学的重要内容,其中不少是作者及其同事们的成果。

本书适用于运筹学、系统工程、计算机和应用数学专业的师生和科技人员参考使用。

应用数学丛书

应用组合论

刘景宏 编著

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码 100044)

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168毫米 32开本 印张9³/₄ 254千字

1993年 1月第一版 1993年 1月第一次印刷 印数: 0001—2500册

ISBN 7-118-01004-9/O·78 定价: 8.95元

应用数学丛书目录

第一批

- | | | | |
|------------------|------------|-----|----|
| 1. Z 变换与拉普拉斯变换 | <u>关肇直</u> | 王恩平 | 编著 |
| 2. 常微分方程及其应用 | 秦化淑 | 林正国 | 编著 |
| 3. 实变函数论基础 | | 胡钦训 | 编著 |
| 4. 正交函数及其应用 | | 柳重堪 | 编著 |
| 5. 沃尔什函数与沃尔什变换 | <u>关肇直</u> | 陈文德 | 编著 |
| 6. 圆柱函数 | | 刘颖 | 编著 |

第二批

- | | | | |
|------------|-----|-----|----|
| 1. 集合论 | | 程极泰 | 编著 |
| 2. 图论 | | 王朝瑞 | 编著 |
| 3. 概率论 | | 狄昂照 | 编著 |
| 4. 矩阵理论 | 王耕祿 | 史荣昌 | 编著 |
| 5. 复变函数论 | | 杨维奇 | 编著 |
| 6. 逼近论 | 徐利治 | 周蕴时 | 编著 |
| 7. 矢量与张量分析 | 冯潮清 | 赵愉深 | 编著 |
| 8. 应用泛函分析 | | 何浩法 | 编著 |
| | | 柳重堪 | 编著 |

第三批

- | | | | |
|---------------|-----|-----|----|
| 1. 网络理论 | | 张正寅 | 编著 |
| 2. 线性系统与多变量控制 | | 叶庆凯 | 编著 |
| 3. 椭圆函数及其应用 | | 高本庆 | 编著 |
| 4. 拓扑理论及其应用 | 王则柯 | 凌志英 | 编著 |
| 5. 数理逻辑 | | 沈百英 | 编著 |
| *6. 误差理论与数据处理 | | 贾沛璋 | 编著 |
| 7. 随机过程理论及应用 | | 熊大国 | 编著 |
| 8. 线性估计与随机控制 | 卢伯英 | 陈宗基 | 编著 |

IV

9. 渐近分析方法及应用	徐利治	陈文忠	编著
10. 预测的数学方法		张有为	编著
11. 变分法及其应用	叶庆凯	郑应平	编著
12. 应用离散数学		陈文德	编著
13. 多项式与多项式矩阵	王恩平	王朝珠	编著
14. 群论	刘木兰	冯克勤	编著
15. 应用组合论		刘振宏	编著
16. 广义函数及其解析和调和表示	李邦河	李雅卿	编著

* 表示即将出版的书目。

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相联，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将作为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成系统，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前 言

组合论是一个历史悠久的数学分支，由于电子数字计算机的出现和广泛的应用，这门古老的数学分支焕发出新的活力，变得异常活跃，这就使得在理论上和应用上展示了新的面貌。

组合论所研究的内容主要有三个方面：

(1) 离散对象间的某种组态的存在性；

(2) 离散对象间的某种组态的数目；

(3) 在某种最优性的指标下，找出或设计出满足要求的一个最优组态。

前两个问题是古典组合论所研究的内容；后一个问题是属于近代构造数学内容，更确切地说，它属于组合优化范围。

初看起来，组合论所研究的内容似乎比较单纯，但是由于离散对象几乎处处可见，所以涉及到很多其它的学科，如集合论、数论、格论、群论、有限几何、图论、运筹学、概率论和信息论等，从而使组合论又变得非常庞杂，以致于至今没有一套系统的理论，用以处理各种问题。

