工科硕士研究生教学用书

矩阵分析

李俊杰 编著

机械工业出版社

（京）新登字 054 号

本书系统、概括地论述了工程和科技中常用的矩阵理论和方法。主要内容包括：内积空间、矩阵的标准形、向量和矩阵的范数、矩阵分析、广义逆矩阵、特征值的估计等。书中各章均配有一定数量的习题。

本书可作为工科硕士研究生的教材，也可供理工科教师、工程技术人员、科技工作者参考。

图书在版编目 [redacted]

矩阵分析/李俊[redacted]版社，1995
工科硕士研究生教[redacted]用[redacted]
ISBN 7-111-04687[redacted]

Ⅰ.矩… Ⅱ.李… Ⅲ.[redacted]N701

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 04032 号

出 版 人：马九荣（北京市百万庄南街 1 号　邮政编码 100037）
责任编辑：张淑琴　版式设计：冉晓华　责任校对：孙志筠
封面设计：方　芬　责任印制：卢子祥
三河永和印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
1995 年 8 月第 1 版　　1995 年 8 月第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/32 · 7.5 印张 · 162 千字
0 001—2 000 册
定价：15.00 元

前　言

现代系统与控制的理论与方法已渗透到工程技术的各个领域，其中应用矩阵的理论和技巧来分析和处理工程技术的理论与应用方面的许多问题，已日益显示出它的作用。为了适应工科硕士研究生的教学和科研的需要，1984 年由李俊杰编写了教材《矩阵分析》，在此基础上，经过历年的教学实践，几经修改、补充，重新编写了此书。

本书内容分为四大部分，即线性代数基础（第一、二章）；矩阵分析（第三、四、五章）；广义逆矩阵（第六章）；特征值的估计（第七章）。在选材上，力求简明精练；着重介绍工程技术中常用的矩阵理论和方法。在论述上，注意了概念的阐述和理论推导的严谨性，同时强调了理论对实际的有效的应用。一些有用的定理和结论放到习题之中了，因此，习题是本书的重要组成部分。

在酝酿和编写本书的过程中，曾得到燕山大学研究生部的大力支持。李泉林和岳德权曾协助作了许多具体工作，特在此一并致谢。

由于编者水平有限，书中缺点错误在所难免，热忱欢迎批评指正。

编　者

目　录

第一章　内 积 空 间

线性空间是通常的三维几何（实）空间的抽象，在三维几何空间中除了向量的加法、实数与向量的乘法运算外，还有向量的长度、两向量的夹角等度量性质的概念。这种度量性质可以用内积（数量积、点积）来表达，但在一般的线性空间中，这些度量性质并没有得到反映，因此，有必要在线性空间中引进内积，以便引进类似的度量概念，并且可进一步得到空间的更多的性质。

第一节　线性空间的一般概念

一、数环与数域

数学中讨论问题时，经常涉及到某一个数的集合中的数的运算规则及其性质。为了准确地分析和研究数学问题，引进数环和数域的概念。

定义 1　称非空的数集 S 为数环，如果 S 中的数对于数的加、减、乘三种运算是封闭的，即

$$\forall\ a,b \in S \Rightarrow a+b、a-b、ab \in S$$

定义 2　称至少包含有两个不同的数的集合 F 为数域，如果 F 中的数对于加、减、乘、除（除数非零）运算是封闭的，即

$$\forall\ a,b \in F \Rightarrow a+b、a-b、ab、\frac{a}{b}(b \neq 0) \in F$$

由定义知，若某一数集是数域，则必是数环。

例 1　有理数集 Q、实数集 R、复数集 C 都是数域。分别称为有理数域、实数域和复数域。

自然数集 N 不是数环，当然也不是数域。

整数集 Z 是数环，但不是数域。

例 2　数 0 这一个数构成一个数环，因为 $0\pm0=0$，$0\times0=0$；这是最小的数环。但这个数环不是数域，因为数域要至少含有两个不同的数。

由数环及数域的定义，可得

定理 1　任何数环必包含数 0；

定理 2　任何数域必包含有数 0 与 1；

定理 3　有理数域是最小的数域。

证　设 F 为任一数域，则由定理 2，$1\in F$。利用 F 对加法的封闭性，可知任一正整数 $N\in F$。因为 $0\in F$，利用 F 对减法的封闭性知任一负整数 $-N\in F$。这样，全体整数属于 F。对于任一有理数 $R\neq0$，必有整数 p、q，$q\neq0$，使 $R=p/q$，显然 p，$q\in F$，且 F 对除法是封闭的，故 $Q=p/q\in F$。从而有理数域 $Q\subset F$。

