

拱
的
稳
定
性

拱 的 稳 定 性

A. H. 金 尼 克 著

建
筑

.2I24

8

582

社

建 筑 工 程 出 版 社

拱 的 穩 定 性

呂子華譯

建 筑 工 程 出 版 社 出 版

5900200

內容提要 本书是研究拱的稳定性的一部专著。它比較全面而有系統地就圓拱、拋物綫拱、懸鏈綫拱以及圓環的穩定問題作了深湛精辟的研究，对于荷載大于临界值以及压应力超过比例極限时的拱也作了詳細的闡释。书中还列出了許多富有实用价值和研究参考价值的表格和綫图，因而它是結構設計工程師們經常需要的一种讀物。

原本說明

書 名 УСТОЙЧИВОСТЬ АРОК
著 者 А. Н. Дивник
出 版 者 Государственное издательство технико-теоретической литературы
出版地点 及 年 份 Москва—1946—Ленинград

拱 的 稳 定 性

呂 子 華 譯

*

建筑工程出版社出版（北京市阜成門外大街）

（北京市书刊出版业营业許可証出字第052号）

建筑工程出版社印刷廠印刷·新華書店發行

書号 952 102十字 787×1092 $\frac{1}{32}$ 印 張 $4\frac{7}{8}$

1958年9月第1版 1958年9月第1次印刷

印數：1—3,360冊

定價(10)0.65元

目 录

序 言	6
緒 論	9
第一章 薄壁杆件的平衡微分方程	13
§ 1. 平面形变情形下克希霍夫方程的推导	13
§ 2. 曲杆的微小形变	16
§ 3. 力与位移的关系	19
§ 4. 圆杆情形	19
§ 5. 空間形变情形	20
第二章 圆拱的稳定性	27
§ 6. 預备知識	27
§ 7. 拱的圆形平衡形式	29
§ 8. 均布静水压力 p 作用下的圆拱	30
§ 9. 力保持指向中心的情形	41
§ 10. 力保持其大小和方向不变的情形	45
§ 11. 剪力的影响組合拱	46
§ 12. 两端弹性嵌固的圆拱	50
§ 13. 关于铰中的摩擦問題	53
§ 14. 变截面圆拱	54
§ 15. 拱的空間形变(丧失平面弯曲形式的稳定性)	55
§ 16. 拱的純弯曲	59
第三章 抛物綫拱	61
§ 17. 平衡方程	61
§ 18. 拱弯曲軸的微分方程及其积分	63
§ 19. 等截面抛物綫二铰拱. 轉动力情形	66

20. 拋物綫无鉸拱	68
§ 21. 三鉸拱	69
§ 22. 一鉸拱	71
§ 23. 結 果	72
§ 24. 荷載性質的影响	72
§ 25. 与其他作者的公式以及与試驗結果的比較	74
§ 26. 等強度拋物綫拱	78
§ 27. 空間形变	81
第四章 坦圓拱的稳定性	85
§ 28. 总 論	85
§ 29. 正弦拱	86
§ 30. 拱推力的确定	88
§ 31. 例 題	91
§ 32. 一般情形	99
§ 33. 丧失稳定时拱的两种弯曲形式	105
§ 34. 試 驗	106
§ 35. 中央有集中荷載 P 的拱	106
§ 36. 支承和系杆弹性的影响	109
第五章 各种情况	111
§ 37. 具有倒悬綫綫形式的拱。等截面拱	111
§ 38. 具有倒悬綫綫形式的拱。变截面拱	113
§ 39. 圓 环	115
§ 40. 切向力情形	116
§ 41. 拱在比例極限外的稳定性	117
§ 42. 关于压弯拱的稳定性	124
第六章 荷載大于临界值时的拱	126
§ 43. 总 論	126
§ 44. 圓 拱	128
§ 45. 拱的弯曲微分方程	129

§ 46. 弯曲方程的积分	130
§ 47. 結 果	133
§ 48. 拋物綫拱	136
§ 49. 拱的弯曲軸的微分方程	138
§ 50. 結 果	139
§ 51. 外力大于临界值时的受压圓环	143
§ 52. 小挠度情形	145
§ 53. 大挠度情形	149
§ 54. 拱的弯曲試驗	153
§ 55. 結 論	153

拱 的 穩 定 性

呂子華譯

建 筑 工 程 出 版 社 出 版

5900200

內容提要 本书是研究拱的稳定性的一部专著。它比較全面而有系統地就圓拱、拋物綫拱、懸鏈綫拱以及圓環的穩定問題作了深湛精辟的研究，对于荷載大于临界值以及压应力超过比例極限时的拱也作了詳細的闡释。书中还列出了許多富有实用价值和研究参考价值的表格和綫图，因而它是結構設計工程師們經常需要的一种讀物。

