高等工科数学

陈雄南 主编

1

上海科学技术文献出版社

高等工科数学

第一册

一元微积分

陈雄南 主编
曹助我 洪继科
闻人宜 [redacted]

上海科学技术文献出版社

高等工科数学

第一册

陈雄南 主编

曹助我 洪继科
闻人宜 韩仲豪 编

上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路2号)
新华书店经销
昆山亭林印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 16 字数 387,000
1989年8月第1版 1989年8月第1次印刷
印数：1—3,200

ISBN 7-80513-177-5/G·10
定价：8.10元
《科技新书目》170-238

前　　言

在上海高校工科数学协作组的亲切关怀下，我们着手编写了这套《高等工科数学》系列教材．我们的指导思想是，要着重体现工科数学课程教学基本要求和近代工程技术特点，强调专业需要和现代计算，在内容的精简、更新和能力的培养方面作出努力．至于在教材体系方面暂不作较大的更动，希望在今后的教学实践中，和大家共同探索．

全书分若干册出版，它们是一元微积分，多元微积分，线性代数和计算方法，概率论与数理统计，数学物理方法及部分应用数学课程内容．供普通高校和成人高校工科学生学习用，也可作为广大工程技术人员自学参考．本书为第一册，介绍一元微积分．书中除常见内容外，还补充了经济数学的有关知识，并将近似方法与数值计算另列一章，在教学上确有其方便之处．本册由陈雄南主编，曹助我（上海海运学院）、闻人宜（上海铁道学院）、洪继科（上海技术师范学院）、韩仲豪（上海建材学院）分工写出初稿．经多次反复讨论修改后，由陆子芬教授主审定稿．

本书编写过程中，曾得到上海市高教局陈华乾同志的多方关照．特此鸣谢．

限于编者水平，书中谬误难免，敬请不吝指教．

一九八七年六月廿九日

目 录

第一章　函数与极限

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学．所谓函数关系就是变量之间的依赖关系．极限方法则是研究变量的一种基本方法．本章将介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质．

§1　变量与函数

一、函数概念

1．常量与变量

当我们观察各种自然现象或技术过程的时候，我们常常会遇到许多量，如时间、长度、面积、体积、质量、速度、压力、温度、分子数等．这些量一般可分为两种：一种是在过程进行中保持不变的量，这种量称为常量；还有一种是在过程进行中会起变化的量，称为变量．

例如，质点作自由落体运动时，自由落体的下降时间和下降距离是变量，而落体的质量在这一过程中可以看作为常量．

通常用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、t 等表示变量．

变量的概念是微积分学中的基本概念．在《自然辩证法》里，恩格斯曾指出："笛卡尔的变量是数学的转折点，就是由于有了变量，才在数学中引进了运动和辩证法，同时也是微积分学所

必需的”.

2. 函数概念

在研究自然现象及解决技术和数学问题中，往往同时有几个变量在变化着. 它们并不都是独立变化的，而存在着一种依赖关系，现在我们就两个变量的情形举出几个例题.

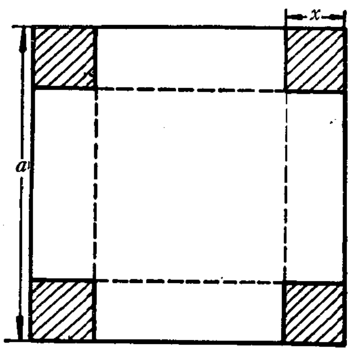

图 1-1

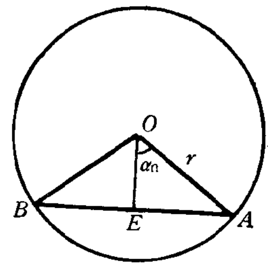

图 1-2

例 1 无盖盒问题. 设用一块边长为 a 的正方形铁皮做成一个高为 x 的无盖盒(图 1-1)。这盒的容积 V 和高 x 存在着依赖关系:

$$V=x(a-2x)^2$$

例 2 设有半径为 r 的圆，内接于该圆的正 n 边形边长 $AB=a_n$，周长 $s_n=na_n$(图 1-2). 圆内接正 n 边形的周长 s_n 与边数 n 存在着依赖关系:

$$s_n=2nr\sin\frac{\pi}{n}$$

例 3 某运输公司规定货物的吨公里运价为: 在 a 公里以内，每公里 k 元; 超过 a 公里，每增加 1 公里为 $\frac{4}{5}k$ 元. 运价 m 和里程 s 之间存在着依赖关系:

$$m=\begin{cases} ks, & 0<s\leqslant a \\ ka+\dfrac{4}{5}k(s-a), & s>a \end{cases}$$

以上的依赖关系中，我们看到一些共同特征. 首先，在这些变量中，有的量在所讨论的问题中可以独立变化，即所谓自变量，如盒高 x、边数 n、里程 v 等. 它们并有一定的变化范围：

$$\left\{x\,\middle|\,0<x<\frac{a}{2},\ x\in R\right\}、\{n\,|\,n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\}、$$

$$\{s\,|\,0<s<+\infty,\ s\in R\}.$$

有的量是随着自变量的变化而改变的，即所谓因变量，如盒的容积 V、圆的内接正 n 边形的周长 s_n、货物的吨公里运价 m. 它们也有一定的变化范围. 其次，对一定范围内的每一个自变量值，通过依赖关系，总能得到一个确定的因变量值.

抽去上面几个例子中所考虑的量的实际意义，它们都表达了两个变量之间的依赖关系，这种依赖关系给出了一种对应法则，两个变量间的这种对应法则就是函数概念的实质.

定义 1 如果当变量 x 在其取值范围内任意取定一个数值时，量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，就称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. x 叫自变量，y 也叫因变量.

自变量 x 的变化范围叫做这个函数的定义域，记为 D.

如果自变量取某一数值 $x=x_0\in D$，函数有确定的值 y_0 和它对应，那末就说函数在 x_0 处有定义. 因此函数的定义域 D 也就是使函数有定义的实数的全体.

函数是由定义域及对应法则所确定的，因此研究函数时必须注意它的定义域. 在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的，如例 1、2、3. 在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，这时我们约

定：函数的定义域就是使算式有意义的自变量的一切实数值．如 $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$，$D=\{x|x|<1,\ x\in R\}$．或记作 $D=(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$．

自变量取定义域内的某一值 $x=x_0\in D$ 时，函数的对应值 $y=y_0$，叫做函数当自变量取该值时的*函数值*．对于所有 $x\in D$ 的函数值全体，叫做函数的*值域*，记为 Y．

如果自变量在定义域内任取一个确定值时，函数都只有一个确定值和它对应，这种函数叫做*单值函数*，否则叫*多值函数*．以后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数．

在函数定义中，并没有要求自变量变化时函数值一定要变，重要的是：当自变量 x 在定义域中任取一数值时，函数有确定的值和它对应．因此，我们可以把常量当作函数来看待，即常量是这样的一个函数，它对于自变量的一切值来说，函数值都相同．

在函数记号 $y=f(x)$ 中，字母"f"表示 y 与 x 之间的对应法则即函数关系，它们是可以任意采用的．但如果考察几个不同的函数时，为了避免混淆，就不要用同一个字母来表示不同的函数．如记 $y=f(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=F(x)$，$y=y(x)$，…．

一般地，如果函数由 $y=f(x)$ 表示，则当自变量取定义域内某一个定值 x_0 时，对应的函数值用记号

$$f(x_0) \quad 或 \quad y|_{x=x_0}$$

表示．

例 4 求函数 $f(x)=x^2-3x+5$ 在 $x=2$，$x=x_0+1$，$x=x_0+h$ 各点处的函数值．并写出 $f(x_0+h)-f(x_0)$ 的表达式．

解 $f(2)=(2)^2-3(2)+5=3$

$f(x_0+1)=(x_0+1)^2-3(x_0+1)+5=x_0^2-x_0+3$

$f(x_0+h)=(x_0+h)^2-3(x_0+h)+5$

$$
\begin{aligned}
&= x_0^2+(2h-3)x_0+(h^2-3h+5) \\
f(x_0+h)-f(x_0) &= [(x_0+h)^2-3(x_0+h)+5] \\
&\quad -[(x_0)^2-3(x_0)+5] \\
&= (2x_0-3)h+h^2
\end{aligned}
$$

例 5 求函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 在 $x_1=\frac{\pi}{2}$ 和 $x_2=\frac{\pi}{3}$ 处的函数值，并比较函数值 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小.