二、线性空间

定义 3　设 V 是一个非空集合，F 是一个数域

在 V 中定义了一个加法运算，记作"+"，即对于任意的 α，$\beta\in V$，有唯一确定的元素 $\alpha+\beta\in V$

在数域 F 与集合 V 的元素间，定义了一个数乘运算，即对于任意的 $k\in F$ 及任意的 $\alpha\in V$，有唯一确定的元素 $k\alpha\in V$

加法和数乘运算满足下列规则：

(1) 对任意的 α，$\beta\in V$，$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

(2) 对任意的 α，β，$\gamma\in V$，$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

(3) 在 V 中有一个元素 0，对于 V 中任一元素 α 都有

$$\alpha + 0 = 0$$

称 0 为 V 的零元素；

(4) 对于 V 中每一个元素 α，都有 V 中的元素 β，使得

$$\alpha + \beta = 0$$

称 β 为 α 的负元素；

(5) 对于任意的 $\alpha \in V$，$1\alpha = \alpha$；

(6) 对任意的 $\alpha \in V$ 及任意的 k，$l \in F$

$$k(l\alpha) = (kl)\alpha$$

(7) 对任意的 $\alpha \in V$ 及任意的 k，$l \in F$

$$(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$$

(8) 对任意的 α，$\beta \in V$ 及任意的 $k \in F$

$$k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$$

则称 V 为数域 F 上的线性空间。

如果数域 F 是复数域 C，则称 V 为复线性空间；如果数域 F 是实数域 R，则称 V 为实线性空间。

由于任意域 F 上的线性空间 V 的加法和数乘运算的定义以及它们应满足的八条运算律，同实数域 R 上的线性空间的两种运算的定义以及满足的运算律形式上完全相同，故对于任意域上的线性空间可仿照实数域上的线性空间的情形，来定义诸如向量的线性相关、线性无关、空间的维数、基、向量的坐标、线性子空间、线性变换等等概念。

例 3　复数域 C 是实数域 R 上的线性空间。运算就是复数的加法和实数乘复数的乘法。

实数域 R 是实数域 R 上的线性空间。

实数域 R 是有理数域 Q 上的线性空间。加法就是实数的相加，数乘就是有理数乘实数。

实数域 R 不是复数域 C 上的线性空间，因为复数乘实数

不一定是实数，数乘运算的封闭性条件不满足。

一般地，如果 K 是数域 F 的子域，则 F 必是 K 上的线性空间，运算就是 F 中数的加法和 K 中的数与 F 中的数的乘法。但是反过来，子域 K 不能看作扩域 F 上的线性空间（如实数域 R 不是复数域 C 上的线性空间）。

第二节　实内积空间

定义 1　设 V 是实线性空间，如果对于 V 中任意的两个向量 α,β，都按照某一个确定的规则对应于唯一确定的实数，记作 (α,β)，并且 (α,β) 满足

(1) $\forall\ \alpha,\beta\in V$，有 $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$；

(2) $\forall\ \alpha,\beta\in V$ 及 $\forall\ k\in R$，有 $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$；

(3) $\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in V$，有 $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$；

(4) $\forall\ \alpha\in V$，恒有 $(\alpha,\alpha)\geqslant 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时，$(\alpha,\alpha)=0$

则称 (α,β) 为 V 上的向量 α,β 的内积。

定义了内积的实线性空间 V 称作实内积空间，记作 $V(R)$。实内积空间有时也称为欧氏空间。内积 (α,β) 是定义在实线性空间 V 上的二元实函数。

例 1　设 $R^n=\{\alpha\mid\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T,\ a_i\in R,\ i=1,2,\cdots,n\}$，则在通常的向量的加法和实数与向量的乘法之下，$R^n$ 构成一 n 维实线性空间。$\forall\ \alpha,\beta\in R^n$，$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，定义