本书是根据近几年为应用数学系和计算机系的学生讲课时所编写的讲义，以及为运筹学专业和系统工程专业的研究生所编写的讲义综合而成。全书共分十一章。第一章是基础知识，具有一定基础知识的读者，完全可以跳过它。第二章是组合与排列，其中大部分内容高中代数中已有。由于组合与排列要经常用到，所以还是把它做为单独一章，这也是组合论图书的惯例。第二~八章属于古典组合论的内容，但是包含了某些新的结果和方法。为了说明方法，每一章都列举了若干饶有兴趣的例子，用以加深对内容的了解与掌握。第九章是图论中的几个问题，除了这几个问题自身的意义外，它们还是下两章的基础知识。第十章和第十一

章讨论了近三十年来发展起来的一种抽象的组合结构——拟阵，本书没有涉及拟阵的更多性质，而只是建立了拟阵中某些优化问题的算法。由于拟阵是一种抽象的结构，概括了一大类组合优化问题的算法，因此这些算法在实际中是很有用的。

本书所选的这些专题，对于应用数学、计算机科学、运筹学和系统工程专业的学生来说是基本的和有用的；对于在这些领域从事工作的技术人员和教师来说也是有参考价值的。

在工作和教学的实践中，我体会到组合论与其它数学分支不同，它虽然也需要知识，但它更需要智力。组合论中有许多问题，看起来十分简单，甚至用几句话就可以把问题向一个中学生讲清楚，但是要解决问题却不是那么简单，而必须进行深入思考。另外，组合论中有许多饶有兴趣的问题，可以说是一种趣味数学，而在解这些问题时会感到是一种享受和娱乐。因此，学习组合论对增长智力和培养学习数学的兴趣是大有好处的。

最后，我要感谢我的妻子，她在百忙之中不仅负担了繁重的家务劳动，而且为我抄写了本书的手稿。

作 者

目 录

第一章 集合、关系、映射与图	1
§ 1.1 集合的基本概念	1
§ 1.2 集合的基数(势)	4
§ 1.3 集合上的关系	7
§ 1.4 映射或函数	12
§ 1.5 图的基本概念	15
习 题	23
第二章 排列与组合	26
§ 2.1 两个计数法则	26
§ 2.2 排列	27
§ 2.3 组合	31
§ 2.4 排列与组合的生成	33
§ 2.5 棋盘图上的几个组合问题	36
§ 2.6 二项式系数与多项式系数	40
习 题	47
第三章 数函数及其母函数	50
§ 3.1 数函数及其运算	50
§ 3.2 几个重要的数函数	53
§ 3.3 差分多项式	61
§ 3.4 母函数	65
§ 3.5 组合数的母函数	67
§ 3.6 排列数的母函数	70
习 题	72
第四章 递归关系	75
§ 4.1 引言	75
§ 4.2 递归关系的建立	75
§ 4.3 常系数线性递归关系	83

§ 4.4	用母函数法解递归关系	91
§ 4.5	迭代法	98
习 题		102
第五章	反演公式与容斥原理	105
§ 5.1	第一反演公式	105
§ 5.2	莫比乌斯(Möbius)函数	109
§ 5.3	莫比乌斯反演及其应用	119
§ 5.4	容斥原理及其应用	121
§ 5.5	限制排列与棋子多项式	134
习 题		142
第六章	波利亚(Polya)计数定理	144
§ 6.1	群的基本概念	144
§ 6.2	置换群与伯恩赛德(Burnside)定理	146
§ 6.3	波利亚计数定理	153
§ 6.4	波利亚定理的母函数形式	159
习 题		164
第七章	拉姆齐(Ramsey)定理	165
§ 7.1	抽屉原理及其应用	165
§ 7.2	拉姆齐定理	168
§ 7.3	拉姆齐数	174
§ 7.4	图论中拉姆齐型问题	178
习 题		183
第八章	组合设计	185
§ 8.1	有限域	185
§ 8.2	有限几何	190
§ 8.3	拉丁方	195
§ 8.4	区组设计	203
§ 8.5	t -设计与斯坦纳(Steiner)系	207
习 题		212
第九章	图论中的几个问题	214
§ 9.1	最短路问题	214
§ 9.2	匹配与匹配多项式	217

