研究生教材

随机过程

汪荣鑫　编

西安交通大学出版社

研究生教材

随机过程

汪荣鑫 编

西安交通大学出版社

内　容　提　要

本书是适合工科使用的数学教科书，内容包括随机过程的基本知识，平稳过程的理论和应用，平稳时间序列的线性模型和预报，马尔科夫过程，书后并附有概率论补充知识。

本书在引进概念时强调直观性和物理背景，注意阐明定理和结论的意义和作用，数学处理上力求确切和严密，各章配有大量例题和习题，便于教学和自学。

本书可作高等院校工科各专业研究生或高年级学生教材，也可供科学技术工作者阅读参考。

(陕)新登字 007 号

随　机　过　程

汪　荣　鑫　编

责任编辑　李亚东　李慧芳

*

西安交通大学出版社出版

西安咸宁西路 28 号　邮政编码 710049

西安新华印刷厂印装

陕西省新华书店经销

*

开本 850×1168　1/32　印张 9　字数:226 千字

1987 年 12 月第 1 版　1995 年 6 月第 3 次印刷

印数:9001—12000

ISBN 7—5605—0051—X/O・9　定价:7.80 元

研究生教材总序

研究生教育是为国家培养高层次人才的，它是我国高等教育的最高层次。研究生必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，具有从事科学研究或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是搞好研究生教学的重要环节。为此，我们组织出版这套以公共课和一批新型学位课程为主的研究生教材，以满足当前研究生教学的需要。这套教材的作者都是多年从事教学、科研、具有丰富经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要，充分反映国内外最新学术动态，使研究生学习之后能迅速接近当前科技发展的前沿，以适应“四化”建设的要求；其次，也注意到应有的基本理论和基本内容，以保持学位课程内容的相对稳定性和系统性，并具有足够的深广度。

这套研究生教材虽然从提出选题、拟定大纲、组织编写到编辑出版，都经过了认真的调查论证和细致的工作，但毕竟是第一次出版这样高层次的系列教材，水平和经验都感不足，缺点和错误在所难免。希望通过反复的教学实践，广泛听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院
西安交通大学出版社

前　言

随机过程研究客观世界中随机演变过程的规律性。它以概率论为基础，且是概率论的深入和发展。随着科学技术的发展，它已日益广泛地应用于物理、化学、生物、工业、农业、管理、气象等许多领域。

目前，在高等院校中很多工科专业的研究生都要学习随机过程，甚至对某些专业的高年级本科生也开设此课。

编者曾多次对工科研究生讲授过随机过程。在讲稿的基础上，1985年编写了讲义，多次试用后经修订和补充写成本书。

本书是一本具有工科特色的数学教科书。它既保持随机过程的数学体系和必要的严密性，又尽可能结合工科专业的应用。

本书取材较为全面，但又是最基本和最重要的。它包括随机过程基本知识、平稳过程、马尔科夫过程。与平稳过程有关，我们还介绍了70年代开始应用极为广泛的平稳时间序列时域分析方法。对马尔科夫过程，初步介绍了一些基本概念和方法，重点论述马尔科夫链、泊松过程、维纳过程。为使读者便于阅读，书后附录中介绍了概率论的补充知识。全书内容安排和布局较为合理。

本书采用工科学生较易接受的叙述方法。引进概念时强调它的直观性和物理背景，又注意数学定义的确切。对一些定理和结论注意阐明它的意义和作用，并进行必要的数学证明。

本书中不仅列举了许多例题而且各章还配有大量深度合适的习题。其中包括相当数量的应用实例和一定数量的理论题。有些习题在国内教材中还是少见的。通过学习和作题可以帮助读者加

深理解所学的概念，有利于掌握基本的计算方法，训练读者运用基本理论解决实际问题的能力。书后附有答案。

编者希望把本书写成一本便于教学也便于自学的教材。要求读者具备工科高等数学、线性代数和概率论基本知识。

本书中图与表采用的编号是以章作区分的，如图 1-2 表示第一章第 2 图。公式编号是以节作区分的，如式 (1.3) 表示 § 1 中第 3 式，而不指出所在的章。