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\beta^T\alpha$$

易知，实函数 (α,β) 是一种内积。R^n 关于这个内积构成一 n 维实内积空间。

例 2 $n\times n$ 实矩阵的集合 $R^{n\times n}$，对于通常的矩阵加法和实数与矩阵的乘法，形成一 n^2 维实线性空间。对任意的 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$及任意的 $B=(b_{ij})\in R^{n\times n}$，定义

$$(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$$

不难验证，实函数 (A,B) 是 $R^{n\times n}$上的一种内积，因此，$R^{n\times n}$关于内积 (A,B) 构成一 n^2 维实内积空间。

例 3 在闭区间 $[a,b]$ 上一切 x 的实连续函数的集合 $C[a,b]$ 对于函数的加法和实数与函数的乘法，构成一个无穷维实线性空间。$\forall f(x),\ g(x)\in C[a,b]$，定义

$$(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

则可验证，$(f(x),g(x))$ 是 $C[a,b]$ 上的内积。因此，$C[a,b]$ 关于内积 $(f(x),g(x))$ 构成一个（无穷维）实内积空间。

在线性空间内定义内积是与向量的加法和数乘运算彼此无关的，因此不论内积如何定义，都不影响该空间的维数。

内积有如下一些基本性质：

设 $V(R)$ 是实内积空间

(1) $\forall\alpha\in V(R)$，$(0,\alpha)=(\alpha,0)=0$

事实上

$$(0,\alpha)=(0\alpha,\alpha)=0(\alpha,\alpha)=0$$

(2) $\forall\alpha,\beta,\gamma,\in V(R)$

$$(\alpha,\beta+\gamma)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$$

事实上

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta+\gamma)&=(\beta+\gamma,\alpha)\\&=(\beta,\alpha)+(\gamma,\alpha)\end{aligned}$$

$$=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$$

(3) $\forall\ k\in R$，$\forall\ \alpha$，$\beta\in V\ (R)$ 有

$$(\alpha,k\beta)=k(\alpha,\beta)$$

(4) $\forall\ \alpha_i\in V\ (R)\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，$\forall\ \beta_j\in V\ (R)\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$\forall\ k_i\in R\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，$\forall\ l_j\in R\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，用数学归纳法可以证明

$$\left(\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i,\sum_{j=1}^{n}l_j\beta_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k_il_j(\alpha_i,\beta_j)$$

因为$\forall\ \alpha\in V\ (R)$，$(\alpha,\ \alpha)\geqslant 0$，因此可有

定义 2 $\forall\ \alpha\in V\ (R)$，非负实数 $(\alpha,\ \alpha)$ 的算术平方根 $\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}$ 称作向量 α 的长度，记作 $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}$。

$\forall\ k\in R$，$\forall\ \alpha\in V\ (R)$

$$|k\alpha|=\sqrt{(k\alpha,k\alpha)}=\sqrt{k^2(\alpha,\alpha)}=|k|\ |\alpha|$$

若 $|\alpha|=1$，称 α 为单位向量。

如果 $|\alpha|\neq 0$，则 $\alpha/|\alpha|$ 是单位向量。

由于$\forall\ \alpha\in V\ (R)$，当且仅当 $\alpha=0$ 有 $(\alpha,\ \alpha)=0$，故 $|\alpha|=0$ 当且仅当 $\alpha=0$。

因为余弦函数 $|\cos\theta|\leqslant 1$，为了能用公式

$$\cos\theta=\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha|\,|\beta|}$$

来定义实内积空间中两个非零向量 α、β 的夹角，需要证明不等式

$$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha|\,|\beta|$$

定理 1 (Cauchy-Schwarz 不等式)

$\forall\ \alpha$，$\beta\in V\ (R)$，恒有

$$(\alpha,\beta)^2\leqslant(\alpha,\alpha)(\beta,\beta) \tag{1-1}$$

且仅当 α 与 β 线性相关时等号成立。

证　如果 α 与 β 线性相关，那么或者 $\alpha=0$，或者 $\beta=k\alpha$，不论哪种情况都有 $(\alpha,\beta)^2=(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$。

