JINGJISHUXUEJICHU

经济数学基础

彭文学　李少斌　编

JINGJISHUXUEJICHU

武汉大学出版社

经济数学基础

经济数学基础

彭文学　李少斌　编

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础/彭文学，李少斌编. 一武汉：武汉大学出版社，1997. 6

ISBN 7-307-02415-2

Ⅰ. 经…

Ⅱ. ①彭… ②李…

Ⅲ. 经济数学

Ⅳ. F224.0

武汉大学出版社出版

(430072 武昌 珞珈山)

武汉工业大学印刷厂印刷

(430070 武汉市珞狮路14号)

新华书店湖北发行所发行

1997年6月第1版 1997年6月第1次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:12.75

字数:327千字 印数:1—10000

ISBN 7-307-02415-2/F·527 定价:13.80元

前　言

本教材是为适应广播电视大学经济类各专业经济数学教学的需要，在总结前几年该门课程的教学经验，吸取各地师生意见的基础上编写的．

此次编写我们注意了以下几个方面的问题：第一，经济数学是经济类各专业的一门基础课，所以，按照教学大纲的要求，适当注意了知识的完整性，比较系统地介绍了微积分和线性代数的基本知识，其主要目的是使学生掌握基本概念和方法，而不是刻意于知识体系的严谨性．第二，实用性，随着社会主义市场经济体制的不断完善，管理的科学化和规范化日益受到重视，数学应用于经济管理的各个部门也日趋广泛，数学无论是作为经济工作的计算工具，还是作为经济工作分析研究的工具都具有着重要的作用．因此在介绍抽象的数学概念时，我们尽可能地赋予这些概念以经济意义，在介绍数学运算时，尽可能结合经济工作中的实例加以说明，以便为数学作为工具应用于经济工作铺平道路．为了体现经济数学的特色，每章后都有一节经济应用的内容，主要介绍本章数学概念和方法在经济中应用的知识，以便使学生加深理解，扩展视野，激发学习兴趣，提高实际应用能力．第三，化难为易，通俗易学．对于不少学生来说，学习本课程有一定难度．本教材的编写坚持从实际出发，删去了不少内容较深而又与实际应用关系不大的内容．同时在编写方法上力求循序渐进，深入浅出，便于理解和自学，基本概念尽可能用几何意义来说明，基本方法的叙述尽可能详尽而

又突出重点．在内容的叙述上，采取由特殊到一般的方法，在对具体实例分析的基础上再介绍一般的方法，尔后又通过一定量的例题叙述解题的基本方法．学习数学没有什么捷径可走，其中很重要的一环就是要多做多练，因此，本次编写加大了习题的份量，在每节后都附有练习题．练习(A)作为客观性习题主要是为消化本节基本概念之用，练习(B)主要是计算、应用等传统题型，为学生掌握本节基本计算和基本方法之用．每章后都配有复习题，以便全面复习和巩固本章所学内容．

本书第一、二、三章由李少斌执笔，第四、五章由彭文学执笔．在编写过程中，我们得到湖北广播电视大学领导的关心及其他有关同志的帮助，谨致诚挚的谢意．

限于作者水平，缺点错误等不妥之处在所难免，敬祈读者不吝指正．

编　者

1997 年 3 月

目　　录

第一章　函数与极限

函数是微积分研究的主要对象，极限方法是微积分研究所采用的基本方法，微积分学中的一些基本概念都是在极限概念的基础上建立起来的．用微积分研究经济问题离不开函数关系，离不开极限方法．因此本章作为全书的一个引论，简要地介绍了与函数有关的问题，在引入极限概念的基础上，着重介绍了求极限的方法，为便于理解和掌握它在经济领域中的应用，引入了在以后各章要经常用到的经济函数．

§1.1　函数的概念与性质

一、函数的定义

数学中讨论的量分为两类：常量与变量．在给定的问题中，不变的、保持一定值的量叫做常量；由于某种缘故变化着的、取不同值的量叫变量．在同一个问题中，还往往同时出现好几个变量，而这些变量又往往是相互联系的和相互依赖的．

例 1　我们熟知圆的面积公式：

$$S=\pi r^2.$$

式中 r 是圆的半径．圆的半径不同，圆的面积也就不同，而 π 在圆的面积计算中总是不变的．所以我们说，在这个给定的问题中，π 是常量，圆的半径 r 和圆的面积 S 都是变量，它们之间的相互关系是由上述公式确定的．

