简明高等数学

成人高等专科教材

◎主编 祖国城 周振荣

上册

哈尔滨工程大学出版社

成人高等专科教材

简 明 高 等 数 学

上 册

主 编 祖国[illegible] 周振荣
副主编 高振滨 沈 艳 杨海[illegible]
主 审 马孝[illegible]

哈尔滨工程大学出版社

内　容　简　介

本书是专为成人教育(夜大、函授、自学考试)各专业编写的大专教材。编者积多年成人教育的教学经验,对教学内容的处理,进行了大胆地改进。本教材叙述精练、通俗简明、易教易学,极具成人教育的特点。本书选用的例题典型、题型丰富、习题量大,特别强调了微积分的基本功训练,在各节后配有习题,各章后附有复习题,复习题分 A、B 两类,其中 B 类是选择、填空题,书末附有答案,对习题中典型题及较难的题在下册中作了详细的解答。

全书分上、中、下三册,上册是一元函数微积分,中册包括:空间解析几何、多元微积分、级数、微分方程及微积分在经济学中的应用,下册是习题辅导。

简明高等数学
JIANMING GAODENG SHUXUE
主编　祖国城　周振荣
责任编辑　尚鲜利
哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通街 145 号　哈工程大学 11 号楼
发行部电话(0451)2519328　邮编:150001
新　华　书　店　经　销
哈尔滨理工大学西区印刷厂印刷
*
开本　787mm×1 092mm　1/32　印张 9.3125 字数 204 千字
1998 年 6 月第 1 版　　1998 年 6 月第 1 次印刷
印数:1～2 000 册
ISBN 7-81007-894-7
定价:　12.00　元

前　言

目前，在成人教育中高等数学教材馈乏，在我校成教院的支持下汇集有多年授课经验的老师集体编写了这套教材。

本教材语言精练、通俗简明、易教易学，极适合成人教育使用。在内容编排上注重归纳和总结，以便于记忆和掌握；在习题的编排上特别强调了微积分基本功的训练；习题量大，题型丰富，除每节后附有习题外，每章还配有复习题，为了加深对概念的理解和提高学生的基本计算能力，以便适于各种考试的需要，我们在复习题中增加了 B 类题，即选择和填空题。

本书适合自学考试、函授、夜大、职大的各类专业使用，也可作为高等院校专科各专业的高等数学教材。对于工科专业的学生最后一章可以删去，对于财经类学生第七章可以作为参考。

参加本书编写的有谢槐林、周振荣、董衍习、林锰、沈艳、王锋、卜长江、范崇金、高振滨、杨海欧、于涛、祖国城；其中周振荣、祖国城、范崇金做了大量的组织和研讨工作。

由于我们水平有限，书中难免有不妥之处，恳切希望广大读者批评指正。

编者

目　　录

第一章　函数 …… 1
§1　集合与数轴上的区间 …… 1
§2　函数 …… 4
§3　几种特殊的函数 …… 9
§4　反函数 …… 13
§5　复合函数与初等函数 …… 15
复习题一 …… 23
第二章　极限与连续 …… 27
§1　数列及其极限 …… 27
§2　函数极限与连续的概念 …… 31
§3　极限的运算法则 …… 39
§4　两个重要的极限 …… 42
§5　无穷小的比较 …… 47
§6　间断点与闭区间连续函数的性质 …… 49
§7　分段函数的极限与连续性 …… 53
复习题二 …… 57
第三章　导数与微分 …… 63
§1　导数的概念 …… 63
§2　函数的和差积商的导数及反函数的导数 …… 70
§3　复合函数的导数 …… 75
§4　高阶导数 …… 80
§5　隐函数的导数与由参数方程所确定的函数的导数 …… 84
§6　分段函数的导数 …… 91