如果 α、β 线性无关，则对任何实数 x，都有 $\alpha-x\beta\neq 0$，于是

$$(\alpha-x\beta,\alpha-x\beta)>0$$

按内积性质展开有

$$(\beta,\beta)x^2-2(\alpha,\beta)x+(\alpha,\alpha)>0$$

上式左端是 x 的二次三项式，对任何 x 其值恒为正，故其判别式恒为负

$$\Delta=(\alpha,\beta)^2-(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)<0$$

从而

$$(\alpha,\beta)^2<(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$$

反之，若对 $V(R)$ 中之向量 α，β 有

$$(\alpha,\beta)^2=(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$$

则二次三项式 $(\beta,\beta)x^2-2(\alpha,\beta)x+(\alpha,\alpha)$ 之判别式 Δ 等于零，从而必有实数 $x=k$，使得

$$(\beta,\beta)k^2-2(\alpha,\beta)k+(\alpha,\alpha)=0$$

此即

$$(\alpha-k\beta,\alpha-k\beta)=0$$

因此必有 $\alpha-k\beta=0$，即 α、β 线性相关。

在实内积空间 R^n 中，$\forall\ \alpha,\ \beta\in R^n$，$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，由定理 1，便有

$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\tag{1-2}$$

在实内积空间 $C[a,b]$ 中，$\forall\ f(x)$，$g(x)\in C[a,b]$，则有

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x} \quad (1\text{-}3)$$

定义 3 设 α，$\beta \in V$（R）是两个任意非零向量，则称

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha|\,|\beta|} \quad (1\text{-}4)$$

为 α 与 β 之夹角（$0 \leqslant \langle \alpha, \beta \rangle \leqslant \pi$）。

零向量与其它向量的夹角认为是不确定的。

定义 4 设 α，$\beta \in V$（R），如果 $(\alpha, \beta) = 0$，则称 α 与 β 相互正交，记作 $\alpha \perp \beta$。零向量与任意向量均正交。

利用 Cauchy-Schwarz 不等式和正交性，可得实内积空间中的三角不等式和勾股定理。

三角不等式 $\forall \alpha$，$\beta \in V$（R），总有

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta| \quad (1\text{-}5)$$

证 $|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta, \alpha+\beta)$

$$= (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta)$$

$$\leqslant |\alpha|^2 + 2|\alpha|\,|\beta| + |\beta|^2$$

$$= (|\alpha| + |\beta|)^2$$

两边开方，即得

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$$

勾股定理 若 α，$\beta \in V$（R）且 $\alpha \perp \beta$，则

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

事实上，由于 $(\alpha, \beta) = 0$，而有

$$|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta)$$

$$= (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta)$$

$$= |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

即 $|\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$。

例 4 设 x_1，x_2，…，x_m 是实内积空间 V（R）的 m 个

向量，行列式

$$G(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\begin{vmatrix}(x_1,x_1) & (x_1,x_2) & \cdots & (x_1,x_m)\\(x_2,x_1) & (x_2,x_2) & \cdots & (x_2,x_m)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\(x_m,x_1) & (x_m,x_2) & \cdots & (x_m,x_m)\end{vmatrix}$$

称为向量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的 Gram 行列式。证明向量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 线性相关的充要条件是

$$G(x_1,x_2,\cdots,x_m)=0$$

证　考虑关于 k_1，k_2，$\cdots$，k_m 的齐次线性方程组

$$\begin{cases}(x_1,x_1)k_1+(x_1,x_2)k_2+\cdots+(x_1,x_m)k_m=0\\(x_2,x_1)k_1+(x_2,x_2)k_2+\cdots+(x_2,x_m)k_m=0\\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots\\(x_m,x_1)k_1+(x_m,x_2)k_2+\cdots+(x_m,x_m)k_m=0\end{cases}$$

它的系数行列式即为 Gram 行列式 $G(x_1, x_2, \cdots, x_m)$。

充分性　如果 $G(x_1, x_2, \cdots, x_m)=0$，则上面的方程组有非零解 k_1，k_2，$\cdots$，k_m，根据内积的基本性质，由上面的方程组可得

$$(x_1,k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m)=0$$
$$(x_2,k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m)=0$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$
$$(x_m,k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m)=0$$