例 2 某种牌号的收音机，当单价为 120 元时，每月可销售 2000 台，如果单价每降低 5 元，则可多销售 20 台．单价不得低于 90 元．销量 Q 与单价 P 有如下关系：

P	120	115	110	105	100	95	90
Q	2000	2020	2040	2060	2080	2100	2120

当 P 在允许的降价范围内变化时，销售量 Q 也随之有一个确定的值与之对应．

例 3 气象台为了掌握某地气温的变化，使用自动记录器将每天的气温记录下来，直接画出一条如图 1－1 所示的曲线．图中有两个变量：时间 t 和气温 c．对从 0 到 24 小时内的任意一个确定的时刻 t，都有一个确定的气温 c 与之对应，它们之间的对应关系就是图 1－1 的曲线．当时间为 t_0 时，通过图中曲线可以找到 c_0，且 c_0 是唯一的值．

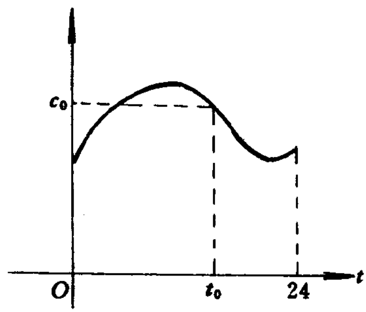

图 1－1

上述各例，就其所包含的具体含义而言，有几何的、经营的、气象的．撇开各自的具体含义，其共同本质是参与给定问题的变量之间相互依赖的关系．当其中一个变量取定了一个数值时，那么按照某种确定的对应关系，就可以求得另一个变量的一个相应值．函数的一般概念正是这样抽象出来的．

定义 1.1 设在某一问题中有两个变量 x 和 y，变量 x 的变化范围为 D．如果对 D 中的每一个值 x，按照某种确定的对应关系，都可确定变量 y 的一个相应值，则称变量 y 是变量 x 的一个函数，记为

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

x 称为自变量，y 称为因变量．x 的变化范围 D 称为函数的定义

域．相应地 y 值的集合称为函数 $f(x)$ 的值域．

对于函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 中的每一个 x_0，按对应规则 f，就得到一个 y_0 值，y_0 就是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记为

$$y_0=f(x_0).$$

例 4 设 $y=f(x)=2x^2-x+1$.

$x=0$ 时，$\quad f(0)=2\cdot 0^2-0+1=1$；

$x=1$ 时，$\quad f(1)=2\cdot 1^2-1+1=2$；

$x=x_0$ 时，$\quad f(x_0)=2x_0^2-x_0+1$.

例 5 单利计算公式．设初始本金为 A_0 元，年利率为 R，则第 m 年末的本利和 A_m 是时间 m 的函数，它们之间的关系为

$$A_m=A_0+mRA_0=A_0(1+mR).$$

若本金 A_0 为 2 万元，年利率为 10%，则第三年末的本利和为

$$A_3=2(1+3\cdot 0.1)=2.6(\text{万元}).$$

例 6 复利计算公式．设初始本金为 A_0 元，年利率为 R，则第一年末的本利和

$$A_1=A_0+RA_0=A_0(1+R).$$

将 A_1 存入银行，则第二年末的本利和

$$A_2=A_0(1+R)+A_0(1+R)R=A_0(1+R)^2.$$

再将 A_2 存入银行，如此反复，则第 m 年末的本利和 A_m 是时间 m 的函数，其函数关系为

$$A_m=A_0(1+R)^m.$$

这就是以年为期的复利计算公式．

在例 5 中，对同样的本金和年利率，若按复利计算公式计算，则第三年末的本利和是

$$A_3=2(1+0.1)^3=2.662(\text{万元}).$$

在函数定义中，自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域．在实际问题中，函数的定义域根据实际意义来确定．在例 1 中，圆的半径不可能是负数和零，所以定义域是大于零的数．当我们只

是在数学上一般地研究某一由具体解析式所规定的函数关系时，函数的定义域是由解析式本身确定的．

例 7 试确定函数 $f(x)=\lg(1-x^2)+\sqrt{x}$ 的定义域

解 函数第一项 $\lg(1-x^2)$ 的定义域是满足不等式

$$1-x^2>0$$

的值．解此不等式得 $-1<x<1$.

第二项 $\sqrt{x}$ 的定义域是 $x\geqslant 0$.

