實變函數

周民强編著

實變函數

周民強編著

儒林圖書公司 印行

實變函數

編著者：周民強
原出版者：北京大學出版社
出版者：儒林圖書有限公司
地　　址：台北市重慶南路一段121號8樓23室
電　　話：3118971-3・3144000
郵政劃撥：0106792-1
吉富印刷廠有限公司承印
板橋市三民路二段正隆巷46弄7號

行政院新聞局局版台業字第4336號
1991年5月初版
NT$　180

序

由于教學工作的需要，作者編寫了《實變函數》課程的講義. 幾年來在使用中作過不少更改. 鑒于目前國内同類書籍為數不多，這次修訂出版，可考慮作為教學參考書或試用教材.

《實變函數》是數學系三年級學生的必修課，是近代分析數學的基礎，其内容似應以實分析的基本知識為主，同時注意與后繼課程適當配合. 因此本書試以 n 維歐氏空間及其上的實值函數為對象，介紹 *Lebesgue* 測度與積分理論. 教學實踐説明這樣做是可行的. 書中標有(＊)的部分，在使用中可根據教學的具體情況適當取舍.

實變函數的内容雖是微積分的繼續深化，但在思想方法上卻有着較大的飛躍. 為使學生能較好的適應這一過渡，適當加強訓練是一個重要環節. 因此，本書配備了相當數量的習題，并力求使這些習題與課程的基本内容有較為密切的配合. 正文中列入的某些例題，也可幫助學生提高自學和解題能力，并開闊思路.

在編寫本書的過程中，學習了兄弟院校的教材，也參閱了國外同類的書籍.

周民強

1984. 7.

引　言
（談談 Riemann 積分）

實變函數的中心內容是 Lebesgue(1875－1941)測度與積分理論，它是 Riemann(1826－1866)積分的推廣與發展，創立于二十世紀初期，為近代分析奠定了基礎. 因而，在這里對 Riemann 積分理論作一簡單回顧，將會有助于我們今后的學習.

在數學史上，第一個提出用分割區間、作和式的極限來嚴格地定義積分的要推 Cauchy(1789－1857). 他考察的積分對象是在$[a,b]$上的連續函數，并用連續函數的中值性質來推導積分的存在性(他還提出用極限來定義函數在無界區域上的積分以及函數具有瑕點的積分).

然而 Cauchy 關于積分存在性的證明只適用于函數至多有有限個不連續點的情形. 于是，對于具有無窮多個不連續點的函數的積分存在性問題引起了許多學者的興趣.

在對積分學發展起過推動作用的早期的工作中，應該提到 Fourier (1768－1830)關于三角級數的工作. 在 1807 年他指出，任意一個定義在$[-\pi,\pi]$上的函數 $f(x)$可表示為三角級數：

$$a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_n\sin nx + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \cdots + b_n\cos nx + \cdots,$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x. \end{aligned}\right. \qquad n = 0, 1, \cdots.$$

不過，這一陳述缺乏嚴格的論證. 1837 年 Dirichlet(1805—1859)對此提出了一些條件，其中特別提到了函數的可積性.

Riemann 在研究三角級數時，注意到上述工作，并特別討論了函數的可積性問題，他不先假定函數是連續的，而去探求一個函數可積與否是什么性態？從這樣一個角度出發，他在 1854 年的論文“關于一個函數展開成三角級數的可能性”中，給出了積分的定義以及函數可積的充要條件，這一條件，后來由 Darboux(1842—1917)以更加明確的形式給出.

設 $f(x)$是定義在$[a,b]$上的有界函數. 作分劃

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

并令

$$\left.\begin{aligned} M_i &= \sup\{f(x): x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\}, \\ m_i &= \inf\{f(x): x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\}, \end{aligned}\right. \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\overline{S}_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad \underline{S}_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

我們考慮 Darboux 上積分與下積分：

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf_\Delta \overline{S}_\Delta, \quad \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup_\Delta \underline{S}_\Delta.$$

如果這兩個值相等，則稱 $f(x)$在$[a,b]$上是 Riemann 可積的，記其公共值為

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

稱它為 $f(x)$在$[a,b]$上的 Riemann 積分.

若令$|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1}: i = 1, 2, \cdots, n\}$，則 $f(x)$在$[a,b]$上是 Riemann 可積的充分且必要條件是：

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = 0. \tag{1}$$

Riemann 積分的重要性是不言而喻的，它對于處理諸如逐段連續的函

數以及一致收斂的級數來說是足够的，并至今仍然是微積分教程的主要內容之一. 然而隨着 Cantor(1845—1918)關于集合論的一系列工作的創始，出現了具有各種"奇特"性質的函數. 對此不僅在研究函數的可積性，而且在積分理論的處理上還發生了許多困難. 下面就 Riemann 積分理論中的幾個主要方面來作一些簡要分析.