讲授全书约需 48 学时。讲授前三章和附录约需 40 学时，附录约需 6 学时。教师可以采用先讲附录再讲正文的方法。为了节省学时，也可以直接从正文第一章开始讲，在讲授过程中需要附录中知识时随时加以补充。另外，讲授第四章约需 8 学时。

本教材的习题答案由吴云江（一、二章）、陈育松(三章)、龙卫江（四章、附录）协助完成。

本书由上海交通大学陶宗英同志和西北电讯工程学院施仁杰同志详细审阅，并提出了很多宝贵意见。在编写过程中我校张文修同志也提出了一些原则性意见和不少有益的建议，同时还得到了同济大学闵华玲同志的帮助。本书的出版得到西安交通大学研究生院和西安交通大学出版社的热情支持和帮助。谨此一并致谢。

本书是已出版的姐妹篇——数理统计的续集。

由于编者水平所限，错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1987年7月

目　录

第一章　随机过程基本概念

在客观世界中有些随机现象表现为带随机性的变化过程，它是随机过程。本章介绍随机过程的概念、概率分布和数字特征等，并介绍随机过程的微积分。

§1　随机过程及其概率分布

一、随机过程概念

在客观世界中有些随机现象表示的是事物随机变化的过程，不能用随机变量或随机矢量描绘，需用一族无限多个随机变量描绘，这就是随机过程。

例1　某人扔一枚分币，无限制的重复地扔下去。要表示无限多次扔的结果，我们不妨记正面为1，反面为0。第n次扔的结果是一个随机变量X_n，其分布$P\{X_n=1\}=P\{X_n=0\}=\frac{1}{2}$。无限多次扔的结果是一个随机过程，可用一族相互独立随机变量$X_1,X_2,\cdots$或$\{X_n,n\geqslant1\}$表示。如果此人实际地扔了无限多次作为第一盘，所得结果可用点图表示

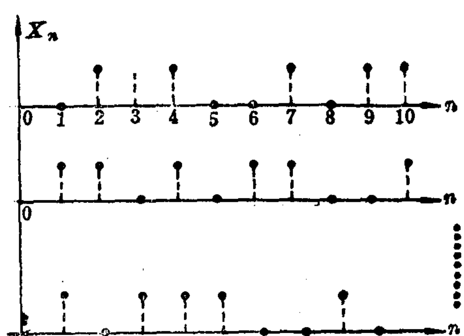


图 1-1

(见图1-1)，再扔无限多次作为第二盘，所得结果可以用另一点图表示，等等。扔一盘(包含无限多次)画出点图的形状带有随机性。

例 2 当 t ($t\geqslant0$)固定时，电话交换站在$[0, t]$时间内来到的呼唤次数是随机变量，记为 $X(t)$。$X(t)$服从参数为 λt 的泊松分布，其中 λ 是单位时间内平均来到的呼唤次数，而 $\lambda>0$。如果 t 从0变到∞，t 时刻前来到的呼唤次数需用一族随机变量$\{X(t), t\in[0, \infty)\}$表示，是一个随机过程。对电话交换站作一次试验观察可以得到一条表示 t 以前来到的呼唤曲线 $x_1(t)$，这是一条非降的阶梯形曲线，在有呼唤来到的时刻阶跃地增加1(假定在任一呼唤来到的时刻不可能来到多于一次呼唤)。再作第二次试验观察又可得到另一条阶梯形曲线$x_2(t)$；…；作第 n 次试验观察得到一条阶梯形曲线 $x_n(t)$；等等。一次试验所得阶梯形曲线的形状具有随机性。