§ 7　微分 …………………………………………… 98
复习题三………………………………………… 102
第四章　导数的应用………………………………… 110
§ 1　微分中值定理………………………………… 110
§ 2　罗比达法则…………………………………… 115
§ 3　函数的单调性与极值………………………… 121
§ 4　最值及其应用………………………………… 129
§ 5　曲线的凹向与拐点…………………………… 134
§ 6　函数图形的画法……………………………… 139
§ 7　曲线的曲率…………………………………… 143
复习题四………………………………………… 146
第五章　不定积分…………………………………… 155
§ 1　原函数与不定积分…………………………… 155
§ 2　第一换元法…………………………………… 165
§ 3　第二换元法…………………………………… 177
§ 4　分部积分法…………………………………… 184
复习题五………………………………………… 190
第六章　定积分及其应用…………………………… 198
§ 1　定积分的概念及性质………………………… 198
§ 2　积分上限函数………………………………… 206
§ 3　牛顿—莱布尼兹公式………………………… 211
§ 4　定积分的分部积分法和换元法……………… 215
§ 5　广义积分……………………………………… 222
§ 6　定积分在几何上的应用……………………… 227
§ 7　定积分在物理上的应用举例………………… 242
复习题六………………………………………… 245
习题答案…………………………………………… 250

第一章　函数

函数是高等数学中最基本的概念和主要研究对象.作为全书的准备,本章以初等函数为中心,给出有关函数的基本知识.

§1　集合与数轴上的区间

1.1　集合

集合　在数学中,集合是指具有某种特性事物的全体.集合中的事物称为这个集合的元素.本书用大写字母 A,B,C 等表示集合;用小写字母 a,b,c 等表示集合中的元素.若 a 是 A 的元素,记为 $a\in A$,否则记为 $a\overline{\in}A$.

集合的表示法:

(1)列举法　按任意顺序列出集合的所有元素,并用花括号{　}括起来.

例如:由数 0,1 两个元素组成的集合可记为

$$A=\{0,1\},\text{则 } 0\in A,1\in A,2\overline{\in}A.$$

(2)描述法　设 $p(x)$ 为某个与 x 有关的条件或法则,满足 $p(x)$ 的一切 x 所构成的集合记为

$$A=\{x\mid p(x)\}.$$

例如:$B=\{x\mid x^2-1=0\}$这个集合实际上只有两个元素

$-1,1$. 即 $B=\{-1,1\}$.

空集 为了方便，称没有元素的集合为空集，记为 $\varnothing$.

例如：$\{x \mid x^2=-1$ 且 x 为实数$\}=\varnothing$.

评注 一个集合可视为一个箱子，其中的元素视为箱子中的东西. 空集 $\varnothing$ 可视为一个空箱子.

子集 若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$. 对任何集合 A，则空集 $\varnothing$ 和 A 是 A 的两个天然子集.

例如：若 $A=\{0,1,2\}$，则 A 有 8 个不同的子集：$\varnothing$，A，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0,1\}$，$\{1,2\}$，$\{0,2\}$.

集合的相等 设 A,B 为集合，若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$. 此时 A,B 两个集合中的元素是完全相同的.

1.2 集合的运算

两个集合的并 若 A,B 为集合，则集合

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

称为 A 与 B 的并集.

两个集合的交 若 A,B 为集合，则集合

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

称为 A 与 B 的交集.

例如：若 $A=\{0,1\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{2,3\}$，则

$$A\cup B=\{0,1,2,3\},\ B\cup C=\{1,2,3\}=B,$$

$$A\cap B=\{1\},\ A\cap C=\varnothing,\ B\cap C=\{2,3\}=C.$$

例如：对任何集合 A，有

$$A\cup\varnothing=A,\qquad A\cap\varnothing=\varnothing.$$

例如：对任何集合 A 和 B，有

$$A \subset A \cup B, \qquad B \subset A \cup B,$$
$$A \cap B \subset A, \qquad A \cap B \subset B.$$

1.3 实数集与区间

实数集 由一切实数构成的集合称为实数集，记为 $\boldsymbol{R}$. 全体实数与数轴上的点一一对应. 本书若不加说明则数皆为实数.

$\boldsymbol{R}$ 的下列子集称为区间：

开区间 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$，

$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$，

$(a,+\infty)=\{x \mid a<x\}$，

$(-\infty,+\infty)=\boldsymbol{R}$.