§ 9.3 树	224
§ 9.4 有向树	228
习 题	238
第十章 拟阵中的优化问题	240
§ 10.1 引言	240
§ 10.2 拟阵的定义及其例子	242
§ 10.3 拟阵的基本性质	245
§ 10.4 拟阵的贪饕(greedy)算法	247
§ 10.5 拟阵的最大交	254
§ 10.6 最大权交的算法	262
习 题	270
第十一章 拟阵的装箱(packing)问题	272
§ 11.1 并拟阵	272
§ 11.2 并拟阵的最优基算法	279
§ 11.3 代表系拟阵	283
§ 11.4 有关代表系的扩充	290
§ 11.5 代表系问题的拓广及其应用	295
习 题	299
参考文献	301

第一章 集合、关系、映射与图

§ 1.1 集合的基本概念

一个集合就是一些不同对象的总体，这些对象就称为该集合的元素。当集合中元素的个数为有限时，则称它为有限集，否则称它为无限集。

例如，地球上所有的人就构成一个集合，而每一个人就是该集合的一个元素。

又如，所有自然数构成一个集合，而每一个自然数就是该集合的一个元素。显然，人的集合是有限集，而自然数的集合为无限集。

一般用大写英文字母表示集合，用小写字母表示集合中的元素。表示一个集合有几种方式：

当集合中元素个数较少时，可以用列出它的所有元素的方式表示。如：

$$S = \{a, b, c, d, e\}$$

当集合中元素具有一定的规律时，也可以列出其部分元素，然后用省略号表示其余元素。如

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

表示所有正奇数集合。

表示集合的一个重要方式是，用刻划集合中元素的性质来描述集合。如：

$$S = \{x \mid x \text{ 是偶数}\}$$

表示全体偶数的集合。

必须注意，集合中的元素是确定的，也就是说，给定一个集合等价于给出了该集合中的所有元素。因此，任何一个对象或元素 a ，它或者属于集合 S ，或者不属于集合 S ，二者必居其一。

当 a 属于 S 时, 则记 $a \in S$; 当 a 不属于 S 时, 记为 $a \notin S$ 。如果一集合 S 它不包含任何元素, 则称它为空集, 并记为 $S = \phi$ 。若集合 S 包含所讨论的一切元素, 则称它为全集, 记 $S = E$ 。注意, 由集合的定义可知, 一个集合中任何两个元素是不同的。

给定两个集合 S_1 和 S_2 , 如果 S_1 中每一个元素也是 S_2 中的元素, 则称 S_1 是 S_2 的子集, 并记为 $S_1 \subseteq S_2$ 或 $S_2 \supseteq S_1$; 若 $S_1 \subseteq S_2$ 且 $S_2 \subseteq S_1$ 则称 S_1 和 S_2 相等, 记为 $S_1 = S_2$; 若 $S_1 \subseteq S_2$, 但 $S_1 \neq S_2$, 则称 S_1 是 S_2 的真子集, 并记为 $S_1 \subset S_2$ 或 $S_2 \supset S_1$ 。关于两个集合之间的包含关系有下述性质:

- (1) 若 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, 则有 $A \subseteq C$;
- (2) 若 $A \subseteq B$ 及 $B \subseteq A$, 则有 $A = B$;
- (3) $A \subseteq A$, $\phi \subseteq A$ 。

除集合的包含关系外, 还可以建立集合之间的一些代数运算:

由集合 A 和集合 B 的所有元素组成的集合, 称为 A 和 B 的并集, 并记为 $A \cup B$ 。

例 A 为自然数集合, B 为偶数集合, 则 $A \cup B$ 是由所有非负整数及负偶数组成的集合, 或者

$$A \cup B = \{k, -2k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$$

由集合 A 和 B 的一切公共元素所组成的集合, 称为 A 和 B 的交集, 并记为 $A \cap B$ 。

例 A 是自然数集合, B 是偶数集合, 则 $A \cap B$ 为正偶数组成的集合, 即

$$A \cap B = \{2k \mid k = 1, 2, 3, \dots\}$$

关于集合 A 和 B 的并与交的运算满足下述定律:

- (1) 结合律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

- (2) 交换律

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

(3) 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

用 $A - B$ 表示在集合 A 里而不在集合 B 里的元素全体所组成之集合，并称之为集合 A 对集合 B 的差集。全集 E 对集合 A 的差集，称为 A 的补集，并记为 $\bar{A} = E - A$ 。

例如，若 A 是自然集合， B 为偶数集合，则 $A - B$ 为所有正奇数的集合。又如若 E 为所有整数集合， A 为自然数集合，则 $\bar{A} = E - A$ 为小于等于 0 的整数集合。

显然， $\overline{\bar{\phi}} = E$ ， $\bar{E} = \phi$ ， $\overline{\bar{A}} = A$

设集合 A 和 B 的非公共元素的集合为 $A \ominus B$ ，即 $A \ominus B = (A - B) \cup (B - A)$ ，并称之为 A 和 B 的对称差集。对称差运算 $\ominus$ 满足：

$$(1) \text{ 交换律 } A \ominus B = B \ominus A$$

$$(2) \text{ 结合律 } A \ominus (B \ominus C) = (A \ominus B) - C$$

$$(3) \text{ 分配律 } A \cap (B \ominus C) = (A \cap B) \ominus (A \cap C)$$

$$(4) \quad A \ominus \phi = A$$

$$(5) \quad A \ominus A = \phi$$

关于集合的并、交和补运算的狄·莫根 (De Morgan) 定律是很有用的，该定律为：

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

集合是指不同对象的总体，即集合中任何两个元素是不同的，然而在许多情况下，这一概念还不能满足需要。如把一个图书馆里的书视为一个总体，那么这个总体中的元素未必不同，因为同一个版本的书可能有几本，因而就提出了重集的概念。

一个重集，定义为一些对象的总体，但这些对象不必不同。如 $S = \{a, a, a, b, b, c\}$ 为一个重集。在重集里，一个元素的重数定义为它在该集合中出现的次数。如 a 在 S 中出现三次，因此 a 的重数为 3。 b 的重数为 2。 c 的重数为 1。不在 S 中的元素，可视为它的重数为 0。把重集也简记为不同元素的总

体，只是在元素的前面标上该元素的重数。如

$$S = \{a, a, a, b, b, c\} = \{3a, 2b, c\}$$

类似地可定义重集的包含关系，以及并、交和差的运算：

设 S_1 和 S_2 是两个重集，若 S_1 中每一个元素的重数都不大于 S_2 中对应元素的重数，则称 S_1 包含于 S_2 ，或 S_1 是 S_2 的子集，记为 $S_1 \subseteq S_2$ 。两个重集 S_1 和 S_2 的并集表示为 $S_1 \cup S_2$ ，它的每个元素的重数定义为该元素在 S_1 和 S_2 中重数的最大者。如

$$S_1 = \{3a, c, 2d\}, \quad S_2 = \{2a, b, 2c\}$$

则 $S_1 \cup S_2 = \{3a, b, 2c, 2d\}$

两个重集 S_1 和 S_2 的交集也是一个重集，它的每一个元素的重数定义为该元素在 S_1 和 S_2 中重数的最小者，记为 $S_1 \cap S_2$ 。如上例

$$S_1 \cap S_2 = \{2a, c\}$$

两个重集 S_1 和 S_2 的差，记为 $S_1 - S_2$ ，也是一个重集，它的每一个元素的重数等于它在 S_1 中的重数减去在 S_2 里的重数及 0 中之最大者。如上例

$$S_1 - S_2 = \{a, 2d\}$$

一个重集 S ，如果 S 中每一个元素的重数都是有限数，则称 S 为重数有限的重集，否则称为重数无限的重集。

§ 1.2 集合的基数(势)

