工程数学的内容、方法与技巧

线性代数

赵德修 穆汉林 谭代富 张志军

华中理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

《工程数学的内容、方法与技巧》丛书

线性代数/赵德修等　主编

武汉:武汉华中理工大学出版社,1996 年 8 月

ISBN 7-5609-1352-0

Ⅰ　工…

Ⅱ　赵…

Ⅲ　线性代数

Ⅳ　O151.2

《工程数学的内容、方法与技巧》丛书

线性代数

赵德修等　主编

责任编辑　林化夷　李立鹏

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山　邮编:430074)

新华书店湖北发行所经销

中南三〇九印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/32　印张:7.625　字数:168 000

1996 年 8 月第 1 版　1999 年 4 月第 3 次印刷

印数:13 001—17 000　　定价:8.50 元

ISBN　7-5609-1352-0/O·155

内容提要

本书是《工程数学的内容、方法与技巧》丛书第一册，内容以数学教学大纲为依据，与现行同济大学版《线性代数》教材同步，各章分为知识要点、释疑解难、范例分析、习题提示几大部分，书末附有自测题及答案与提示. 本书可供大学本科、专科学生和自学者作为学习《线性代数》课程的参考书和教师参考.

《工程数学的内容、方法与技巧》丛书
主　编　黄光谷　焦岷江　胡友思　王世敬
副主编　徐蕴珍　方金华　孙清华　吴汉民

序

我怀着喜悦的心情为《工程数学的内容、方法与技巧》丛书和《大学数学考试指南》各书作序，它们集众家之长，并具有各自的特色，主要表现在如下三个方面.

一、这些书的作者们在高等院校从事高等数学和工程数学教学多年，具有丰富的教学实践经验. 编写的这些书，是他们耕耘在大学数学教学园地上辛勤劳动的结晶.

二、这些书紧扣高等院校现在所使用的教材，是配合这些教材的较好的教与学的辅导书. 文字叙述精炼，通俗易懂，便于自学.

三、这些书考虑到不同层次的要求. 由于这些书是根据国家教委制定的高等学校《工科数学课程教学基本要求》及近年来《全国工学、经济学硕士生入学考试数学考试大纲》的要求编写的，所以它们既能作为高等院校工科各专业的本(专)科学生学习高等数学和工程数学各科的自学辅导书或习题课教材，也能作为报考工科、理科及经济、农林等类硕士研究生的数学复习资料之用.

由于这些书具有以上三大特点，因此，我相信它们的出版定能受到众多的大学生、自学者及大学数学教师、工程技术人员等的欢迎和青睐，它们将为高等学校数学教材的百花园中又增添一批奇葩.

华中理工大学教授　**林化夷**

1996 年 3 月　武汉

前　言

国家要实现四个现代化，关键在人才．而人才来自于教育．数学教育是教育事业的重要组成部分．不少学生和自学者对数学有畏惧心理，虽日夜苦学，然而不得要领．本丛书就是为了帮助读者解决学习工程数学中的三门主课的困难而编写的，它凝聚了 30 多位编审者多年的教学经验和良苦用心．

本丛书包括线性代数，复变函数，概率论与数理统计，共 3 册．各册与工程数学教材同步，可与现行教材配套使用．各章按四大部分编写，力求做到："知识要点"提纲挈领，便于读者系统地掌握有关基础知识；"释疑解难"抓住要害，能解决读者在学习中遇到的疑难问题；"范例分析"题型典型，有分析引导或注释说明，可培养读者的基本技能；"习题提示"恰到好处，对西安交大《线性代数》教材各章习题较难者作了提示，以减少读者做题的困难．

编写此丛书，得到华中理工大学出版社，武汉纺织工学院，国家教委高校工科数学课程教学指导委员会委员、《应用数学》杂志副主编兼编辑部主任林化夷教授，武汉市洪山区教委贺贤座副主任等人的关心和支持，在此我们对他们表示衷心的感谢！

本书编委还有（以姓氏笔画为序）：李刚、杨云、肖伟、张志军、张秋谨、欧贵兵、罗加宏、姜明华、姚钲、黄斌、喻国华、赖湘麟、熊德文、谭代富、穆汉林、魏正红．由于我们水平有限，加上时间仓促，书中可能有不妥之处，恳请读者提出宝贵意见，以便再版时修改．

编　者

1996 年 3 月

目　录

第一章　n 阶行列式

知 识 要 点

一、内容提要

1. 全排列及其逆序数

2. n 阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列；t 为这个排列的逆序数；$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列取和.

n 阶行列式 D 亦可定义为

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中 t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

3. 对换

4. 行列式的性质

1）行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D'$.

2）互换行列式的两行（列），行列式变号.

3）如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于零.

4) 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

5) 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

6) 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式为零.

7) 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a_{1i}') & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a_{2i}') & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a_{ni}') & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8) 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数,然后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式的值不变.

