微分几何与拓扑学教程

第二册

[苏] А.С. Мищенко А.Т. Фоменко 著

张爱和 译　　　陈维桓 校

高等教育出版社

26

7

微分几何与拓扑学教程

第 二 册

[苏] А. С. Мищенко 著
А. Т. Фоменко

张爱和译
陈维桓校

高等教育出版社

（京）112号

本书系按照莫斯科大学出版社 1980 年出版的 A.C. Мищенко, A.T.Фоменко 著《Курс, Дифференциальной геометрии и топологии》一书翻译的，原书经原苏联高等与中等专业教育部批准作为大学数学-力学专业的教科书.

中译本分三册出版，第一册内容：微分几何概论，一般拓扑，光滑流形(一般理论)；第二册内容：光滑流形(例)；第三册内容：张量分析和黎曼几何，同调论，黎曼几何的简单变分问题.

本书为第二册，除了把三维欧氏空间中的曲线论和曲面论作为光滑流形的例子外，还阐述了诸如作为负常曲率流形的 Beltrami 曲面，作为 R^3 中极小曲面的"肥皂膜"，黎曼流形上的等距变换群，作为李群的各种矩阵变换群，动力系统，代数函数的黎曼曲面等，此外还给出了二维曲面的分类. 内容丰富，叙述详细，可作为数学专业的参考书，亦可作为研究生或数学工作者、数学教师的参考书.

微分几何与拓扑学教程

（第二册）

〔苏〕A.C.Мищенко　A.T.Фоменко 著

张爱和 译　[illegible] 校

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

开本 850×1168　1/32　印张 5.375 字数 130 000

1994 年12月第1版　1994 年12月第1次印刷

印数 0001—1 115

ISBN7-04-004582-6/O·1292

定价5.40元

目　录

第四章　光滑流形(例) ……………………………………………… 1

§1. 平面曲线和三维空间中的曲线 ……………………………… 1

1. 平面曲线论 Frenet 公式 ………………………………………… 1

2. 空间曲线论 Frenet 公式 ………………………………………… 10

§2. 曲面第一和第二基本形式 …………………………………… 17

1. 第一基本形式 ……………………………………………………… 17

2. 第二基本形式 ……………………………………………………… 22

3. 超曲面上光滑曲线的初等理论 …………………………………… 28

4. 二维曲面的 Gauss 曲率和平均曲率 ……………………………… 38

§3. 变换群 ……………………………………………………………… 62

1. 变换群的简单例子 ………………………………………………… 62

2. 矩阵的变换群 ……………………………………………………… 80

§4. 动力系统 …………………………………………………………… 97

§5. 二维曲面的分类 …………………………………………………… 116

1. 带边流形 …………………………………………………………… 116

2. 可定向流形 ………………………………………………………… 119

§6. 代数函数的黎曼曲面 ……………………………………………… 141

第四章　光滑流形(例)

§1　平面曲线和三维空间中的曲线

1. 平面曲线论　Frenet公式

我们考虑笛卡儿坐标为 (x,y) 的欧氏平面 $\boldsymbol{R}^2$. 平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上的光滑曲线 $\gamma(t)$ 借助于两个函数 $x(t)$, $y(t)$ 给出，也就是说我们将研究由坐标原点 O 发出的光滑曲线 $\gamma(t)$ 的向径

$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t)).$$

提醒一下，具有坐标 $\left(\frac{dx(t)}{dt},\ \frac{dy(t)}{dt}\right)$ 的向量称为曲线 $\gamma(t)$ 在 t 点的**速度向量** $\vec{v}(t)$. 由这个向量确定的直线称为曲线在点 $\gamma(t)$的**切线**. 当然，我们同时假定 $\vec{v}(t)\neq 0$. 在本节中，我们将认为这个假定是满足的(注意，在速度向量为 0 的那些点，光滑曲线可能受折损;在第一章中曾给出过例子). 向径的导数有时表示为:

$$\dot{\vec{r}}=\vec{v}(t)=(\dot{x}(t),\dot{y}(t)).$$

用 $\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|=|\vec{v}(t)|$ 表示速度向量的模(在欧氏度量下). 设 s 表示曲线上某个固定点到变点的曲线弧长;那么(由于点沿曲线在一个方向上运动时弧长单调增加)沿着曲线可以取弧长为参数. 这个参数称为**自然参数**; 写成依赖于参数 s 的向量函数形式的曲线方程 $\vec{r}(s)=(x(s),y(s))$ 称为曲线的**自然参数化**.

