同济大学数学辅导系列丛书

高等数学专题分类指导

GAODENG SHUXUE ZHUANTI FENLEI ZHIDAO

西北工业大学高等数学教研室 编

同济大学出版社

同济大学数学辅导系列丛书

高等数学专题分类指导

西北工业大学高等数学教研室　编

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学专题分类指导/西北工业大学高等数学教研室编.

—上海:同济大学出版社,1999.7

(同济大学数学辅导系列丛书)

ISBN7-5608-2054-9

Ⅰ.高…

Ⅱ.西…

Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料

Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 26084 号

高等数学专题分类指导

西北工业大学高等数学教研室　编

同济大学出版社出版

(上海四平路 1239 号　邮编:200092)

新华书店上海发行所发行

同济大学印刷厂印刷

开本:850×1168　1/32　印张:17.75　字数:510 千字

1999 年 8 月第 1 版　　1999 年 8 月第 1 次印刷

印数:1—10000　　定价:20.00 元

ISBN 7-5608-2054-9/O·176

前　言

“上课能听懂,解题目却不知从何处下手”,这是许多大学一年级同学在高等数学课程学习中存在的问题。本书就是为了较好地解决这个问题而编写的。

“解题时不知从何处下手”这一问题的产生在于见过的题目类型太少,并且对做过的题目缺少归纳、总结。但是,由于高等数学课内容多,学时少,教师在课堂上没有时间给学生讲太多的例题及解题方法与技巧,因此,我们编写了这本参考书,旨在供学生课外阅读。

著名数学家、教育家乔治·波利亚(G. Polya)说:“解题可以认为是人的最富有特征性的活动……假如你想要从解题中得到最大的收获,你就应在所做的题目中去找出它的特征,那些特征在你以后去求解其他的问题时,能起到指导的作用。”根据这一思路,我们将高等数学中常见题目进行分类,分为 26 个专题,并通过精选的典型例题对每一个专题进行讲解:一方面给出这种类型习题常见的几种解法,另一方面阐明各种解法适用的题目所具有的特征。对教学中的难点本书用较大的篇幅作了重点讲解,如:中值问题的证明,方程根的证明等。对计算题,着重于计算方法的归纳、总结;对证明题,则着重于阐明分析问题的方法及证题思路。

本书配合同济大学《高等数学》教材(第四版)使用。全书共 26 讲,每一讲包括下列内容:一、基本内容提要:把本讲所用到的基本概念、定理、公式罗列出来,便于读者学习;二、典型例题:根据本讲所要讲述的内容,精选例题,通过这些例题的讲解,阐明解题思路、总结解题方法。每一个例题包括题目、分析与解三部分。一种类型的题目讲完后有小结:总结该类题目的特点、解题关键及常用解法;三、练习题:精选出若干具有代表性的题目供读者练习

用。书末附有练习题的答案与提示。

本书可作为高等学校工科高等数学课程的教学参考书，也可作为考研的数学复习资料。

参加本书编写工作的有西北工业大学应用数学系肖亚兰、孟雅琴、陆全、刘小冬、李云珠、王雪芳、杨月茜、符丽珍、方珍珍、王禧祛、郑红婵、郎荣玲等同志，最后由肖亚兰统纂定稿。

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，因而书中错误、疏漏之处在所难免，敬请广大读者批评、指正。

编　者
1999年5月

目　　录

第 1 讲　求极限的方法与技巧

极限概念与求极限的运算可以说是贯穿了高等数学的始终，因此，全面掌握求极限的方法与技巧是学好高等数学的基本要求．本讲较为全面地介绍了求数列极限与函数极限的各种方法，并按极限类型分专题；对每一种类型极限常用的解法作了介绍，每一个例题至少给出了一种解法，其他解法或作一简解，或只作一说明，留给读者去思考．

一、基本内容提要

1．极限的四则运算法则

设 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，则有

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$；

(2) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$；

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$.

2．极限存在准则

(1) 单调有界准则

设数列 x_n 单调增（或单调减）且有界，则数列 x_n 必收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$．

(2) 夹逼准则

如果数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件：

(1) $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n \quad (n = 1,2,3,\cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$．

那么，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$．

值得说明的是，准则的条件(1) 可削弱为当 $n > N_0$ 时，有 y_n

$\leqslant x_n \leqslant z_n$；$N_0$ 为某一确定的正整数. 同时，夹逼准则也适用于函数.

3. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

4. 无穷小的性质

(1) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小；

(2) 设 $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ 都是无穷小，且 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$，则当 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta} = a$（或 ∞）时，必有 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'} = \lim\dfrac{\alpha}{\beta} = a$（或 ∞）；

(3) 常用的 $x \to 0$ 时的等价无穷小有：

$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, \mathrm{e}^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, \mathrm{sh}x \sim x, \mathrm{th}x \sim x$.

5. 复合函数的连续性

设函数 $u = \varphi(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限存在且等于 a，即

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = a,$$

而函数 $y = f(u)$ 在点 $u = a$ 连续，那么，复合函数 $y = f[\varphi(x)]$，当 $x \to x_0$ 时的极限也存在且等于 $f(a)$，即

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)] = f(a),$$

或

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u\to a} f(u) = f(a).$$

6. 导数定义（见第 2 讲，第二章内容）

7. 拉格朗日中值定理（见第 3 讲，第三章内容）

8. 洛必达法则（第三章内容）

(1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$（或 ∞），且 $f(x), g(x)$ 在 $0 < |x - x_0| < \delta$ 可导，$g'(x) \neq 0$.

若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \quad (\text{或 } \infty)$$

则 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(2) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$(或 ∞),且 $f(x),g(x)$ 在 $|x|>N$ 可导,$g'(x)\neq 0$.

若 $$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda\quad(\text{或 }\infty)$$

则 $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

9. 泰勒公式(见第3讲,第三章内容)

10. 定积分定义(第五章内容)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$,各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1=x_1-x_0,\quad \Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\quad \Delta x_n=x_n-x_{n-1}.$$

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$,作和 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$,记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$,如果不论对 $[a,b]$ 怎样分法,也不论在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上点 ξ_i 怎样取法,只要当 $\lambda\to 0$ 时,和 S 总趋于确定的极限 I,则称极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分,记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

11. 定积分中值定理(见第9讲,第五章内容)

12. 级数收敛的必要条件(见第22讲,第十一章内容)

二、典型例题

对于诸如 $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$ 及 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{9}}\ln(2\cos 3x)$ 等可以直接使用极限的四则运算法则及函数的连续性求极限的题目,本讲将不再赘

述，而主要讨论未定式及不能直接利用极限四则运算法则及函数连续性求极限的题目．

求极限的一般步骤：

1. 判断极限类型．我们这里把极限分为九种类型．

2. 根据题目特点从该种类型极限常用的解法中选择一种方法求解．下面我们将给出各种类型极限常用的解法．

（一）$\left(\frac{0}{0}\right)$型极限

分子，分母的极限均为零的极限，由于分母的极限是零，故不能使用极限的四则运算法则，常用的方法有以下六种：

1. 约去零因式法

例 1.1 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

分析 本题属有理式$\left(\frac{0}{0}\right)$未定型，往往用约分的方法，消去分子与分母的零因式$(x-1)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1}[1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)]$$

$$=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

例 1.2 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$，其中 m,n 为正整数．

分析 这是含根式的$\left(\frac{0}{0}\right)$未定型极限，应当先有理化，再约分消去零因式$(x-1)$.

解 1 作变量代换使有理化，令 $t=x^{\frac{1}{mn}}$，于是

$$\text{原式}=\lim_{t\to1}\frac{t^n-1}{t^m-1}=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+1)}{(t-1)(t^{m-1}+t^{m-2}+\cdots+1)}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+1}{t^{m-1}+t^{m-2}+\cdots+1}=\frac{n}{m}.$$

解 2　用洛必达法则求极限(第三章内容),略．

2. 利用重要极限法

例 1.3　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin nx}{\sin mx}$.

解 1　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin nx}{nx}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\sin mx}{mx}}\cdot\dfrac{n}{m}=\dfrac{n}{m}$.

解 2　等价无穷小代换法,原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{nx}{mx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n}{m}=\dfrac{n}{m}$.

解 3　洛必达法则(第三章内容),略．

例 1.4　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

分析　显然应当先有理化根式,再利用重要极限.

解　原式

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

小结　在极限式子中,如果出现有非零极限的因子,则用极限的相乘法则把它分离出去,先求出来,可使运算简单,本题中因子$\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$的极限是$\dfrac{1}{2}$,因子$\dfrac{\sin x}{x}$与$\dfrac{1}{\cos x}$的极限是 1,在运算中都先把它们分离出去并求出结果．

例 1.5　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

分析　分子是三角函数的和、差,应当先把其化成积的形式,再利用重要极限．

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin(a+x)\cos x-2\sin(a+x)}{x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} 2\sin(a + x) \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

$$= 2\sin a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\sin a.$$

例 1.6 计算极限 $\lim\limits_{x \to -1+0} \dfrac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1 + x}}$.