闭区间 $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$.

半开区间 $[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$，

$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$，

$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$，

$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x\}$.

评注 有些章节无需指明是开区间或闭区间，这时我们统称为区间，并用 I 来表示.

1.4 绝对值

定义 设 $x\in \boldsymbol{R}$，则

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

称为 x 的绝对值. 在数轴上 $|x|$ 表示点 x 到原点 O 的距离.

绝对值的几个重要性质：

(1) $|x|\geqslant 0$；

(2) $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$;

(3) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$;

(4) $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$;

(5) $|x|>a \Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$.

习 题 1—1

1. 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, 求

(1) $A \cup B$;　　(2) $A \cap B$.

2. 设 $A=\{2,3,5,a\}$, $B=\{1,3,4,b\}$, $A \cap B=\{3,4,5\}$, 求 a 和 b.

3. 简化下列集合:

(1) $(0,1) \cup [1,2)$;　　(2) $(0,1) \cap (\frac{1}{2},2)$;

(3) $(1,2) \cap (2,3)$;　　(4) $(-1,1] \cap [1,2)$.

4. 用区间表示满足下列各不等式的 x 构成的集合:

(1) $2<|x|<\pi$;　　(2) $|2x+1|<3$;

(3) $1 \leqslant |x+2|<3$;　　(4) $3<|2x-1| \leqslant 5$.

5. 判别下列数集中有无最大数和最小数:

(1) $(-\pi,2) \cup (0,\pi]$;　　(2) $(-\infty,1) \cap (-2,+\infty)$;

(3) $\{x \mid 0 \leqslant \log_5 x \leqslant 1\}$;　　(4) $\{x \mid \sqrt{(x-1)^2} \leqslant 1\}$.

§2 函数

2.1 函数的定义

定义 设 D_f 是一个数集, f 是一个规则, 若 f 使 D_f 中的任何一个数都对应唯一一个实数 y, 则称 f 是 D_f 上的函

数. 这个在 f 之下由 x 唯一决定的 y 记为 $f(x)$，即

$$y=f(x).$$

$f(x)$ 也称为 f 在 x 处的函数值，f 在 D_f 上的一切函数值的集合

$$V_f=\{f(x)\mid x\in D_f\}$$

称为函数 f 的值域；D_f 称为 f 的定义域.

评注 (1) D_f 上的一个函数可视为一个造数机器（图1－1）其定义域 D_f 是它的原料库，而其值域 V_f 是它的产品库.

(2) 由于 x 在 D_f 中可以任意取值，故 $y=f(x)$ 也就随之发生变化，因而有些书也将 y 称为 x 的函数.

例如：若 $D_f=(-\infty,+\infty)$，规则 f 是求数 x 的平方，则 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，可记为 $y=f(x)=x^2$.

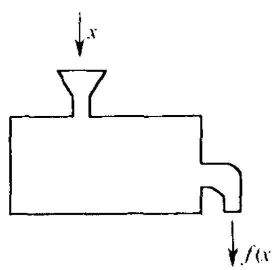

图1－1

例如：若 $D_f=(0,+\infty)$，规则 f 是求平方为 $x\in D_f$ 的数，则 f 不是 D_f 上的函数，因为有两个不同的数 $\sqrt{x}$ 和 $-\sqrt{x}$ 的平方都是 x.

例 1 若 $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(1)$，$f(0)$，$f(-1)$，$f(x^2)$，$[f(x)]^2$，以及 $f[f(x)]$.

解 形式上，所给的函数关系可写成

$$f(\quad)=\frac{1-(\quad)}{1+(\quad)},$$

因而

$f(1)=\frac{1-1}{1+1}=0$;　　　$f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1$;

$f(-1)=\frac{1-(-1)}{1+(-1)}=\frac{2}{0}$ 没意义;

$f(x^2)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$;　　　$[f(x)]^2=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$;

$$f[f(x)]=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}=\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}=x.$$

2.2 函数的定义域

有时我们只给出函数关系 $y=f(x)$,没指出其定义域,此时我们约定其定义域为关系式 $f(x)$ 所允许的一切 x 所构成的集合.