引理 1　写成自然参数的曲线，其速度向量的模是常数并且等于 1.

证明 因为弧长公式为

$$l(\gamma)\big|_a^b=\int_a^b\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|dt,$$

所以对任何点都有恒等式

$$dl=dt\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|,$$

这就是所要证明的.

于是,可以认为沿着有自然参数的曲线，运动有常速度(仅仅速度向量的模是常数,但它的方向却不是). 推论：在曲线的任何点速度向量 $\vec{v}(s)$ 不等于 0. 这里利用了对原来的参数 t，满足关系式 $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\neq 0$ 的事实. 除速度向量外，还有一个与曲线上每一点相对应的向量 $\vec{q}(s)=\frac{d\vec{v}(s)}{ds}$，它光滑地依赖于点. 这个向量垂直于速度向量,由下面的引理得到.

引理 2 设给出向量函数 $\vec{p}(t)$, $|\vec{p}(t)|\equiv 1$. 那么向量 $\frac{d\vec{p}(t)}{dt}$ 垂直于向量 $\vec{p}(t)$ $\left(\text{对任何 } t,\ \frac{d\vec{p}(t)}{dt}\neq 0\right)$.

证明 由条件得到$(\vec{p},\vec{p})$①$\equiv 1$. 对参数 t 微分这个恒等式，得到

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt},\ \vec{p}\right)+\left(\vec{p},\ \frac{d\vec{p}(t)}{dt}\right)\equiv 0,\ \text{即}\ \left(\frac{d\vec{p}}{dt},\ \vec{p}\right)\equiv 0,$$

这就是所要求的.

于是,取自然参数的光滑曲线 $\gamma(s)$ 的每一点,自然地有两个

① 原书在第一章 § 2 开始曾定义了欧氏数量积，并用记号⟨,⟩；在第三章 § 3 中出现了(,). 对此译者在译本第一册 p.119 加了译注,称之为欧氏空间的内积，这里仍作如此理解. 在译本第二册第四章 § 3 中,读者可看到 ⟨,⟩ 与 (,) 的意义不尽同——译注.

互相垂直的向量，一个是速度向量，另一个是加速度向量．加速度向量的长度已不一定为 1． 为方便起见，考察单位向量

$$\vec{n}(s)=\frac{d\vec{v}(s)}{ds}\Big/\left|\frac{d\vec{v}(s)}{ds}\right|.$$

因此，在参数 s 变化时得到沿曲线的光滑标架场，即二维标架簇 $(\vec{v}(s),\vec{n}(s))$．向量 $\vec{n}(s)$ 称为曲线在点 s 的**法向量**．每一个标架平行移动到坐标原点 O 以后，唯一地确定了平面绕 O 点的某个旋转；于是沿曲线的标架场确定了 $\gamma(s)$ 到正交矩阵群的某个光滑映射，即到平面旋转群的光滑映射．换句话说，可以认为每一曲线 $\gamma(s)$ 产生了以 (2×2) 正交矩阵作为点的光滑曲线．我们将直接在多维情况下研究这个曲线的某些性质，即位于某个高维欧氏空间中的曲线的某些性质（在以后讨论）．

定义 1 设光滑曲线取自然参数，量 $k(s)=\left|\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2}\right|$ 称为曲线在点 s 的曲率．

因为加速度向量的模是曲率（按照定义），所以

$$\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2}=k(s)\vec{n}(s),$$

这里 $\vec{n}(s)$ 是曲线在点 s 的法向量，从而

$$k(s)=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}.$$

若 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 是平面 $R^2(x,y)$ 上笛卡儿坐标的单位正交向量，那么法向量可用显式写出：

$$\vec{n}(s)=\left(\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{d^2y}{ds^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{d^2x}{ds^2}\vec{e}_1+\frac{d^2y}{ds^2}\vec{e}_2\right).$$