5. 行列式按行(列)展开

1) 余子式、代数余子式.

2) 关于代数余子式的重要性质:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & \text{当 } i = j; \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & \text{当 } i = j; \\ 0, & \text{当 } i \neq j, \end{cases}$$

其中
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j; \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

6. 克莱姆法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq 0$，那么它有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \ j = 1,2,\cdots,n.$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所得到的行列式.

二、基本要求与重点、难点

1. 基本要求

1）掌握 n 阶行列式的定义、性质，掌握计算 n 阶行列式的基本方法和技巧.

2）掌握克莱姆法则，并能运用克莱姆法则解线性方程组.

2. 重点与难点

重点 n 阶行列式的计算.

难点 行列式的定义.

释疑解难

1. 计算 n 元排列的逆序数常用的方法有哪些?

答 常用的方法有:

1) 分别算出排在 $1,2,\cdots,n-1,n$ 前面比它大的数码之和,即分别算出 $1,2,\cdots,n-1,n$ 这 n 个元素的逆序数,这 n 个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

2) 分别算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和,即算出排列中每个元素的逆序数,这每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

3) 如果在不要求计算排列的逆序数、而只要求讨论排列的奇偶性时,则可以利用对换,将所给排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 变成标准排列 $12\cdots n$,根据对换次数的奇偶性来确定所给排列的奇偶性. 如排列 523146879,对换 1 与 5,得 123546879,再对换 4 与 5,得 123456879,再对换 7 与 8,得 123456789. 共对换 3 次,故所给排列为奇排列.

2. 行列式有哪些常用公式?

答 常用公式有:

1) 范德蒙行列式,即

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j).$$

2) 三角行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \cdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \iddots & \\ a_{n1} & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & \iddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3. 计算行列式的方法有哪些？

答 计算行列式的方法通常有：

1）依定义计算行列式.

2）用对角线法计算行列式，它只适用于二、三阶行列式.

3）利用一些简单的、已知的行列式来计算行列式. 例如，利用三角形行列式；一行（列）全为零的行列式；两行（列）成比例的行列式；范得蒙行列式…等等.

4）利用行列式性质对行列式进行变形，变成已知的或容易计算的行列式.

5）利用按行（列）展开的性质（或拉普拉斯定理）对行列式进行降阶来计算行列式.

6）用数学归纳法计算行列式.

7）综合运用上述各法来计算行列式.

其中 3），4），5），6），7）最常用.

4. 二、三阶行列式的计算可按对角线法则进行，为什么 n 阶（$n>3$）行列式没有类似的法则？

答 对于四阶行列式，如果按对角线法则（如图 1-1），那么只能写出八项，然而依定义，四阶行列式是 $4!=24$ 项的代数和. 另外，这样写出的项的符号也不一定正确. 譬如次对角线上元素的乘积项为 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$，其列排列 4321 之逆序数为 6，应带正号，而不是负号.

因此，在计算 $n(>3)$ 阶行列式时，再不能应用对角线法则.

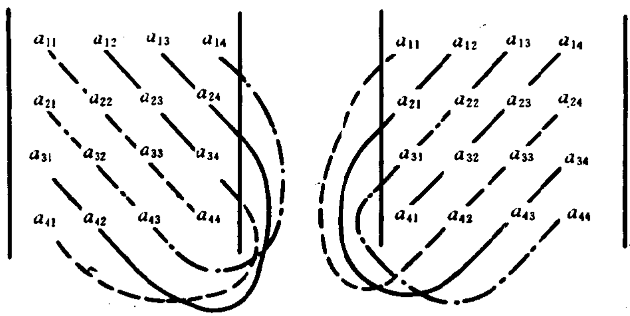

图 1-1

5. 计算行列式时利用行列式的性质很重要，试进一步加以说明.

答 计算行列式应根据具体情况具体分析，但总的原则是利用行列式的性质将所给行列式化成简单的，已知的或容易计算的行列式. 下面列举几个常用到的情况.

1）将行列式各行（列）分别乘以一个数统统加到某一行（列）上去. 比如爪型行列式（设 $a_i \neq 0, i=2,3,\cdots,n$）

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ b_2 & a_2 & & & \\ b_3 & & a_3 & & \\ \cdots & & & \ddots & \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix},$$

那么将第 i 列的 $-b_i/a_i$ 倍 $(i=2,3,\cdots,n)$ 统统加到第 1 列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix},$$

其中 $c_1=a_1-(\frac{b_2c_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_nc_n}{a_n})$，$\therefore D_n=c_1a_2\cdots a_n$.