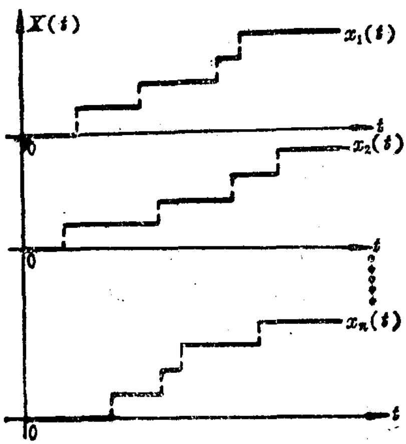


图 1-2

在例1中每一张点图和例2中每一条阶梯形曲线，叫作一个**样本函数**或一条**样本曲线**。样本函数是表示一次试验结果的函数。对随机过程进行一次试验观察，出现的样本函数是随机的。概括地说，**随机过程是一族(无限多个)随机变量；另一方面，它是某种随机试验的结果，而试验出现的样本函数是随机的。**

下面再举两个随机试验结果是函数的例子。

例 3 热噪声电压。电子元件或器件由于内部微观粒子(如电子)的随机热运动所引起的端电压，称为热噪声电压。现在以

电阻的热噪声电压为例。以$\{X(t), t\in[0,\infty)\}$表示热噪声电压。进行一次长时间测量得到一条电压-时间曲线$x_1(t)$，为一条样本曲线；再进行一次试验得到另一条样本曲线$x_2(t)$；…；第n次试验得到样本曲线$x_n(t)$；等等（见图 1-3）。一次试验所得到的样本曲线是随机的。

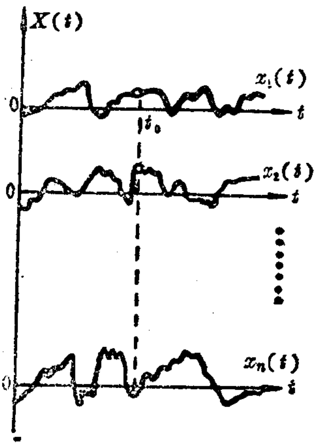


图1-3

$\{X(t), t\in[0,\infty)\}$怎样看成由一族随机变量构成的呢？我们固定$t=t_0$，考察$X(t)$在t_0的数值$X(t_0)$，第一次试验值为$x_1(t_0)$，第二次试验值为$x_2(t_0)$，…。显然，$X(t_0)$是一个随机变量（见图 1-3）。于是，固定t时热噪声电压$X(t)$是一个随机变量，而t变化时$\{X(t), t\in\infty\}$是一族随机变量，因此$X(t)$是一个随机过程。

例 4 纺纱机纺出一条长为l的细纱。由于纺纱过程中随机因素的影响，它各处横截面的直径是不同的。记$X(u)$是坐标为u处横截面的直径，$0\leqslant u\leqslant l$。作实际试验，纺出的第一根纱的各处横截面直径$x_1(u)$，纺出的第二根纱的各处横截面直径$x_2(u)$，…，纺出的第n根纱各处横截面直径$x_n(u)$，等等（见图 1-4）。一次试验

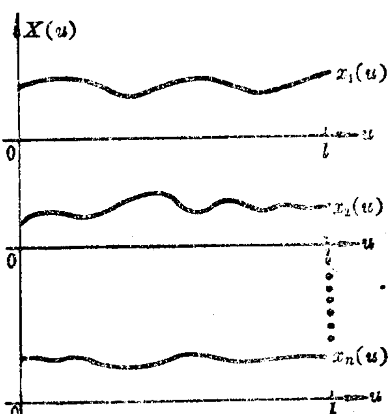


图 1-4

得到的样本曲线是随机的。

另一方面，固定 $u=u_0$，$X(u_0)$ 的值在各次试验中分别取 $x_1(u_0),x_2(u_0),\cdots,x_n(u_0)$，所以 $X(u_0)$是一个随机变量。如此，$\{X(u),\ 0\leqslant u\leqslant l\}$可以看成一族随机变量，是一个随机过程。

下面举一个可以用解析式表示的例子。

例 5 具有随机初位相的简谐波 $X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Phi)$，$-\infty<t<\infty$，其中 a 与 ω_0 是正常数，而Φ服从在区间$[0,2\pi]$上的均匀分布。因为 t 固定时，$X(t)$是随机变量，所以$\{X(t),\ -\infty<t<\infty\}$是一族随机变量。另一方面，对随机变量$\Phi$作一次试验得到一个试验值$\varphi$，$x(t)=a\cos(\omega_0 t+\varphi)$就是一条样本曲线。如：$\varphi=0$ 时，$x_1(t)=a\cos\omega_0 t$；$\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$ 时，$x_2(t)=a\cos\left(\omega_0 t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$；$\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$时，$x_3(t)=a\cos\left(\omega_0 t+\dfrac{3\pi}{2}\right)$；等等（见图 1-5）。因而，从两种不同角度看，$X(t)$都是随机过程。