定义 2 数 $R(s)=1/k(s)$ 称为光滑曲线在点 s 的**曲率半径**．

在深入探讨以前，我们考察一些简单的曲线，这些曲线说明了

使用术语“曲率”和“曲率半径”的理由．平面上最简单的曲线是直线，直线的参数式是线性向量函数：

$$x(s)=x(0)+\alpha\cdot s;\ \ y(s)=y(0)+\beta\cdot s,$$

s 是自然参数．这里，对数 α,β 的选择加以限制，很明显它们应满足等式 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=1$，因为 $\vec{v}=(\alpha,\beta)$，$|\vec{v}(s)|\equiv 1$．这时，加速度向量 $\frac{d\vec{v}(s)}{ds}$ 恒等于 0，从而直线的曲率也等于 0．相应地，直线的曲率半径等于无穷大．

我们考察平面上半径为 R 的圆周．圆周的参数方程为：

$$x(s)=x(0)+R\cos\left(\frac{s}{R}\right),\ \ y(s)=y(0)+R\sin\left(\frac{s}{R}\right).$$

参数 s 从 0 变到 $2\pi R$．速度向量为

$$\vec{v}(s)=\left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right),\ \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right).$$

因此，

$$\frac{d\vec{v}(s)}{ds}=\left(-\frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right),\ -\frac{1}{R}\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right).$$

于是，圆周的曲率是常数，并且等于 $1/R$，而曲率半径等于 $1/k=R$．

但是在解许多具体问题时，曲线的方程不是用自然参数表示而是以某个任意参数 t 表示的，因此会计算用任意参数表示的曲线的曲率是有益的．

定理 1 设光滑曲线 $\gamma(t)$ 以 t 为参数（不一定是自然参数）．速度向量 $\vec{v}(t)$ 在点 t 不等于 0．则有如下的公式：

$$k(s)=\left|\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2}\right|=\frac{|x''y'-y''x'|}{[(x')^2+(y')^2]^{3/2}},$$

其中 $x',x'',\cdots$ 表示关于参数 t 的导数．

证明 设 $\gamma(t)$ 的参数表示为 $\vec{r}(t)=(x(t),\ y(t))$，速度向量

$\vec{v}(t)=(x'(t),\ y'(t))$；若 s 是自然参数，则对任意向量函数 $\vec{q}(t)$ 有

$$\frac{d}{ds}\vec{q}(t)=\frac{d\vec{q}(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}.$$

将 $\vec{q}(t)$ 取为

$$\vec{q}(t)=\vec{v}(t)/|\vec{v}(t)|=\frac{d\vec{r}(s)}{ds},$$

并由曲率的定义得到

$$k=\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|=\left|\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)\right|=\left|\frac{d}{ds}\left(\frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}\right)\right|,$$

而

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}\right)=\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}\right).$$

我们来求 $\dfrac{dt}{ds}$. 因为 $ds=\left|\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|dt$，所以

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\left|\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|}=\frac{1}{|\vec{v}(t)|}.$$

由此，得

$$\begin{aligned}k&=\frac{1}{|\vec{v}(t)|}\cdot\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}\right)\right|\\&=\frac{1}{|\vec{v}(t)|^2}\cdot\left(\frac{d(\vec{v}(t))}{dt}-\frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}\cdot\frac{d}{dt}|\vec{v}(t)|\right)\\&=\frac{1}{|\vec{r}'|^2}\left|\left(\vec{r}''-\frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}\cdot\frac{d}{dt}|\vec{r}'|\right)\right|\\&=\frac{1}{|\vec{r}'|^2}\cdot\left|\left(\vec{r}''-\frac{\vec{r}'}{2|\vec{r}'|^2}\frac{d}{dt}|\vec{r}'|^2\right)\right|.\end{aligned}$$

因为

$$\frac{d}{dt}|\vec{r}'|^2=\frac{d}{dt}(\vec{r}',\vec{r}')=2(\vec{r}',\vec{r}''),$$