分析 极限中含有反三角函数,由于反三角函数的变形较不方便,故先作变换将其转化为三角函数,再利用重要极限.

解 令 $\arccos x = t$, $x = \cos t$ 则

$$原式 = \lim_{t \to \pi - 0} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{t}}{\sqrt{1 + \cos t}} = \lim_{t \to \pi - 0} \frac{\pi - t}{\sin t} \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{\sqrt{\pi} + \sqrt{t}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \lim_{t \to \pi - 0} \frac{\pi - t}{\sin(\pi - t)} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}.$$

小结 以上四题的共同特点是含三角函数式的$\left(\dfrac{0}{0}\right)$型未定式.解这类题目的基本方法是应用重要极限$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.为此,需先将函数进行恒等变形,常用的变形手段有有理化、和差化积、变量代换等.

3.等价无穷小代换法

例 1.7 求$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt[n]{1 + x - x^2} - 1)\arctan^2 x}{\sin 2x(1 - \cos x)}$.

分析 极限中含有根式函数,又含有反三角函数,故应当先用等价无穷小替换 $\arctan x \sim x$, $\sqrt[n]{1 + x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$, $\sin x \sim x$, $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}(x \to 0)$,变成三角函数或幂函数,然后再求极限.

解 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{n}(x - x^2)x^2}{2x \cdot \frac{1}{2}x^2} = \dfrac{1}{n} \lim\limits_{x \to 0}(1 - x) = \dfrac{1}{n}$.

例 1.8 已知$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$,求$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x}-1}=2$,

而分母极限 $\lim\limits_{x\to0}(e^{3x}-1)=0$,

故必有 $\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1)=0$(否则,若此极限不为零,则整个分式极限为 ∞),

由此可知 $\lim\limits_{x\to0}f(x)\sin2x=0$.

利用等价无穷小替换,$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}$,$e^x-1\sim x(x\to0)$,有

$$2=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin2x}{3x}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}f(x)\frac{\sin2x}{2x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}f(x),$$

故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=6$.

例 1.9 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(a+x)+\ln(a-x)-2\ln a}{x^2}$.

分析 此题属含对数函数的 $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ 型未定式,求这类极限的方法是运用等价无穷小替换 $\ln(1+x)\sim x(x\to0)$. 为此需先将函数进行变形:(1) 将多个对数式合并写成一个对数式;(2) 同时必须将对数的真数部分改写成(1 + 无穷小)的形式.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\dfrac{a^2-x^2}{a^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{x^2}{a^2}}{x^2}=-\frac{1}{a^2}.$$

例 1.10 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\sqrt{4+x^3}-2}$.

分析 设法利用等价无穷小替换 $e^x-1\sim x$,$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}(x\to0)$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{2\left(\sqrt{1+\dfrac{x^3}{4}}-1\right)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{4}}$

$=4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=4\cdot\dfrac{1}{2}=2$ （见例 1.4）.

小结　当函数是根式函数、反三角函数、对数函数、指数函数时，用等价无穷小替换把它变成三角函数和幂函数，然后再求极限，也是常采用的手段之一．$x\to0$时的等价无穷小已在基本内容提要中给出，要熟记它们.

4. 用导数定义求极限(第二章内容)

例 1.11　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left[f\left(t+\dfrac{x}{a}\right)-f\left(t-\dfrac{x}{a}\right)\right]$，其中$t,a$与$x$无关，且$a\neq0$，而$f(x)$是可导函数．

分析　利用导数定义$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$可以将求极限问题转化为求导数．

解　令$h=\dfrac{x}{a}$，

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\left[f\left(t+\dfrac{x}{a}\right)-f(t)\right]-\left[f\left(t-\dfrac{x}{a}\right)-f(t)\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{a}\cdot\frac{f\left(t+\dfrac{x}{a}\right)-f(t)}{\dfrac{x}{a}}+\lim_{x\to0}\frac{1}{a}\cdot\frac{f\left(t-\dfrac{x}{a}\right)-f(t)}{-\dfrac{x}{a}}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{a}\cdot\frac{f(t+h)-f(t)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{1}{a}\cdot\frac{f(t-h)-f(t)}{-h}$$

$$=\frac{1}{a}f'(t)+\frac{1}{a}f'(t)=\frac{2}{a}f'(t).$$

5. 用洛必达法则求极限(第三章内容)

例 1.12　设$f(x)$在点a的邻域内可导，且在点a处二阶可导，求

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}.$$