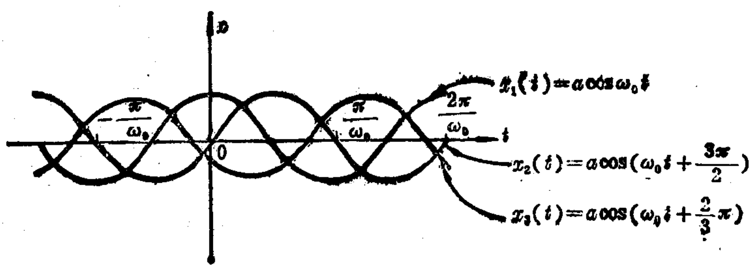


图 1-5

记T是实数轴$(-\infty,\infty)$上的一个子集，且包含无限多个数。随机过程是一族随机变量，可用$\{X(t),t\in T\}$表示。T称为随机过程的参数集。从前面例子中已看到，随机过程也表示随机试验的结果，而一次试验出现的样本曲线是随机的。

随机过程$\{X(t),t\in T\}$还可以看成自变量是 t，因变量是随

机变量的函数，所以随机过程亦称为随机函数。随机过程按其原意是随时间 t 而随机地变化的过程，参数 t 取为时间，即是参数为时间的随机函数。但是，习惯上把参数不是时间的随机函数也称为随机过程，如例 4 中的纱的直径。为方便起见，有时还把参数 t 叫作时间。

下面从概率空间的角度阐述随机过程的数学定义。设（Ω，$\mathscr{F}$，P）是一个概率空间，T是一个实数集。$\{X(t,\omega),\ t\in T,\ \omega\in\Omega\}$是对应于 t 和 ω 的实数，即为定义在 T 和 Ω 上的二元函数。若此函数对任意固定的 $t\in T$，$X(\omega,t)$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上随机变量，则称$\{X(t,\omega),\ t\in T,\ \omega\in\Omega\}$是随机过程。

对随机过程 $X(t,\omega)$，若 t 固定，它是随机变量，工程上有时称为**随机过程在 t 时刻的状态**〔注 1〕；若 ω 固定，它是 t 的函数，称为**随机过程的样本函数或样本曲线**，也称为**现实（曲线）**。在随机过程的数学定义中样本空间 Ω 通常可以理解为样本函数的全体〔注 2〕，而每一条样本曲线作为一个基本事件 ω。以例 3 为例，把样本曲线 $x_1(t)$作为 ω_1，改写为 $X(t,\omega_1)$； 样本曲线 $x_2(t)$作为 ω_2，改写为 $X(t,\omega_2)$；…； 样本曲线 $x_n(t)$作为 ω_n，改写为 $X(t,\omega_n)$； 等等。全体样本函数$\{x(t)\}$构成样本空间Ω，即全体$\{X(t,\omega)\}$构成样本空间Ω。当 $\omega=\omega_1$ 时，$X(t,\omega_1)$就是 $x_1(t)$；当 $\omega=\omega_2$ 时，$X(t,\omega_2)$就是 $x_2(t)$，…； 当 $\omega=\omega_n$ 时，$X(t,\omega_n)$就是 $x_n(t)$； 等等。对例 1，例 2，例 4，例 5 同样地可以把样本空间Ω理解为样本函数的全体。

再看一个简明例子。如果在例 5 中，随机变量Φ的分布改为离散分布，它的分布列为

注 1　在有些数学书上把随机变量 $X(t,\omega)$（其中 t 固定）称为随机过程在 t 时刻的**截口**。本书为叙述形象化起见，采用**状态**这一名称。