所以

$$k=\left|\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2}\right|=\frac{1}{|\vec{r}'|^2}\left|\vec{r}''-\vec{r}'\cdot\frac{(\vec{r}',\vec{r}'')}{|\vec{r}'|^2}\right|.$$

更详细地，有

$$\frac{1}{|\vec{r}'|^2}\left(\vec{r}''-\vec{r}'\cdot\frac{(\vec{r}',\vec{r}'')}{|\vec{r}'|^2}\right)=\frac{1}{|\vec{r}'|^2}\left(x''-x'\frac{x'x''+y'y''}{(x')^2+(y')^2}\right)\vec{e}_1$$

$$+\frac{1}{|\vec{r}'|^2}\left(y''-y'\frac{x'x''+y'y''}{(x')^2+(y')^2}\right)\vec{e}_2$$

$$=\frac{1}{|\vec{r}'|^2}\left(\frac{x''(y')^2-x'y'y''}{(x')^2+(y')^2}\right)\vec{e}_1$$

$$+\frac{1}{|\vec{r}'|^2}\left(\frac{y''(x')^2-y'x'x''}{(x')^2+(y')^2}\right)\vec{e}_2$$

由此，得

$$k^2=((x')^2+(y')^2)^{-4}[(y')^2(x''y'-x'y'')^2$$

$$+(x')^2(y''x'-y'x'')^2]=\frac{(x''y'-y''x')^2}{((x')^2+(y')^2)^3}.$$

于是，

$$k=\frac{|x''y'-y''x'|}{((x')^2+(y')^2)^{3/2}}.$$

定理证毕.

再来研究在参数 s 变化时标架 $(\vec{v}(s),\ \vec{n}(s))$ 的运动. 我们来证明标架向量的导数满足简单的关系式，即所谓“Frenet 公式”.

定理 2 若光滑曲线用自然参数表示，则下列等式成立：

$$\frac{d\vec{v}(s)}{ds}=k(s)\vec{n}(s),\quad \frac{d\vec{n}}{ds}=-k(s)\vec{v}(s).$$

证明 Frenet 公式的第一式直接由曲率 $k(s)$ 的定义得到. 留下验证公式的第二式. 考察向量函数 $\vec{n}(s)$；由定义知 $(\vec{n}(s),\ \vec{n}(s))=1$. 由引理 2，有

$$\left(\vec{n}(s),\ \frac{d}{ds}\vec{n}(s)\right)=0,\ \text{即}\ \frac{d\vec{n}(s)}{ds}=\lambda(s)\vec{v}(s),$$

其中 $\lambda(s)$ 是 s 的某个光滑函数． 我们来求这个函数．将恒等式 $(\vec{v},\vec{n})=0$ 对 s 求微分，得到

$$\left(\frac{d\vec{v}}{ds},\ \vec{n}\right)+\left(\vec{v},\ \frac{d\vec{n}}{ds}\right)=0,$$

由此，$k(\vec{n},\vec{n})+(\vec{v},\lambda\vec{v})=0$，即 $k=-\lambda$．定理证毕．

向量 $\vec{v}$ 和 $\vec{n}$ 可以组成列矩阵，这时 Frenet 公式取以下的形式：

$$\begin{pmatrix}\dfrac{d\vec{v}}{ds}\\[2mm] \dfrac{d\vec{n}}{ds}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k\\ -k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \vec{n}\end{pmatrix},$$

其中 $X=\begin{pmatrix}0 & k\\ -k & 0\end{pmatrix}$ 是反对称矩阵． 可以赋予此关系式以清楚的几何意义．考察 s 点的标架 $\omega(s)=(\vec{v}(s),\ \vec{n}(s))$，它沿曲线 $\vec{r}(s)$ 从点 s 变位到无限邻近的点 $s+\Delta s$（图 1）．将标架 $\omega(s+\Delta s)$ 平行移动到点 s，在点 s 得到两个标架：$\omega(s)$ 和 $\omega(s+\Delta s)$，而且 $\omega(s+\Delta s)$ 由标架 $\omega(s)$ 转动无限小的角 $\Delta\varphi$ 而得到．