两者的公共部分 $0\leqslant x<1$ 为所求函数的定义域．

确定一个函数，主要是对应关系和定义域．它们是函数的二要素．至于自变量和因变量用什么记号来表示，那是无关紧要的．例如在例 5 中，自变量时间用 m 表示，因变量本利和用 A_m 表示，表示 A_m 是 m 的函数．

在函数定义 1.1 中，规定对每一个 $x\in D$，有且仅有 y 的一个值与之对应．符合这样的定义的函数称为单值函数．若对于每个 $x\in D$，有多个 y 的值与之对应，符合这种情形的函数称为多值函数．以后我们所涉及和讨论的函数一般都是指单值函数．

二、函数的性质

1. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$，$x\in(-a,a)$．对任意 $x\in(-a,a)$，若 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数．

例如，我们熟悉的函数 $f(x)=x^2$，$f(x)=\cos x$ 等都是偶函数，函数 $f(x)=x^3$，$f(x)=\sin x$ 都是奇函数．

偶函数的图形关于 OY 轴对称；奇函数的图形关于坐标原点对称．

例 8 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=a^x-a^{-x}$；

(2) $f(x)=\frac{\sin x}{x^3+x}$.

解 (1) $f(-x)=a^{-x}-a^{-(-x)}=a^{-x}-a^{x}$

$$=-(a^x-a^{-x})=-f(x).$$

故 $f(x)$是奇函数.

(2) $f(-x)=\frac{\sin(-x)}{(-x)^3+(-x)}=\frac{-\sin x}{-(x^3+x)}=f(x)$.

故 $f(x)$是偶函数.

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$. $x\in(a,b)$,若对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内是单调增加的;当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内是单调减少的.

单调增加或单调减少的函数都称为单调函数,(a,b)称为这个函数的单调区间.

例 9 设函数 $y=f(x)=-3x+1$,讨论其单调性.

解 该函数定义域是$(-\infty,+\infty)$,对于任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$.

$$f(x_1)-f(x_2)=-3x_1+1-(-3x_2+1)=-3(x_1-x_2).$$

因此,当 $x_1<x_2$ 时, $f(x_1)-f(x_2)>0$,即

$$f(x_1)>f(x_2).$$

故该函数在$(-\infty,+\infty)$内是单调减少的.

3. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$,$x\in D$,若存在常数 $l>0$,对于任意 $x\in D$,有 $f(x+l)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$是周期函数,满足上面等式的最小正数 l 叫做函数 $f(x)$的周期.

函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数, $y=\mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$ 是以 π 为周期的周期函数.

有很多自然现象,像季节、气候等都是年复一年的呈周期变化的;有很多经济活动,小到商品销售,大到经济宏观运行,其变化也

具有周期规律性.

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$, $x\in D$, 若存在常数 $M>0$, 对任意 $x\in D$, 都有:

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 内是有界的, 否则称 $f(x)$ 在 D 内无界.

例如函数 $y=\sin x$, $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的, 因为对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$, 存在 $M=1$, 使得

$$|\sin x|\leqslant 1, \qquad |\cos x|\leqslant 1.$$

练 习 1.1

(A)

(一)填空题

1. 设 $f(x)=x^3-1$, $f(0)=($ $\quad$ $)$, $f(-x)=($ $\quad$ $)$;

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x>0, \\ 1, & x=0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

$f(0)=($ $\quad$ $)$, $f(-1)=($ $\quad$ $)$, $f(1)=($ $\quad$ $)$;

3. 函数 $f(x)=\lg(2x-1)$ 的定义域是($\quad$);

4. 在 $x\in($ $\quad$ $)$, $f(x)=x^2$ 是单调减少的函数;

5. 函数 $f(x)=\operatorname{tg}2x$ 的周期是($\quad$).

(二)选择题

1. 下列函数对中, 表示相同的函数是($\quad$).

(A) $f(x)=|x|$, $\qquad g(t)=\sqrt{t^2}$;

(B) $y=\lg x^2$, $\qquad y=2\lg x$;

(C) $y=\lg x^2$, $\qquad y=2\lg|x|$;

(D) $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$, $\qquad y=x-1$.

2. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$, 那么 $f(x+1)$ 的定义域是

(　　).

(A) $[0,1]$;　　(B) $[-1,0]$;

(C) $[1,2]$;　　(D) $[0,2]$.