例 2 求 $y=f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ 的定义域 D_f.

解 $D_f=\{x\mid x^2-3x+2\neq 0\}=\{x\mid x\neq 1,x\neq 2\}$
$=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

例 3 求函数 $y=f(x)=\frac{1}{\lg(x+3)}$ 的定义域.

解 $D_f=\{x\mid x+3>0$ 且 $x+3\neq 1\}$
$=\{x\mid x>-3$ 且 $x\neq -2\}$
$=(-3,-2)\cup(-2,+\infty)$.

例 4 求函数 $y=\sqrt{x^2-x+1}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解 因为 $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ 对任何 x 都成立,故 $\{x\mid x^2-x+1\geqslant 0\}=(-\infty,+\infty)$,于是

$$D=\{x\mid x^2-x+1\geqslant 0\}\cap\{x\mid -1\leqslant\frac{2x-1}{7}\leqslant 1\}$$
$$=(-\infty,+\infty)\cap\{x\mid -7\leqslant 2x-1\leqslant 7\}$$

$=(-\infty,+\infty)\cap\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 4\}$
$=[-3,4]$.

2.3 函数的相同

若两个函数 f 和 g 的定义域相同，即 $D_f=D_g$，而 f 和 g 的对应规则也一样，即对于任意的 $x\in D_f$，都有 $f(x)=g(x)$，则称 f 和 g 是相同的函数.

$f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$ 是不同的函数，因为 $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $D_g=(0,+\infty)$，尽管当 $x>0$ 时，$f(x)=g(x)$.

2.4 分段函数

一般函数在其全部定义域内只对应一个公式，但有些函数其定义域分成几个部分，每个部分各对应一个公式，这种函数称为分段函数.

评注 分段函数虽然通过几个公式表达，但不能认为是几个函数，而应理解为这几个公式共同表达一个函数.

例 5 设某台公用电话通话不能超过 5 分钟，2 分钟内收费 2 元，以后每多一分钟加 2 元，试将收费 y(元)表示成通话时间 x(分钟)的函数.

解

$$y=\begin{cases}2, & 0<x\leqslant 2;\\ 4, & 2<x\leqslant 3;\\ 6, & 3<x\leqslant 4;\\ 8, & 4<x\leqslant 5.\end{cases}$$

例 6 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

求 $f(0),f(-1),f(\frac{2}{\pi})$.

解 $f(0)=0$; $f(-1)=(-1)^2\sin\dfrac{1}{-1}=-\sin 1$;

$$f(\frac{2}{\pi})=(\frac{2}{\pi})^2\sin\frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi^2}.$$

2.5 隐函数

一般函数通常是用 $y=f(x)$ 的表达式给出的，这种函数称为显函数，例如 $y=x^2$，$y=\lg(1+x)$. 而有些函数是通过 y 与 x 的一个方程给出的，这种函数称为隐函数. 例如 $2x+3y+1=0$ 或 $xy=1$ 都是隐函数.

一个隐函数若能解出 y 来，则称这种隐函数是可以显化的，但大多数隐函数是不能显化的，就是能显化，也往往是多值的，这时我们理解为这个隐函数隐藏了多个函数. 例如隐函数 $x^2+y^2=1$ 可以理解为它隐藏了两个函数

$$y=f_1(x)=\sqrt{1-x^2} \text{ 及 } y=f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}.$$

例 7 求隐函数 $x^2+y^2-2y=3$ 的定义域.

解 原方程化为 $y^2-2y+(x^2-3)=0$，解 y 得

$$y=\frac{2\pm\sqrt{4-4(x^2-3)}}{2}=1\pm\sqrt{4-x^2}.$$

于是其定义域

$$\begin{aligned}D&=\{x\,|\,4-x^2\geqslant 0\}=\{x\,|\,x^2\leqslant 4\}\\&=\{x\,|\,|x|\leqslant 2\}\\&=[-2,2].\end{aligned}$$

习　题　1—2

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1-x}$；　(2) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\sqrt{3x+2}$；　(4) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$；

(5) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；(6) $y=\lg(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$；

(7) $y=\lg(\lg x)$；　(8) $y=\sqrt{2-|x|}+\lg x$；

(9) $y=\arcsin\frac{x-2}{3}$；　(10) $x^2-y+y^2=1$.