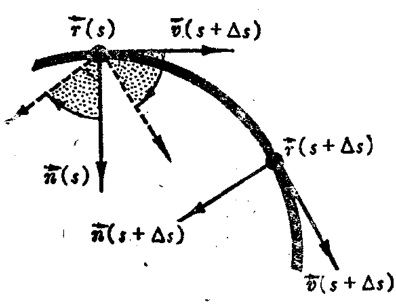

图 1

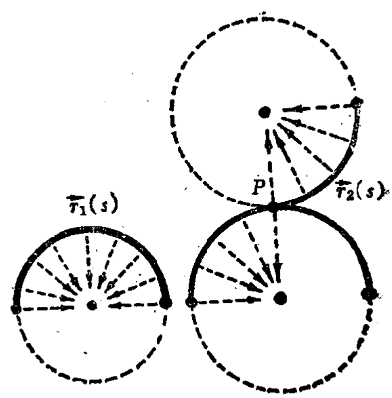

图 2

于是可以认为标架 $\omega(s)$，$\omega(s+\Delta s)$ 由正交变换 $\omega(s+\Delta s)=A(\Delta s)\omega(s)$ 相联系，其中 $A(\Delta s)=\begin{pmatrix}\cos\Delta\varphi & \sin\Delta\varphi\\ -\sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi\end{pmatrix}$. 把函数 $\cos\Delta\varphi$，$\sin\Delta\varphi$ 展开成关于小增量 $\Delta\varphi$ 的级数，并略去 $\Delta\varphi$ 的二阶小量以上的项，得到

$$A(\Delta\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \Delta\varphi\\ -\Delta\varphi & 0\end{pmatrix}+\cdots,$$

即

$$\omega(s+\Delta s)=\omega(s)+\begin{pmatrix}0 & \Delta\varphi\\ -\Delta\varphi & 0\end{pmatrix}\omega(s)+\cdots,$$

也就是说，

$$\frac{d}{ds}\omega(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\begin{pmatrix}0 & \Delta\varphi\\ -\Delta\varphi & 0\end{pmatrix}\omega(s)$$

$$=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{d\varphi(s)}{ds}\\ -\dfrac{d\varphi(s)}{ds} & 0\end{pmatrix}\omega(s),$$

这里 $\varphi(s)$ 是标架 $\omega(s)$ 关于平面上某个固定标架的转动角（譬如说，关于标架 $\omega(0)$）. 同时，由 Frenet 公式得到

$$\frac{d}{ds}\omega(s)=\begin{pmatrix}0 & k(s)\\ -k(s) & 0\end{pmatrix}\omega(s).$$

比较所得到的矩阵，可以看到 $k(s)=\dfrac{d\varphi(s)}{ds}$. 这样，曲线在点 s 的曲率可以解释为角 $\varphi(s)$ 在这点变化的速度. 对平面曲线来说，给定函数 $k(s)$，且对所有的 s，只要 $k\neq 0$，就完全确定了曲线. 更准确地说有下面的定理.

定理 3 给定光滑的函数 $k(s)$，且对所有的 s，$a\leqslant s\leqslant b$，$k(s)\neq 0$. 则在平面上存在光滑曲线 $\vec{r}(s)$，以 $k(s)$ 为它的曲率，

以 s 为自然参数；$\vec{r}(s)$ 除平行移动和正交变换外是唯一确定的.

证明 考察微分方程组:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\vec{v}(s)}{ds} \\ \dfrac{d\vec{n}(s)}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}(s) \\ \vec{n}(s) \end{pmatrix},$$

其中 $k(s)$ 是给定的函数. 因为 $k(s) \neq 0$，所以根据微分方程理论的存在和唯一性定理,这个方程组有解(对给定的初始值有唯一解),此解可光滑地延拓到整个区间 $a < s < b$. 于是，可以考察方程 $\dfrac{d\vec{r}(s)}{ds} = k(s)\vec{v}(s)$，根据同样的理由，这个方程在给定初始值时有唯一解，并延拓到整个区间 $a < s < b$. 因为任何两个初始值可以用平面上的平行移动和正交变换使它们相重合，所以除上面所指出的变换类型外,解是唯一确定的. 定理证毕.