注 2　这仅是对样本空间 Ω 的一种理解方法，对于具体给出的随机过程还可有其它理解法，见第 6 页注。

Φ	0	π
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

此时仅有两条样本曲线 $x_1(t)$，$x_2(t)$（见图 1-6）。按上面理解Ω的方法，Ω由两条曲线$x_1(t)$和$x_2(t)$构成；如果分别记为ω_1和ω_2，有 $\Omega=(\omega_1, \omega_2)$，而 $P(\omega_1)=\frac{1}{2}$，$P(\omega_2)=\frac{1}{2}$。$\{X(t,\omega),\ t\in(-\infty,\infty),\omega\in\Omega\}$是随机过程。此时，$X(t,\omega_1)=x_1(t)$，$X(t,\omega_2)=x_2(t)$[注]。

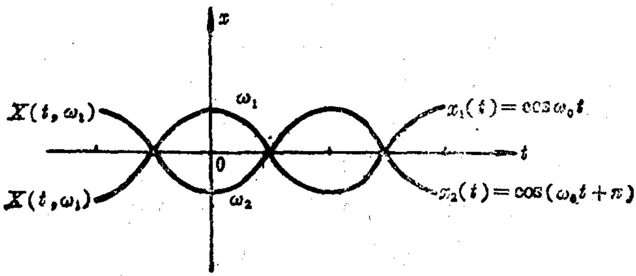


图 1-6

当 t 和 ω 都固定时，$X(t, \omega)$是确定的实数，称为**样本函数在 t 处的数值**。如上例中 $X(0, \omega_1)=a\cos 0=a$，$X(0, \omega_2)=a\cos\pi=-a$，$X(1,\omega_1)=a\cos\omega_0$，$X(2, \omega_1)=a\cos 2\omega_0$。需要注意，这里 ω_0 是正常数。

随机过程可简记为$\{X(t),\ t\in T\}$，通常并不指出概率空间Ω。今后我们都采用这一记法。此时样本函数用$x(t)$表示，进行多次试验所得样本函数记为 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，等等。随机过程 $X(t)$，当 t 固定时，为一个随机变量，即是在 **t 时刻的状态**。随机变量 $X(t)$（t 固定，且 $t\in T$）所有可能取的值构成一个实数集，称为**随机过程的状态空间或值域**；而每一个可能取的值称为

注　在此例中空间Ω也可取为0和π两个数，即$\Omega=(0,\pi)$；此时样本空间就不是样本函数的全体了。

一个**状态**〔注〕。如例1中状态空间由0与1二个数构成；例3中噪声电压的状态空间是$(-\infty, \infty)$。

随机过程可以根据参数集T和状态空间的情况进行分类。参数集T可分为离散集（即它所包含的数有可列无限多个）和连续集两种情况，状态空间亦同样可分为离散与连续两种情况。因而随机过程可分成下列四类：

(1) **离散参数、离散状态的随机过程**。如例1，$T=\{1,2,\cdots\}$，状态空间由0与1二个数构成。

(2) **离散参数、连续状态的随机过程**。如独立标准正态随机变量序列，$T=\{1,2,3,\cdots\}$，状态空间为$(-\infty, \infty)$。

(3) **连续参数、离散状态的随机过程**。如例2，$T=[0,\infty)$，状态空间由0，1，2，…构成。

(4) **连续参数、连续状态的随机过程**。如例3，$T=[0,\infty)$，状态空间为$(-\infty, \infty)$。

通常，离散参数集取$\{1,2,\cdots\}$或$\{0,1,2,\cdots\}$，或$\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$；而连续参数集取$[a,b]$或$[0,\infty)$，或$(-\infty,\infty)$。离散参数的随机过程亦称为**随机序列**。

二、有限维分布族

随机过程$\{X(t), t\in T\}$在每一时刻t的状态是一维随机变量；在任意两个时刻的状态是二维随机矢量；…。其统计特性可用当t取任意一个固定值时$X(t)$的一维分布；当t取任意两个固定值时$X(t)$的二维分布；…等来描绘。所有这些一维分布、二维分布，……的全体可用以表示随机过程的概率分布。