2. 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1; \\ \frac{1}{2}, & x=1; \\ x^2, & 1<x\leqslant 3,\end{cases}$$

求 $f(0)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(1)$，$f(2)$ 及 D_f.

§3　几种特殊的函数

3.1　有界函数

定义 1　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在一个正常数 M 使不等式

$$|f(x)|\leqslant M \qquad (x\in I)$$

成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是有界的，否则称 $f(x)$ 在 I 上是无界的.

由于对任何实数都有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，故 $\sin x$，

$\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界.

例 1 证明函数 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界.

证 由于对任何 x,即 $x\in(-\infty,+\infty)$有

$$(|x|-1)^2=|x|^2-2|x|+1=x^2-2|x|+1\geqslant 0,$$

即
$$\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\leqslant 1,$$

故 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界.

评注 函数的有界性是相对于某个区间而言的,当然这个区间也可以是定义域,如例 1.

例 2 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$[0.001,+\infty)$上有界,在$(0,+\infty)$上无界.

证 因为 $0.001\leqslant x<+\infty$,故 $0<\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{0.001}=1\ 000$,即 $0<\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1\ 000$,因此 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$[0.001,+\infty)$上有界.

若 $x\in(0,+\infty)$,即 $0<x<+\infty$,于是 $0<\dfrac{1}{x}<+\infty$,即 $\left|\dfrac{1}{x}\right|<+\infty$(不是常数),即不满足 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$,因此 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,+\infty)$上无界.

评注 由于 $|f(x)|\leqslant M\Leftrightarrow -M\leqslant f(x)\leqslant M$,故有界函数的几何意义是函数 $y=f(x)$的图形在区间 I 上夹在两条水平直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间。

3.2 单调函数

定义 2 设 $f(x)$在区间 I 上有定义,若当 x 在 I 上由小变大时,$f(x)$由小变大(由大变小),则称 $f(x)$在区间 I 上单

调增加(减少). 单调增与单调减函数统称为单调函数.

评注 (1) $f(x)$在区间I上单调增加(减少)相当于对任何$x_1,x_2\in I$,且$x_1<x_2$时,有$f(x_1)<f(x_2)$($f(x_1)>f(x_2)$).

(2) 由评注(1)可知,单调增函数的图形是从左下到右上的;单调减函数的图形是以左上到右下的.

例如:$f(x)=x^2$在$(0,+\infty)$上是单调增的,在$(-\infty,0)$上是单调减的,但在其定义域$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数.

例如:$f(x)=\lg x$在$(0,+\infty)$上是单调增的;$g(x)=\log_{\frac{1}{10}}x$在$(0,+\infty)$上是单调减的.

3.3 周期函数

定义3 设$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,若存在非零常数T,使$f(x+T)=f(x)$对任何实数x恒成立,则称$f(x)$为周期函数,满足这个等式的最小正数T,称为这个周期函数的周期.

评注 (1) 周期函数图形的特点是,在x轴上以任意点为起点向左右两边依次截成以周期T为长的小区间,则每个小区间上函数的图形都有相同的形状.

(2) 若周期函数$f(x)$的周期是T,则$Af(Bx+C)+D$的周期是$\dfrac{T}{|B|}$(其中A,B为非零常数),如若$f(x)$的周期是3则$f(2-4x)$的周期是$\dfrac{3}{|-4|}=\dfrac{3}{4}$.

例如:$\sin x$的周期是2π,则$4\sin(\omega x+\varphi_0)(\omega>0)$的周期是$\dfrac{2\pi}{\omega}$,$\mathrm{tg}x$的周期是$\pi$,则$2\mathrm{tg}(3x+4)$的周期是$\dfrac{\pi}{3}$.

3.4 奇函数与偶函数

定义4 设$f(x)$的定义域D_f是关于原点对称的,若对