应该讨论条件 $k \neq 0$ 的作用. 在图 2 中给出了平面上具有相同的光滑函数 $k(s)$ 的两条曲线,但是很明显,不能通过平行移动和正交变换使它们中的一条转换为另一条. 假定两条曲线都由圆周的弧线组成. 在考察法向量函数 $\vec{n}(s)$ 时，这两条曲线的不同状态的性质特别清楚地显示出来. 对曲线 $\vec{r}_1(s)$，法向量 $\vec{n}_1(s)$ 任何时候都指向圆心. 曲线 $\vec{r}_1(s)$ 是光滑曲线， 而曲线 $\vec{r}_2(s)$ 不是光滑曲线，因为径向量 $\vec{r}_2(s)$ 的二阶导数在点 P 不连续. 这种情况与两条曲线在所有的点曲率为不等于 0 的常数有关. 但是可以得到两条有相同曲率的曲线不是全等的，并且是光滑的. 从上面引进的例子知道应该如下进行. 考察光滑曲线，它的曲率函数是光滑的,并且在某点 $s = s_0$ 时，曲率以及曲率的所有阶导数都为 0. 这种曲线的存在性从定理 3 得到,只要取光滑函数 $k(s)$,使得它以及它的各阶导数在区间 $a \leqslant s \leqslant b$ 的一个端点上都为 0. 那么,在两条这样的曲线连接起来,而在它们的公共端点曲率函数

以及其所有的导数为 0 时，我们就得到两条光滑曲线，它们有相同的曲率函数，但不是全等的(参看图3).

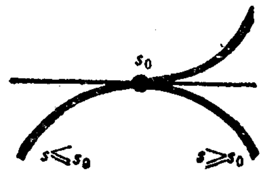

图 3

2. 空间曲线论 Frenet 公式

现在考虑建立了笛卡儿坐标 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 的欧氏空间 R^n 中的光滑曲线 $\vec{r}(t)$，即 $\vec{r}(t)=(x^1(t), x^2(t), \cdots, x^n(t))$. 也像平面的情况一样，曲线 $\vec{r}(s)$ 的每一点可以唯一地联系某个标架，当曲线的自然参数 s 变化时，这些标架沿着曲线光滑地变动. 在构造我们称之为"Frenet 标架"之前，类似于平面的情形，先证明关于矩阵函数微分法的辅助论断.

在矩阵线性空间，考察光滑曲线，即单参数矩阵簇 $A(t)$，这里 t 在区间 $-a<t<a$ 上变化，$A(t)$ 是 $(n\times n)$ 矩阵，其系数是 t 的光滑函数. 假定所有的矩阵 $A(t)(-a<t<a)$ 都是行列式为 $+1$ 的正交矩阵，同时 $A(0)=E$，E 是单位矩阵.

引理 3 用 $X=\dot{A}(t)|_{t=0}$ 表示单参数正交矩阵簇 $A(t)$ 在 $t=0$ 时的导数，即 X 是由形如 $\left.\dfrac{da_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}$ 所组成的矩阵，这里 $A(t)=(a_{ij}(t))$，那么 X 是反对称矩阵.

证明 每一个正交矩阵 $A(t)$ 可以定义为作用在 n 维欧氏空间的线性算子，并且这个算子保持欧氏数量积. 这就是说，对任意两个向量 $\vec{x}, \vec{y}\in R^n$，有恒等式 $(A(t)\vec{x}, A(t)\vec{y})=(\vec{x}, \vec{y})$. 因为左边是 t 的光滑函数，所以可以考察在 $t=0$ 时关于 t 的导数. 得到 $(\dot{A}(t)\vec{x}, A(t)\vec{y})|_{t=0}+(A(t)\vec{x}, \dot{A}(t)\vec{y})|_{t=0}=0$，即

$$(X\vec{x}, \vec{y})+(\vec{x}, X\vec{y})=0.$$

取 $\vec{x}, \vec{y}$ 为基向量 $\vec{e}_i, \vec{e}_j$($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ 是 R^n 的单位正交基)，得到 $(X\vec{e}_i, \vec{e}_j)+(\vec{e}_i, X\vec{e}_j)=0$，也就是说，在单位正交基 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$