（一）可積函數的連續性

上面提到，函數的可積性是與(1)等價的，由于(1)式涉及兩個因素：分割小區間長度(x_i-x_{i-1})以及函數在其上的振幅(M_i-m_i). 因此，為使(1)成立，粗略說來，就是在$|\Delta|\to 0$的過程中，其振幅(M_i-m_i)不能縮小的那些相應項的子區間的長度的總和可以很小(Riemann 注意到，定義在$[a,b]$上的單調函數只能存在有限個點使函數在其上的振幅超過預先給定的值，從而是可積的). 我們知道，函數振幅的大小與該函數的連續性有關，于是，條件(1)迫使函數的不連續點可用長度總和為任意小的區間所包圍. 這就是說，可積函數必須是差不多連續的. Riemann 積分的理論是以"基本上"連續的函數為研究對象的.

（二）極限與積分次序交換問題

在數學分析中，我們經常遇到的一個重要問題是兩種極限過程的交換問題，尤其是積分與函數列的極限的交換問題.

我們知道，在一般微積分教科書中，都是用函數列一致收斂的條件來保證極限運算與積分運算的次序可以交換，不過，這一要求是過分強了.

例 $f_n(x)=x^n(0\leqslant x\leqslant 1)$. 它是點收斂而不是一致收斂于

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1\end{cases}$$

的，但仍有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=0=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x.$$

在 Riemann 積分意義下，存在下述有界收斂定理(見 Amer. Math.

Monthly, 78, 1980).

定理(有界收斂定理) 設

(i) $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$是定義在$[a,b]$上的可積函數;

(ii) $|f_n(x)|\leqslant M(n=1,2,\cdots,x\in[a,b])$;

(iii) $f(x)$是定義在$[a,b]$上的可積函數，且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x\in[a,b],$$

則

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

這里，不僅受到條件(ii)的限制，而且還必須假定極限函數$f(x)$的可積性. 下例表明，即使函數列是漸升的也不能保證其極限函數的可積性.

例 設$\{r_n\}$是$[0,1]$中全體有理數列，作函數列

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = r_1, r_2, \cdots, r_n, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \qquad n = 1,2,\cdots.$$

顯然有 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant\cdots\leqslant 1$，且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x\text{ 為有理數}, \\ 0, & x\text{ 為無理數}. \end{cases}$$

這里，每個$f_n(x)$皆是$[0,1]$上的 Riemann 可積函數且積分值為零，故有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

但極限函數$f(x)$不是 Riemann 可積的，這是因為

$$\overline{\int_0^1} f(x)\mathrm{d}x = 1, \quad \underline{\int_0^1} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

從而也就談不上積分號下取極限的問題.

有界收斂定理看起來也有點使人驚异，因為我們不難證明，若有定義在$[a,b]$上的可積函數列$\{f_n(x)\}$，$\{g_n(x)\}$滿足

$$|f_n(x)|\leqslant M, \quad |g_n(x)|\leqslant M \quad (n=1,2,\cdots),$$

且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x),$$

則必有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x.$$

但 $f(x)$ 之積分仍然可以不存在. 然而，上述積分之極限值并不依賴于 $\{f_n(x)\}$ 本身，而依賴于 $f(x)$. 既然如此，不妨定義其積分為

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

這說明 Riemann 積分的定義太窄了.

(三) 關于微積分基本定理

我們知道，積分和微分之間的聯系乃是微積分學的中樞：若設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可微函數且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可積的，則有

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a), \quad x \in [a,b].$$

這就是說，從 $f'(x)$ 通過積分又獲得了 $f(x)$. 顯然，為使這一微積分基本定理成立，$f'(x)$ 必須是可積的. 早在 1881 年，Volterra(1860—1940)就作出了一個可微函數，其導函數是有界的，但導函數不是 Riemann 可積的. 這就大大限制了微積分基本定理的應用範圍.

(四) 可積函數空間的完備性

Riemann 積分的另一局限性還表現在可積函數空間的不完備性上. 我們知道，在積分理論中，函數類用距離

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$$

(或

$$d(f,g) = \left\{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}$$

等)作成距離空間是完備的這一事實具有重要意義. 近代泛函分析中的許多基本技巧往往最終要用到空間的完備性.