解 $f(x_1)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

$$f(x_2)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\therefore\ f(x_1)<f(x_2)$$

3. 函数的表示法

在函数定义中，用什么方法来表达函数，并没有加以限制.表达函数的常用方法主要有以下几种.

(1) 公式法　即用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系. 前面例 1 至例 5 都是用公式法表示的函数. 公式法的优点是简明准确，便于理论分析. 但公式法表示的函数不够直观，并在有些实际问题中遇到的函数关系，很难甚至不能用公式法表示.

(2) 表格法　在实际应用中，常将一系列的自变量值与对应的函数值列成表，如平方表、对数表、三角函数表等. 表格法的优点是可以直接从自变量的值查到对应的函数值. 但表中所列数据往往不完全，同时用表格法表示的函数不便于进行理论分析.

(3) 图示法　对于函数 $y=f(x)$，在其定义域内取一个 x 值时，对应地就有一个 y 值. 在平面直角坐标系 xOy 中以这一对 x、y 值为坐标定出一个点 $M(x, y)$. 一般当 x 变化时，点 M

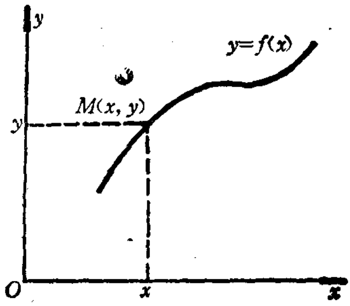

图 1-3

就在平面上运动并描成一条曲线. 这条曲线叫做函数 $y=f(x)$ 的图形, 如图 1-3 所示.

反过来说, 如果坐标平面上的曲线与任何一条平行于 y 轴的直线至多只有一个交点, 那末这条曲线表示一个单值函数, 当自变量值等于曲线上点的横坐标时, 对应的函数值即等于该点的纵坐标. 因此函数也可由坐标平面上的曲线来表示. 气象站中的温度记录器, 是借助仪器中的自动笔在纸带上所绘的一条温度变化曲线, 它表示了温度 T 与时间 t 的函数关系, 这就是用图示法表示函数的例子. 图示法的优点是鲜明直观, 但不便于作理论分析.

以后我们所讨论的函数, 常用公式法表示.

注:

1° 用公式法来表示函数时, 有时需要在不同的范围中用不同的式子来表示一个函数, 即所谓分段函数.

例 6 迪里赫勒 (Dirichlet) 函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

例 7

(1) $$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

(2) $$y=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}$$

(3) 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

函数图形如图 1-4 所示.

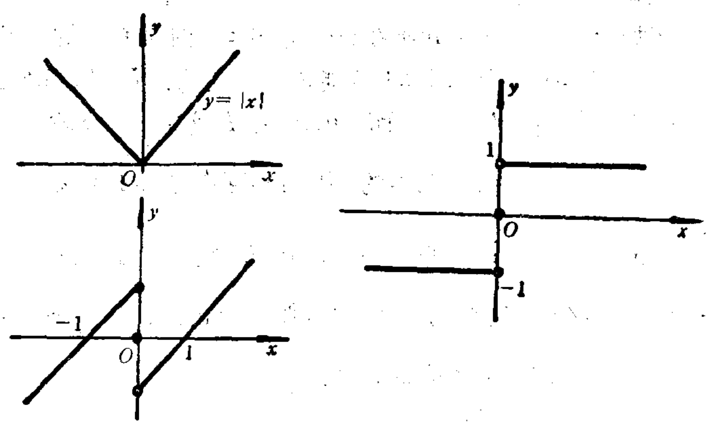

图 1-4

符号函数是一个很重要的函数，如 $y=|x|=x\operatorname{sgn} x$.