2）逐行(列)相加减．比如计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix},$$

从第 $n-1$ 行直到第一行,开始每一行乘以 -1 加到下一行,得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot n.$$

. 3）加边法．此法大多适用某一列(行)有一个相同的字母.
比如计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+m & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+m & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+m \end{vmatrix}, \tag{1}$$

添加一行一列,得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+m & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+m & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+m \end{vmatrix},$$

用第一行的-1倍加到其它各行，得爪型行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ -1 & m & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & m & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & m\end{vmatrix}, \qquad (2)$$

当$m=0$时，由(1)式，知$D_n=0$；

当$m\neq0$时，在(2)式右端中将第2列直到第n列每列的$1/m$倍统统加到第一列，得

$$D_n=\begin{vmatrix}c & a_1 & \cdots & a_n\\ & m & & \\ & & \ddots & \\ & & & m\end{vmatrix}=cm^n,$$

其中 $$c=1+\frac{1}{m}(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

4) 将某一行(列)的倍数分别加到其它行(列). 这一步骤前面已经用过，不再举例.

5) 按某一行(列)展开. 比如计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1\\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2\\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x & x & x & \cdots & 1\end{vmatrix},$$

从第2行开始，每行乘以-1加到上一行，得

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x & x & \cdots & 1\end{vmatrix},$$

按最后一行展开,得

$$D_n=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1\end{vmatrix},$$

再从第2行开始,每行乘以-1加到上一行,得

$$D=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}x & & & & 0\\ 1-x & x & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & x & \\ 0 & & & 1-x & 1\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}x^{n-2}.$$

范例分析

一、计算排列的逆序数

例1 计算下列各排列的逆序数,并讨论它们的奇偶性.

1) 217986354;

2) $(2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$;

3) $n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$.

解 1) 分别算出排在1,2,…,8,9前面比它大的数码之

和，即分别算出 1,2,…,8,9 这 9 个元素的逆序数.

1 的前面比 1 大的数有一个(2)，故逆序数为 1；

2 排在首位，逆序数总为 0；

3 的前面比 3 大的数有四个(7,9,8,6)，故逆序数为 4；

4 的前面比 4 大的数有五个(7,9,8,6,5)．故逆序数为 5；

5 的前面比 5 大的数有四个(7,9,8,6)，故逆序数为 4；

6 的前面比 6 大的数有三个(7,9,8)，故逆序数为 3；

7 的前面没有比 7 大的数，逆序数为 0；

8 的前面比 8 大的数有一个(9)，故逆序数为 1；

9 是最大数，逆序数为 0.

于是排列的逆序数为

$$t = 1 + 0 + 4 + 5 + 4 + 3 + 0 + 1 + 0 = 18.$$

故所给排列为偶排列.

2) 分别算出排列中每个元素前面比它大的数码之和，即算出排列中每个元素的逆序数.

$2k$ 排在首位，逆序数为 0；

1 的前面比 1 大的数有一个($2k$)，故逆序数为 1；

$2k-1$ 的前面比 $2k-1$ 大的数有一个($2k$)，故逆序数为 1；

2 的前面比 2 大的数有两个($2k,2k-1$)，故逆序数为 2；

$2k-2$ 的前面比 $2k-2$ 大的数有两个($2k,2k-1$)，故逆序数为 2；

…

$k-1$ 的前面比 $k-1$ 大的数有 $k-1$ 个($2k,2k-1,\cdots,k+2$)，故逆序数为 $k-1$；

$k+1$ 的前面比 $k+1$ 大的数有 $k-1$ 个($2k,2k-1,\cdots,k+2$)，故逆序数为 $k-1$；

k 的前面比 k 大的数有 k 个($2k,2k-1,\cdots,k+1$)，故逆序数

为 k.

于是排列的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + (k-1) + (k-1) + k$$
$$= [2(1 + k - 1)(k-1)]/2 + k = k^2.$$

故所给排列的奇偶性与 k 的奇偶性相同.

3) n 是最大数,逆序数为 0;

$n-1$ 的前面比 $n-1$ 大的数有一个(n),故逆序数为 1;

$n-2$ 的前面比 $n-2$ 大的数有两个($n,n-1$),故逆序数为 2;

…

3 的前面比 3 大的数有 $n-3$ 个($n,n-1,\cdots,4$),故逆序数为 $n-3$;

2 的前面比 2 大的数有 $n-2$ 个($n,n-1,\cdots,4,3$),故逆序数为 $n-2$;

1 的前面比 1 大的数有 $n-1$ 个($n,n-1,\cdots,3,2$),故逆序数为 $n-1$;

于是排列的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1)$$
$$= [n(n-1)]/2.$$

当 $n=4k$、$4k+1$ 时,$[n(n-1)]/2$ 为偶数,所给排列为偶排列;

当 $n=4k+2$、$4k+3$ 时,$[n(n-1)]/2$ 为奇数,所给排列为奇排列.

二、计算(证明)行列式

1. 用定义计算(证明)

例 2 用行列式定义计算