3. 函数 $f(x)=1+2\sin x$ 的值域是(　　)

(A) $[-1,3]$;　　(B) $[-1,1]$;

(C) $[0,2]$;　　(D) $[0,3]$.

4. 下列函数中是奇函数的有(　　).

(A) $x^2-\cos x$;　　(B) $\sin x^3-4x$;

(C) $10^{-x}+10^x$;　　(D) $\dfrac{\sin x}{x}$.

5. 下列函数中,(　　)是单调函数.

(A) $y=2^x$;　　(B) $y=2-3x$;

(C) $y=(x-1)^2-1$　　$(1\leqslant x<+\infty)$

(D) $y=(x-1)^2-1$　　$(-\infty<x<+\infty)$.

(B)

1. 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\sqrt{2x+1}$;　　(2) $f(x)=\sqrt{lg(4-x)}$;

(3) $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}$;　　(4) $g(x)=\dfrac{x}{x^2-4x+3}$;

(5) $f(x)=\dfrac{1}{\lg(2-x)}$;　　(6) $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{1-x}$.

2. 设 $f(x)=2x^2+3x-4$,求 $f(0),f(-2),f(3),f(-x)$,$f(c+1),f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. 如果 $f(x)=2^x$,判断下列式子的正确性.

(1) $2[f(x+3)-f(x-1)]=15f(x)$;

(2) $\dfrac{f(x+3)}{f(x-1)}=f(4)$.

4. 判别下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^5-2x^3-4x$;　　(2) $f(x)=\cos x-\sin x$;

(3) $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$；　　　　(4) $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$.

5. 判别下列函数的单调性.

(1) $y=2x-1$；　　　　(2) $y=\log_a(x+1)$.

§1.2 反函数　复合函数　初等函数

一、反函数

在函数的定义中有两个变量：一个叫自变量；一个叫因变量，一主一从，地位不同．然而在实际问题中，谁是自变量，谁是因变量，并不是绝对的，它们是可以依所研究的具体问题不同而转化的．

例如，设某种商品的单价是 P，每日销售量为 Q，每日的销售收入为 R，则

$$R=PQ.$$

销售收入 R 是销售量 Q 的函数．

若制定计划要求每日的收入为 R，问每日要销售量 Q 为多少时，则应把 Q 表示成 R 的函数

$$Q=\frac{R}{P}.$$

我们将 $Q=\frac{R}{P}$ 称为 $R=PQ$ 的反函数．一般地，有如下定义：

定义 1.2　设给定函数 $y=f(x)$，其值域是 Y，如果对 Y 中的每一个 y 值，都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的一个 x 值，则得到一个定义在 Y 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数：$x=\varphi(y)$，它称为函数 $y=f(x)$ 的反函数．

函数 $y=f(x)$ 的反函数记为 $x=f^{-1}(y)$.

因为函数对于用什么字母来表示自变量和因变量是没有限制的，因此对于字母没有特定意义的函数，习惯上总用 x 表示自变

量，y 表示因变量，故 $y=f(x)$ 的反函数可以记为 $y=f^{-1}(x)$.

例 1 求 $y=f(x)=2^{x-1}$ 的反函数.

解 由 $y=2^{x-1}$ 解得 x，得

$$x=\log_2 y+1.$$

将 x,y 的位置互换，得

$$y=\log_2 x+1.$$

这就是函数 $y=2^{x-1}$ 的反函数.

函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=f^{-1}(y)$ 代表同一方程，因此它们的图形是一条相同的曲线，但若按习惯，在反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中，x 与 y 互换，即 $y=f^{-1}(x)$，则反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 的图形是对称于直线 $y=x$ 的(图 1—2).

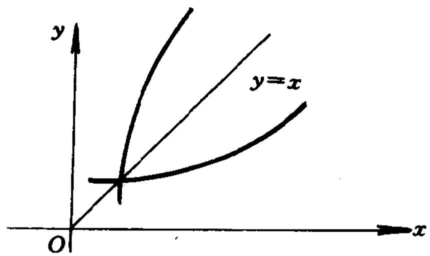

图 1—2

二、基本初等函数

我们把下列六类函数统称为基本初等函数：

1. 常数函数

$y=f(x)=C$，(C 是常数).

2. 幂函数

$y=f(x)=x^{\alpha}$，(α 为实数).

常见的幂函数有 $f(x)=x,x^2,x^3,\sqrt{x},\frac{1}{x},\frac{1}{\sqrt{x}}$ 等.

3. 指数函数