原本說明

書 名 УСТОЙЧИВОСТЬ АРОК
著 者 А. Н. Дивник
出 版 者 Государственное издательство технико-теоретической литературы
出版地点 及 年 份 Москва—1946—Ленинград

拱 的 稳 定 性

呂 子 華 譯

*

建筑工程出版社出版（北京市阜成門外大街）

（北京市书刊出版业营业許可証出字第052号）

建筑工程出版社印刷廠印刷·新華書店發行

書号 952 102十字 787×1092 $\frac{1}{32}$ 印 張 $4\frac{7}{8}$

1958年9月第1版 1958年9月第1次印刷

印數：1—3,360冊

定價(10)0.65元

目 录

序 言	6
緒 論	9
第一章 薄壁杆件的平衡微分方程	13
§ 1. 平面形变情形下克希霍夫方程的推导	13
§ 2. 曲杆的微小形变	16
§ 3. 力与位移的关系	19
§ 4. 圆杆情形	19
§ 5. 空間形变情形	20
第二章 圆拱的稳定性	27
§ 6. 預备知識	27
§ 7. 拱的圓形平衡形式	29
§ 8. 均布靜水压力 p 作用下的圆拱	30
§ 9. 力保持指向中心的情形	41
§ 10. 力保持其大小和方向不变的情形	45
§ 11. 剪力的影响組合拱	46
§ 12. 两端弹性嵌固的圆拱	50
§ 13. 关于鉸中的摩擦問題	53
§ 14. 变截面圆拱	54
§ 15. 拱的空間形变(丧失平面弯曲形式的稳定性)	55
§ 16. 拱的純弯曲	59
第三章 拋物綫拱	61
§ 17. 平衡方程	61
§ 18. 拱弯曲軸的微分方程及其积分	63
§ 19. 等截面拋物綫二鉸拱. 轉动力情形	66

20. 拋物綫无鉸拱	68
§ 21. 三鉸拱	69
§ 22. 一鉸拱	71
§ 23. 結 果	72
§ 24. 荷載性質的影响	72
§ 25. 与其他作者的公式以及与試驗結果的比較	74
§ 26. 等強度拋物綫拱	78
§ 27. 空間形变	81
第四章 坦圓拱的稳定性	85
§ 28. 总 論	85
§ 29. 正弦拱	86
§ 30. 拱推力的确定	88
§ 31. 例 題	91
§ 32. 一般情形	99
§ 33. 丧失稳定时拱的两种弯曲形式	105
§ 34. 試 驗	106
§ 35. 中央有集中荷載 P 的拱	106
§ 36. 支承和系杆弹性的影响	109
第五章 各种情况	111
§ 37. 具有倒悬綫綫形式的拱。等截面拱	111
§ 38. 具有倒悬綫綫形式的拱。变截面拱	113
§ 39. 圓 环	115
§ 40. 切向力情形	116
§ 41. 拱在比例極限外的稳定性	117
§ 42. 关于压弯拱的稳定性	124
第六章 荷載大于临界值时的拱	126
§ 43. 总 論	126
§ 44. 圓 拱	128
§ 45. 拱的弯曲微分方程	129

§ 46. 弯曲方程的积分	130
§ 47. 結 果	133
§ 48. 拋物綫拱	136
§ 49. 拱的弯曲軸的微分方程	138
§ 50. 結 果	139
§ 51. 外力大于临界值时的受压圓环	143
§ 52. 小挠度情形	145
§ 53. 大挠度情形	149
§ 54. 拱的弯曲試驗	153
§ 55. 結 論	153

序 言

本书系专门研究拱的稳定问题，也就是研究拱的第一类稳定性(欧勒意义下的稳定性)和第二类稳定性(拱丧失承载能力)。

解决这两个问题时，在绝大多数场合(第四和第六两章除外)，我们应用了克希霍夫氏薄壁曲杆的平衡微分方程；可是为了求这些方程的积分，却以采用数值积分法为主。只有在那些以简单函数，例如以三角函数(见第二章)能够获得解答的情形下，才没有应用这个方法。如果象第六章处理圆拱或圆环大挠度问题所发生的那样，要以复杂函数(例如椭圆函数)才能获得解答，那么我们还是宁愿应用数值积分法；因为，一次完成数值积分，比获得复杂函数联合形式的结果后，再进行数值计算较为简单些。一般说来，我们现在研究的这个问题，要比用史捷麦尔法求微分方程的数值积分，复杂得多。