在不同范围用不同式子来表示一个(不是几个!)函数，不仅与函数的定义并无矛盾，而且有现实的意义．在自然科学及工程技术中，经常会遇到分段函数.

2° 有些函数的因变量 y 可用自变量 x 的一个数学表达式直接表示出来，而有些函数的因变量 y 与自变量 x 的函数关系是用一个方程来表示，如 $x^2+y^2-1=0$，通常表示为 $F(x, y)=0$. 用前一种形式表示的函数称为显函数，用后一种形式表示的函数称为隐函数.

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数$f(x)$在D内有定义. 如果存在正数M, 使得当x取D内的任何一个值时, 对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

就说函数$f(x)$在D内有界; 如果这样的M不存在, 则说函数$f(x)$在D内无界.

例如, 函数$f(x)=\sin x$在$(-\infty, +\infty)$内是有界的, 因为无论x取何实数, $|\sin x|\leqslant 1$都能成立. 这里$M=1$(当然也可取大于1的任何数作为M, 而$|\sin x|\leqslant M$成立). 函数$f(x)=\frac{1}{x}$在开区间$(0, 1)$内是无界的, 因为不存在这样的正数M, 使$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$对于$(0, 1)$内的一切$x$值都成立. 但是$f(x)=\left|\frac{1}{x}\right|$在区间$(1, 2)$内是有界的, 例如可取$M=1$而使$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$对于区间$(1, 2)$内的一切$x$值都成立.

2. 函数的单调性

如果函数$f(x)$在区间(a, b)内随着x增大而增大, 即对于任意两点$x_1, x_2\in(a, b)$, 且$x_1<x_2$时, 有

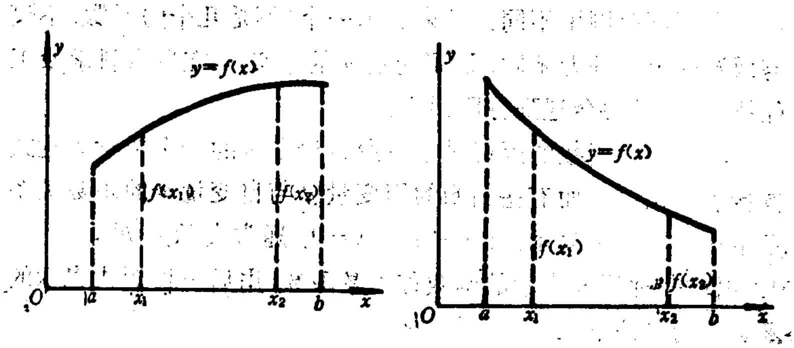

图 1-5

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则说函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调增加；如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 增大而减小，即对于任意两点 $x_1, x_2\in(a, b)$，且 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则说函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调减少，如图 1–5 所示.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 内单调增加，在区间 $(-\infty, 0]$ 内单调减少；但在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内不单调. 又如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加(图 1–6).

3．函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内任意 x 都满足 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 叫做偶函数. 如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 叫做奇函数.

例如，$f(x)=x^2$ 是偶函数，因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. 又例如，$f(x)=x^3$ 是奇函数，因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

偶函数的图形对称于 y 轴，而奇函数的图形对称于原点，如图 1–7 所示.

虽然函数 $y=\sin x$ 是奇函数，函数 $y=\cos x$ 是偶函数，但它们的叠加函数 $y=\sin x+\cos x$ 既非奇函数，也非偶函数.

4．函数的周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的数 l，使得关系式

$$f(x+l)=f(x)$$

对于定义域内的任何 x 值都成立，则 $f(x)$ 叫做周期函数，l 是 $f(x)$ 的周期. 通常我们说周期函数的“周期”是指最小正周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\mathrm{tg}x$ 是以 π 为周期的周期函数.

图 1–8 表示一个周期为 l 的周期函数. 在这函数定义域内