对任一固定$t\in T$

注　需要注意区分**随机过程在t时刻的状态**和**随机过程的各个状态**。前者是指当t固定时$X(t)$这一随机变量，后者指所有这些随机变量$X(t)$ $(t\in T)$可能取的各个数值。简言之，前者指随机变量，后者指随机变量可能取的值。希读者阅读本书时不要混淆。

$$F(x;t)=P\{X(t)\leqslant x\}$$

称为随机过程 $X(t)$的一维分布函数。描绘过程在任意 t 时刻状态的统计特性。

对任意两个固定的 $t_1,t_2\in T$

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2)=P\{X(t_1)\leqslant x_1,\ X(t_2)\leqslant x_2\}$$

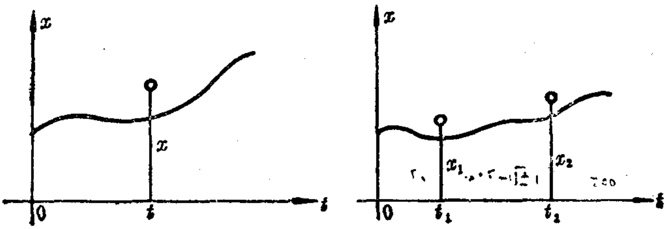
称为随机过程 $X(t)$的二维分布函数。描绘过程在任意两个时刻状态的统计特性。

一般，对于任意固定的 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,\ X(t_n)\leqslant x_n\}$$

称为**随机过程 $X(t)$的 n 维分布函数**。描绘过程在任意 n 个时刻状态的统计特性。

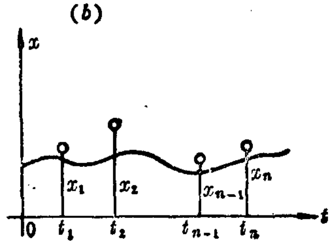
图 1-7(a)、(b)、(c)分别表示分布函数中的事件。



(a) (b)

图 1-7

特殊地，若任意一个固定 $t\in T$，任意两个固定 t_1，$t_2\in T$，…，任意 n 个固定 $t_1,t_2\cdots,t_n\in T$，对应的 $X(t)$，$(X(t_1),\ X(t_2))^{\tau}\cdots$，$(X(t_1),\ \cdots,\ X(t_n))^{\tau}$〔注〕具有连续概率分布，那么，



(c)

注 本书的矢量都是指列矢量，并用黑体字母表示。

$$f(x;t)=\frac{\partial}{\partial x}F(x;t)$$

称为随机过程 $X(t)$ 的一维分布密度；

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}F(x_1,x_2;t_1,t_2)$$

称为随机过程 $X(t)$ 的二维分布密度；

一般

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=\frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}F(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

称为**随机过程 $X(t)$ 的 n 维分布密度**。

随机过程 $X(t)$ 的一维分布函数，二维分布函数，…，n 维分布函数,等等的全体$\{F(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,\ t_2,\cdots,t_n),\ t_1,\ t_2,\cdots,t_n\in T,\ n\geqslant 1\}$称为**随机过程 $X(t)$ 的有限维分布函数族**。它描绘随机过程 $X(t)$ 的概率分布。同样地，分布密度的全体$\{f(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\geqslant 1\}$，称为**随机过程 $X(t)$ 的有限维分布密度族**。它也描绘随机过程的概率分布。

有限维分布函数族具有如下性质：

(1) **对称性** 对$(1,2,\cdots,n)$的任意一种排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$，有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=F(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_n};\ t_{j_1},t_{j_2},\cdots,t_{j_n})$$

事实上由

$$P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n\}$$
$$=P\{X(t_{j_1})\leqslant x_{j_1},X(t_{j_2})\leqslant x_{j_2},\cdots,X(t_{j_n})\leqslant x_{j_n}\}$$

立刻可以得到。

(2) **相容性** 对 $m<n$，有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m;\ t_1,t_2,\cdots,t_m)$$
$$=F(x_1,x_2,\cdots,x_m,\infty,\cdots,\infty;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)$$