下，矩阵 X 是反对称矩阵．定理证毕．

附注　因为正交矩阵的集合可以作为子集嵌入所有 $(n\times n)$ 矩阵的线性空间，所以光滑曲线 $A(t)$ 可以看作 n^2 维线性空间的光滑曲线．从这个观点来看，$X=\dot{A}(t)|_{t=0}$ 自然地就是光滑曲线 $A(t)$ 在 $t=0$ 时的通常的速度向量．

矩阵值函数 $A(t)$ 在 $t=0$ 点可以按无穷小改变量 Δt 的幂分解：

$$A(\Delta t)=E+\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=0}\cdot\Delta t+\cdots.$$

在分解式中，矩阵 X 作为 Δt 的"系数"出现．现在，我们来构造 Frenet 标架．

设 $\vec{r}(s)$ 是光滑的向量函数，它在欧氏空间 R^n 中给出了光滑的轨线． 假设对每个 s，$a\leqslant s\leqslant b$，n 个向量 $\frac{d\vec{r}}{ds}$，$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2},\cdots,\frac{d^n\vec{r}}{ds^n}$ 是线性无关的．于是在每一点 $\vec{r}(s)$ 有一个标架（非标准正交的！），它由向量 $\frac{d\vec{r}(s)}{ds}$，$\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2},\cdots,\frac{d^n\vec{r}(s)}{ds^n}$ 组成，并且当点改变时，它是光滑的． 由于假设向径的导数是线性无关的，于是有 $\frac{d^k\vec{r}}{ds^k}\ (k=1,2,\cdots,n)$ 不等于 0．

命题 1　设 $\vec{r}(s)$ 是 R^n 中光滑的向量函数，并设在区间 $a\leqslant s\leqslant b$ 上每一点，k 阶导数 $\frac{d^k\vec{r}}{ds^k}$ 与导数 $\frac{d\vec{r}}{ds}$，$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2},\cdots,\frac{d^{k-1}\vec{r}}{ds^{k-1}}$ 是线性相关的，当 $a\leqslant s\leqslant b$ 时，$\frac{d^k\vec{r}}{ds^k}\neq 0$，并且当 $a\leqslant s\leqslant b$ 时，导数 $\frac{d\vec{r}}{ds}$，$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2},\cdots,\frac{d^{k-1}\vec{r}}{ds^{k-1}}$ 是线性无关的．那么，曲线 $\vec{r}(s)$ 全部包含在由向量 $\frac{d\vec{r}}{ds},\cdots,\frac{d^{k-1}\vec{r}}{ds^{k-1}}$ 所张成的 $(k-1)$ 维平面上．当 s 由 a

变到 b 时，这个平面不改变它在空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的位置.

证明 由所给的条件，存在光滑函数 $\lambda_i(s)(1\leqslant i\leqslant k-1)$，使对每个 s，有

$$\frac{d^k\vec{r}}{ds^k}=\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i(s)\frac{d^i\vec{r}}{ds^i}.$$

由于向量 $\frac{d\vec{r}}{ds}$，$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$，$\cdots$，$\frac{d^{k-1}\vec{r}}{ds^{k-1}}$ 是线性无关的，这些向量可以取作由它们张成的平面 $\boldsymbol{R}^{k-1}$ 的基. 为了证明曲线 $\gamma(s)$ 总是留在同一个 $(k-1)$ 维平面内，只要证明当 s 改变时，平面 $\boldsymbol{R}^{k-1}(s)$ 不改变它在空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的位置. 因为向量 $\frac{d\vec{r}}{ds}$，$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$，$\cdots$，$\frac{d^{k-1}\vec{r}}{ds^{k-1}}$ 作为 $\boldsymbol{R}^{k-1}(s)$ 的基，所以只要证明这个基的导数由能够按这个基展开的向量组成. 由假设的条件，这是显然的. 证明完毕.