因为克希霍夫方程是在横截面的几何尺寸与杆长相较甚为微小的假定下导出来的，所以人们必然产生这样的问题：它们是否可以用来确定拱的临界荷载？获得的结果究竟可以信赖到什么程度？在一般书籍中，关于拱的稳定试验绝少记述，因而在德聶伯彼得罗夫斯克冶金学院力学试验室中，曾经进行了丰富的有关拱的稳定试验。可惜的是，由于德国法西斯匪帮的侵略，中断了这些试验，但在法西斯侵略以前所做的那些结果，我们都已保存下来。这些结果现在分别引述

在本书相应的各章中。一般說来，这些試驗使理論得到了很好的証实。尽管所有这些試驗是在試驗室內而不是用真实拱来进行的，可是要建立这样的試驗，目前还不太可能。

在第一章里，导出了克希霍夫氏薄壁杆件的平衡方程。我們首先对平面形变情形作出結論，然后再討論空間形变。故意这样处理的目的是，为了使讀者容易理解这个颇为复杂的几何图形。

在第二章里，克希霍夫方程已被应用到圓拱上来。在这种场合，可用三角函数求出方程的积分。我們詳細地探討了各种不同的拱端固定情形，闡述了荷載性質和剪力的影响，最后还研究了变截面拱和拱的空間形变，等等。

第三章專門討論拋物綫拱。在所有熟知的解答中，总是要預先假定拱的矢高和其跨长相較甚为微小。应用克希霍夫方程就可避免这种限制。由于获得的方程不能积分为有限形式，所以这里必須采用数值积分法。象第二章一样，我們也詳細地研究了各种不同的拱端固定情形、等强度拱、空間形变，等等。关于弹性嵌固的影响我們未加研討，不过这个問題并无原則性的困难，只是需要略微改变一下边界条件，然后再求弯曲方程的数值积分即可。

第四章研究了坦圓拱的稳定問題，其中考虑到拱軸的縱向压縮。这里所指的是关于拱的第二类稳定性，也就是关于拱丧失承载能力的問題。这个問題基本上是由鉄木辛柯提出并予以解决的(合金扁条在温度变化下的弯曲問題)。我們只在鉄木辛柯的解答中加进若干补充，引入一些工程应用上的例題和試驗結果，并給出可以判断拱在丧失稳定时系按两个半波(丧失第一类稳定性)还是一个半波(丧失拱的承载能力)而弯曲的簡單准則。

第五章探討了几个特殊情况，例如：具有倒悬鏈綫形式的等截面拱和变截面拱(等强度拱)。作为圓拱的一种特殊情况，我們也簡略地叙述了圓环在平面和空間形变下的穩定問題。其次还研究了压应力超过比例极限时拱的稳定性，同时还应用了适于此种情况下的恩格塞尔—卡門理論，这一理論在直杆縱向弯曲的情形下給了极为良好的結果。在本章末，我們总结了有关压弯拱穩定問題的評論，并指明截至目前为止在这个极为重要的問題上获得的一切結果，还不能取信于人；同时这里还指明，当应力大于比例极限时，借助改变杨氏模量的恩格塞尔—卡門理論而用数值积分法，能够得到比較可靠的結果。

最后，在第六章中研究了关于拱的这样一个問題：如果施于拱上的荷載大于临界值，拱的形式将会怎样，而拱中又发生什么样的应力。我們依次对圓拱、拋物綫拱和圓环作了詳細的研究。最后发现，如果超过临界荷載的超載不大，对于拱來說，并不象对于直杆那样危險。

在这里，我們沒有叙述确定临界力的許多方法；关于这点，讀者可在相应的教程中找到詳尽的介紹。

本书可供工程师和技术員的參考。因此，叙述力求浅显易懂，解答力求彻底，也就是算出了許多表格，并繪制了一些綫图；如果工程生产人員需要計算拱的稳定性时，就可直接利用这些表格和綫图。我們还闡述了由工程实践中取出的許多例題。在每章之末罗列了参考書籍。我們的意思絕对不是要給出詳尽无遺的参考書籍一覽表，只不过指出一些最重要而主要是最新的著作。在本书末还列举了几本有关弹性体系穩定方面的著作。

作者

緒 論

我們知道，每一個工程結構都必須計算強度；可是在某些情形下，還必須計算穩定。所謂某些情況，主要是指這樣一類結構：它們的整體或部分可以考慮作薄壁杆件、平板、薄殼、或者它們的組合體。屬於這類結構的，首先是各種各樣的撐杆，簡單和複雜的以及實體和空心的立柱；其次就是與曲杆本身長度相較頗為纖細的拱。