以 k_1 乘第一个方程，以 k_2 乘第二个方程，$\cdots$，以 k_m 乘第 m 个方程然后相加，即得

$$(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m,k_1x_1+k_2x_2+\cdots-k_mx_m)=0$$

因而

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m=0$$

这表明 x_1，x_2，…，x_m 是线性相关的。

必要性 若 x_1，x_2，…，x_m 线性相关，则存在不全为零的常数 k_1，k_2，…，k_m 使

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m=0$$

依次将两边与 x_1，x_2，…，x_m 作内积，即得前面的齐次线性方程组，即齐次线性方程组有非零解 k_1，k_2，…，k_m，由线性方程组的理论知，此方程组的系数行列式 $G(x_1, x_2, \cdots, x_m)=0$。

第三节 标准正交基

在三维几何空间中建立坐标系时，我们常常取两两正交的单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 作为坐标向量，在讨论与向量有关的问题时一般比较简便，在内积空间中也有类似情形。

定义 1 实内积空间中两两正交的一组非零向量称为正交向量组。由单独一个非零向量组成的向量组也称为正交向量组。如果正交向量组中每一个向量的长度都是 1，则称它们为标准正交向量组。

例 1 在实内积空间 R^4 中，向量组

$$\alpha_1=(1,-2,0,0)^T$$
$$\alpha_2=(2,1,1,1)^T$$
$$\alpha_3=(0,0,1,-1)^T$$

是正交向量组。而下列向量组

$$\varepsilon_1=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}},0,0\right)^T$$
$$\varepsilon_2=\left(\frac{2}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^T$$

$$\varepsilon_3 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$$

为 R^4 的一个标准正交向量组。

例 2 无穷维实内积空间 C [0，2π] 中的向量组：

1，$\cos x$，$\sin x$，$\cos 2x$，$\sin 2x$，…，$\cos nx$，$\sin nx$ 在内积 $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 之下，是正交向量组。事实上，当 $k \neq l$ 时

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx \,\mathrm{d}x = 0, \int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx \,\mathrm{d}x = 0$$

对任何 k，l（k，$l = 0$，1，2，…，n）则

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos lx \,\mathrm{d}x = 0$$

故 1，$\cos x$，$\sin x$，$\cos 2x$，$\sin 2x$，…，$\cos nx$，$\sin nx$ 为正交向量组。

而下列向量组为标准正交向量组：

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x$，$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x$，$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x$，$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x$，…，$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$，$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$。

定理 1 $V(R)$ 内的任何正交向量组必是线性无关组。

证 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 是 $V(R)$ 内的一个正交向量组，作常系数线性组合等式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_t\alpha_t = 0$$

则

$$(\alpha_i, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_t\alpha_t) = (\alpha_i, 0) = 0$$
$$i = 1, 2, \cdots, t$$

由内积性质有

$$k_1(\alpha_i,\alpha_1)+k_2(\alpha_i,\alpha_2)+\cdots+k_t(\alpha_i,\alpha_t)=0$$

当 $i \neq j$ 时，$(\alpha_i,\ \alpha_j)=0$，而 $(\alpha_i,\ \alpha_i)>0$，

故由

$$k_i(\alpha_i,\alpha_i)=0$$

知

$$k_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,t)$$

所以，α_1，α_2，…，α_t 线性无关。

推论 标准正交向量组必是线性无关组。

定理 1 说明，在 n 维实内积空间内，两两正交的非零向量不会超过 n 个，而 n 个两两正交的非零向量就是 n 维实内积空间的一组基。

定义 2 在 n 维实内积空间中，由 n 个向量组成的正交向量组称为正交基。由单位向量组成的正交基称为标准正交基。

在 n 维实内积空间 V（R）中，向量组 ε_1，ε_2，…，ε_n是标准正交基的充要条件是

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

定理 2 n 维实内积空间 V（R）必存在标准正交基。

证 下面所用的证明方法，是从实内积空间 V（R）的任一组基 α_1，α_2，…，α_n 出发，通过 Schmidt 正交化方法构造出一个正交基，再单位化就得到一个标准正交基。

取 V（R）的一个基 α_1，α_2，…，α_n，令

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2$$