于是，若向量 $\frac{d\vec{r}}{ds}$，$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$，$\cdots$，$\frac{d^n\vec{r}}{ds^n}$ 是线性无关的，那么曲线 $\vec{r}(s)$ 不包含在任何当 s 变化时却是固定的 $(n-1)$ 维的某个平面 $\boldsymbol{R}^{n-1}\subset\boldsymbol{R}^n$ 中. 现在，在每一点 s 构造标准正交基，其向量用 $\vec{\tau}_1$，$\vec{\tau}_2$，$\cdots$，$\vec{\tau}_n$ 表示. 设 $\frac{d\vec{r}}{ds}\Big/\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|=\vec{\tau}_1$. 然后考察由向量 $\vec{\tau}_1$ 和 $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ 张成的二维平面，并选择这个平面中的向量 $\vec{\tau}_2$，使 $\vec{\tau}_2$ 垂直于 $\vec{\tau}_1$. 因为按假设，$\frac{d\vec{r}}{ds}$，$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ 是线性无关的，所以 $\vec{\tau}_2$ 在 $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ 上有非零的投影. 在 $\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}$，$\vec{\tau}_2$，$\vec{\tau}_1$ 张成的三维平面上选择向量 $\vec{\tau}_3$，即在向量 $\frac{d\vec{r}}{ds}$，$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$，$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}$ 张成的平面上选择 $\vec{\tau}_3$，使 $\vec{\tau}_3$ 垂直于由 $\vec{\tau}_1$，$\vec{\tau}_2$ 张成的平面$\left(\text{即 }\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}，\frac{d\vec{r}}{ds}\text{ 张成的平面}\right)$. 继续这样的过程，就得到

所求的标准正交标架 $\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2,\cdots,\vec{\tau}_n$. 很明显,在 s 变化时，标架 $\vec{\tau}(s)$ 的向量也光滑地改变. 也像平面的情形一样,考察标架

$$\vec{\tau}(s)=(\vec{\tau}_1(s),\cdots,\vec{\tau}_n(s))$$

中任何一个向量. 可以证明，它们也满足将平面曲线的 Frenet 公式推广的简单关系式.

定理 4 设 $\vec{r}(s)$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中光滑曲线，s 是自然参数，若在 $a\leqslant s\leqslant b$ 的每个点，$\dfrac{d\vec{r}}{ds},\cdots,\dfrac{d^n\vec{r}}{ds^n}$ 是线性无关的，则存在光滑函数 $k_2(s),\cdots,k_n(s)$，使下列等式成立 (Frenet 公式):

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{\tau}_1}{ds}=k_2\vec{\tau}_2,\\ \dfrac{d\vec{\tau}_2}{ds}=k_3\vec{\tau}_2-k_2\vec{\tau}_1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{d\vec{\tau}_{n-1}}{ds}=k_n\vec{\tau}_n-k_{n-1}\vec{\tau}_{n-2},\\ \dfrac{d\vec{\tau}_n}{ds}=-k_n\vec{\tau}_{n-1}.\end{cases}$$

即 $\dfrac{d\vec{\tau}_i}{ds}=k_{i+1}\vec{\tau}_{i+1}-k_i\vec{\tau}_{i-1}$, 这里 $k_1=k_{n+1}=0$.

证明 因为向量 $\vec{\tau}_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 含在向量 $\dfrac{d\vec{r}}{ds},\cdots,\dfrac{d^i\vec{r}}{ds^i}$ 的线性包内,所以 $\dfrac{d\vec{\tau}_i}{ds}$ 含在向量

$$\frac{d\vec{r}}{ds},\ \cdots,\ \frac{d^ir}{ds^i};\ \frac{d^{i+1}\vec{r}}{ds^{i+1}}$$

的线性包内,即存在某些函数 $a_{i,1}(s),\cdots,a_{i,i+1}(s)$，使

$$\frac{d\vec{\tau}_i}{ds}=\sum_{j=1}^{i+1}a_{i,j}(s)\vec{\tau}_j(s).$$