和其他彈性體系一樣，拱也可以有穩定平衡或不穩定平衡，這要依據作用在拱上的那些力的大小為轉移。試以在均布靜水壓力作用下的圓拱為例說明之。我們認為拱的兩端是固定的，因而它不能象剛體一樣整個移動。如果拱上的荷載不大，則拱仍舊保持圓形，僅其軸綫長度略有減小而已。但是，在壓力增大的情況下，可能出現這一時刻：當拱的圓形平衡形式變成不穩定時，則拱即發生扭曲。使拱的圓形平衡形式變成不穩定的那種壓力，通常稱為臨界壓力。對於一個工程師來說，知道他所計算的那種結構的臨界荷載大小是十分重要的。結構上的實際荷載必須小於臨界荷載。違反這個規則，就可能引起事故和禍端。如所周知，引起結構毀壞的許多情形，都是由於整個結構或者它的任何個別部分，負擔了大於臨界荷載的外力，因而失去自己穩定性的結果。

在下面，我們將要討論兩種類型的喪失穩定性，並且把它們命名為喪失第一類穩定性（或喪失歐勒意義下的穩定性）和喪失第二類穩定性（或喪失拱的承載能力）。

欧勒早在自己有关直杆纵向弯曲的许多著作中，就曾首先研究过丧失第一类稳定性的问题；并且截至目前为止，直杆的纵向弯曲情形，一直被称为欧勒情形。在拱中，这种稳定性丧失是以下述方式发生的。我们还是以均布静水压力作用下的圆拱为例来说明。如果压力不大，则拱仍旧保持圆形，只不过略有收缩而已。在荷载微小的情况下，拱的这种

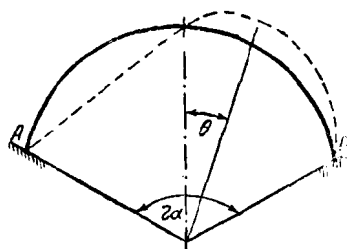


图 1

平衡形式是唯一的形式，也是稳定的形式。在压力增大的情况下，可能出现这一时刻：圆形平衡形式还会可能变成另一种平衡形式，亦即拱可以依两半波曲线而弯曲(图 1)；此时圆形平衡形式变成不稳定的，而扭曲后的平衡形式却成了稳定的。第二种平衡形式出现时的那种荷载，通常称之为第一

临界荷载。若荷载继续增加，还可能出现一种具有三半波的平衡形式(图 2)。因此，在这种荷载作用下，圆拱可能具有下列三种平衡形式：

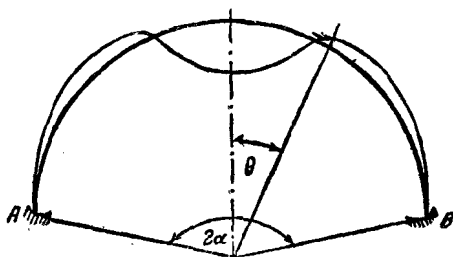


图 2

1) 圆弧，

2) 在圆弧上呈现两半波正弦曲线,

3) 在圆弧上呈现三半波正弦曲线。

这三种平衡形式之中,具有两半波的形式是稳定的形式。能够出现第三种平衡形式的那种荷载,通常称为第二临界荷载。当荷载继续增加时,还可能出现具有四半波的第四种平衡形式,具有五半波的第五种平衡形式……等等。

如果有几个平衡形式,则其中通常只有一个是稳定的,其余均为不稳定的。就我们的例子来说,当荷载超过第一临界荷载时,只有按两半波而扭曲的拱,才是稳定形式。对实际应用来说,只有最小第一临界荷载才是重要的。

在这里我们指出以下三点:

1) 在丧失第一类稳定性的情况下,我们总是要和各种不同的平衡形式发生关系,也就是说,这些平衡状态具有着质的、而不是量的区别。最初,拱有一个唯一的平衡形式,而后有两个,再后有三个,等等。

2) 在临界荷载的情况下,会引起可能平衡形式的分支;当荷载大于临界值时,拱的原来形式虽然不再是稳定的,但仍旧是可能平衡形式之一。

3) 与前一个形变过程相比,丧失第一类稳定性的现象,实质上就是新的形变过程的开始阶段。例如,当荷载小于临界值时,拱只是受压;而当荷载大于临界值时,除了仍

旧受压以外,拱还出现了弯曲。

丧失第二类稳定性(丧失拱的承载能力)时的现象,完全

具有另外一种特征。我们来举例说明:设有一个带有荷载 P

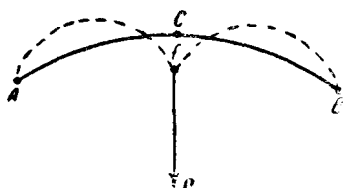


图 3