两个集合 A 和 B ，若它们的元素之间能建立起一一对应的关系，则说 A 和 B 的基数相同，并记为 $A \sim B$ 。

对有限集而言，一个集合的基数就是它含有元素的个数。若 A 是有限集，用 $|A|$ 表示 A 中元素的个数，即基数。显然 $|\phi| = 0$ 。

设 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ 为自然数集合。若集合 A 满足 $A \sim N$ ，则称 A 为可列集。

定理 1.1 设 A 是一个无限集，则 A 必包含一个可列集作为其子集。

证 从 A 中任取一元素 a_1 ，从 $A - \{a_1\}$ 中任取一元素 $a_2, \dots$ ，

一般地, 从 $A - \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ 中任取一元素 a_{i+1} , 由于 A 是无限集, 故这一过程可以无限地进行下去, 这样就得到一个集合

$$B = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

显然 B 是可列集, 且 $B \subseteq A$ 。

定理1.2 设 A 是可列集, B 是 A 的真子集。若 B 是无限集, 则 B 也是可列集。

证 因 A 是可列集, 故 A 可写为

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

因为 B 是 A 的子集, 故可表示为

$$B = B \cap A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots\}$$

形式, 因此 $B \sim N$ 。

由此可见, 无限集中基数最小的集合为可列集。

定理1.3 任何一个无限集 A , 它必有一个真子集 B , 使得 $B \sim A$ 。

证 由定理 1.1 及 1.2 知, A 包含一个可列的真子集 A' , 记 $A' = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, $A = A' \cup M$ 。令 $B = (A' - \{a_1\}) \cup M$, 显然 $B \subset A$ 。下面建立 B 中元素与 A 中元素的一一对应关系:

对任意 $a \in B$, 若 $a = a_i \in A'$, 则让 a_i 与 a_{i+1} 对应; 若 $a \in M - A'$, 则让 a 与其自身对应。因此有 $B \sim A$ 。

例1.1 整数值 Z 是可列集。

事实上可建立下述的对应关系:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \dots, & 2k, & 2k+1, & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0, & -1, & 1, & -2, & 2, & \dots, & -k, & k, & \dots \end{array}$$

因此 $Z \sim N$ 。

例1.2 有理数集 Q 是可列集。

证 构造一个集合 M , 它的元素为形式 $\pm \frac{n}{m}$, 其中 n 为非负整数, m 为正整数。集合 M 可按下述方式列出:

$$M = \left\{ 0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \right. \\ \left. -\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \dots \right\}$$

即按分母和分子的和由小到大排列，负分数排在相应的正分数之后，分子和分母和相等的两个正分数，值大的排在前面。这样一来有 $M \sim N$ 。即 M 为可列集。

由于 Q 中每一个有理数均可表示为 $\pm \frac{n}{m}$ 的形式，故 $Q \subseteq M$ 。

由于 Q 是无限集，由定理 1.2 知 Q 是可列集。

例 1.3 实数集 R 不是可列集。

证 首先证明开区间 $(0, 1)$ 内的实数集与 R 的基数相等。为此，建立一一对应关系：

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{2(x-1)} + 1 & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

显然，对每一个 $x \in (0, 1)$ ，有唯一的一个 y 与之对应；反之对任一个 y ，也有唯一的 x 与之对应：

$$x = \begin{cases} \frac{1}{2(y+1)} & y \geq 0 \\ \frac{1}{2(y-1)} + 1 & y \leq 0 \end{cases}$$

因此 $(0, 1) \sim R$ 。

其次，证明 $(0, 1)$ 中的实数是不可列的。因为对任意 $x \in (0, 1)$ ， x 可表示为

$$x = 0.y_1 y_2 y_3 \dots$$

其中 $y_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ 。假如 $(0, 1)$ 中的实数是可列的，则 $(0, 1)$ 中的实数可列为： $x_1, x_2, x_3, \dots$ ，其中

$$x_j = 0.y_{j_1} y_{j_2} y_{j_3} \dots, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

令 $x = 0.b_1 b_2 b_3 \dots$ ，其中