例如，記 $R([0,1])$ 為 $[0,1]$ 上 Riemann 可積函數的全體. 引進距離

$$d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x,\quad f,g\in R([0,1])$$

(其中認定當 $d(f,g)=0$ 時，f 與 g 是同一元). 我們說 $R([0,1])$ 不是完備的意思，是指當 $f_n\in R([0,1])(n=1,2,\cdots)$ 且滿足

$$\lim_{n,m\to\infty} d(f_n,f_m)=0$$

時，并不一定存在 $f\in R([0,1])$，使得

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n,f)=0.$$

例如，令 $\{r_n\}$ 是 $(0,1)$ 中有理數的全體，并且設 I_n 是 $[0,1]$ 中的開區間，$r_n\in I_n$，$|I_n|<1/2^n(n=1,2,\cdots)$，作函數

$$f(x)=\begin{cases}1, & \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n,\\ 0, & [0,1]\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n.\end{cases}$$

易知 $f(x)$ 在 $[0,1]\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n$ 上是不連續的，它不是 Riemann 可積的，且不存在 Riemann 可積函數 $g(x)$，使得 $d(f,g)=0$. 但若作函數列

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & \bigcup\limits_{k=1}^{n}I_k,\\ 0, & [0,1]\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n}I_k,\end{cases}$$

則 $f_n(x)\in R([0,1])$，且有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} d(f_n-f_m)=0,$$

以及 $f_n(x)\to f(x)(n\to\infty)$，故 $R([a,b])$ 按上述距離 d 是不完備的.

隨着人們對數學分析各種課題的深入探討，積分理論的研究工作也進一步展開. 特別是通過 Jordan(1838—1922), Borel(1871—1956) 等人關于點集測度理論的成果，揭示出測度與積分的聯系. 現代應用最廣泛的測度與積分系統是 Lebesgue(1875—1941) 完成的. 1902 年他在《積分、長度與面積》的論文中所闡明的思想成為古典分析過渡到近代分析的轉折點. Lebesgue 積分理論不僅蘊涵了 Riemann 積分所達到的成果，而且還在較大程度上克服了后者的局限性. 在 Lebesgue 以后，還有許多數學家如 Riesz(1880—

1956)，Denjoy(1884—不詳)，Radon(1887—1956)都對積分理論的進一步發展作出了重要貢獻．當然，當今我們來學習 Lebesgue 測度與積分時，不一定拘泥于原有的體系．

目　　錄

第一章　集合．點集

集合論自十九世紀八十年代由德國數學家 Cantor 創立以來，已發展成為一個獨立的數學分支，其基本概念與方法已滲入到二十世紀的各個數學領域．集合論是研究集合的各種性質的，它的初期工作與數學分析的深入研究密切相關，現在它是實變函數理論的預備知識．本章僅對一般集合與 $\mathbf{R}^n$ 中的點集知識作一必要的介紹．

§1.1　集合與子集合

集合是一個不給定義的概念．就我們的實際應用範圍來說，通過樸素的描述方法來進入這一領域已是足够的了．例如：自然數全體構成一個集合，記為 N；有理數全體構成一個集合，記為 Q；實數全體構成一個集合，記為 $\mathbf{R}^1$．總之，我們所指的集合是按照某種規定而能够識別的一些具體對象或事物的總體．構成集合的這些對象或事物稱為集合的元素．

一般地說，集合的符號用大寫字母 $A,B,C,\cdots,X,Y,Z$ 等來表示，集合的元素用小寫字母 $a,b,\cdots,x,y,z$ 等來表示．設 A 是一個集合，若 a 是 A 的元素，則記為 $a\in A$(叫做 a 屬于 A)；$a\overline{\in} A$(叫做 a 不屬于 A)表示 a 不是 A 的元素．例如 $2/3\in Q$，$\sqrt{2}\overline{\in} Q$ 等等．

通常采用的集合表示法有兩種：其一是列舉，例如由數 1,2,3,4,5 構成的集合記為 A 時，就用符號

$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

來表示．也就是說，在花括號｛　｝內將其元素一一列舉出來；其二是用元素所滿足的一定條件來描述它，如上述之 A 也可寫成

$$A = \{x : x < 6, \quad x \in N\}.$$

在這里，{ }號內分為兩部分來寫，且用符號“：”隔開，前一部分是集合中元素的代表符號，后一部分表示元素所滿足的條件或屬于本集合的元素所特有的規定性質，有時也把 A 寫成

$$\{x \in N : x < 6\}.$$

例 集合$\{x \in \mathbf{R}^1 : 0 < \sin x \leqslant 1/2\}$表示由滿足

$$0 < \sin x \leqslant \frac{1}{2}$$

的實數 x 所構成. 有時也簡寫成

$$\{x : 0 < \sin x \leqslant 1/2\}.$$

例 集合$\{x \in \mathbf{R}^1 : |x - x_0| < \delta, x_0 \in \mathbf{R}^1\}$就是開區間$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

定義 1.1 對于兩個集合 A 與 B，若 $x \in A$ 必有 $x \in B$，則稱 A 是 B 的子集合，簡稱 A 是 B 的子集，記為

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A.$$

$A \subset B$ 也稱為 A 含于 B 或 B 包含 A. 若 $A \subset B$ 且存在 B 中元素不屬于 A，則稱 A 是 B 的真子集.

例 設 $A = \{1,2,3,4,5\}$，則集合$\{1\}$，$\{1,3\}$，$\{1,3,5\}$，$\{1,2,3\}$均是 A 的子集.

注意，上例中$\{1\}$表示由單個元素“1”所構成的集合，它是 A 的子集而不是 A 的元素. 從而可知$\{1,\{2,3\}\}$不是 A 的子集.

為了論述與運算的方便，我們還指定一種所謂空集，它是不包含任何元素的集合，記為$\varnothing$. 空集$\varnothing$是任一集合的子集.

定義 1.2 設 A,B 是兩個集合. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，則稱集合 A 與 B 相等，記為 $A = B$. A 與 B 相等就是 A 與 B 的元素完全相同，即 A 與 B 是同一個集合.

例 $\{x \in \mathbf{R}^1 : x^2 > 1\} = \{x \in \mathbf{R}^1 : |x| > 1\}$.

集合$\{x : p(x)\}$與集合$\{x : q(x)\}$是否相等，就是看條件 $p(x)$ 與 $q(x)$ 是

否等價.

定義 1.3　設 I 是任意給定的一個集合，對于每一個 $\alpha\in I$，我們指定一個集合 A_α. 這樣我們就得到許多集合，它們的總體稱為集合族，記為 $\{A_\alpha:\alpha\in I\}$ 或 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$. 這里的 I 常稱為指標集. 當 $I=N$ 時，集合族也稱為集合列，簡記為 $\{A_i\}$ 或 $\{A_k\}$ 等等.

例　設 r,s,t 是三個互不相同的數，且 $A=\{r,s,t\}$，$B=\{r^2,s^2,t^2\}$，$C=\{rs,st,rt\}$. 若 $A=B=C$，則 $\{r,s,t\}=\{1,w,w^2\}$，其中

$$w=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2},\quad i\text{ 是虛數單位.}$$

證明　因為集合相等就是其元素相同，所以將兩個集合中的全部元素作數值和，所得到的三個數應該相等，若令其和為 K，則有

$$r+s+t=r^2+s^2+t^2=rs+st+rt=K.$$

從而得到

$$K^2=(r+s+t)^2=(r^2+s^2+t^2)+2(rs+st+rt)=3K,$$

即 $K=3$ 或 0. 又從數值的乘積看，同理有

$$rst=r^2s^2t^2,$$

故知 $rst=1$. 于是在 $K=3$ 時，可知 r,s,t 為方程

$$x^3-3x^2+3x-1=0$$

的根，也就是 $(x-1)^3=0$ 之根. 但是此時有 $r=s=t=1$，不合題意. 這説明 $K=0$，此時 r,s,t 為方程

$$x^3-1=0$$

的根，即 $x=1$ 以及 $x=(-1\pm\sqrt{3}\,i)/2$.

§1.2　集合的運算

集合的分解與合成是探討各集合之間相互關系以及組成新集合的一種有效手段，從而使集合論方法在實變函數論中獲得重要的應用. 這種分解

與合成可以通過各種集合間的運算來表達，現將其概念與主要性質作一簡單介紹.

(一) 并與交

定義 1.4　設 A,B 是兩個集合，稱集合

$$\{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

為 A 與 B 的并集，記為 $A \cup B$. 即由 A 與 B 的全部元素構成的集合.

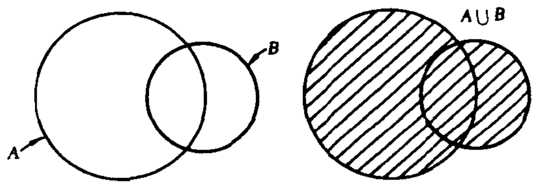

圖 1.1

為直觀起見，現用圖形來示意集合運算構成的新集合，稱為 Venn 圖. $A \cup B$ 見圖 1.1.

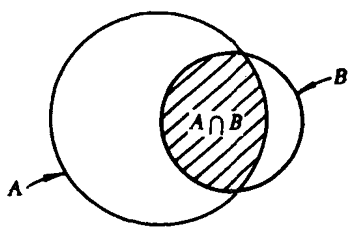

圖 1.2

定義 1.5　設 A 與 B 是兩個集合，我們稱集合

$$\{x : x \in A, x \in B\}$$

為 A 與 B 的交集，并記為 $A \cap B$. 即由 A 與 B 的公共元素構成的集合(見圖 1.2). 若 $A \cap B = \varnothing$. 則稱 A 與 B 互不相交.

例　若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的實值函數，則

$$\{x : l \leqslant f(x) \leqslant k\} = \{x : f(x) \geqslant l\} \cap \{x : f(x) \leqslant k\}.$$

關于作交與并及其聯合運算，有下述重要規律.

定理 1.1　設有集合 A,B 與 C，我們有