数学分析教程

第二卷 第二分册

[俄]C. M. 尼柯尔斯基 著

高尚华 刘远图 郭思旭 译

高等教育出版社

数学分析教程

第二卷　第二分册

[俄] C. M. 尼柯尔斯基 著
高尚华 刘远图 郭思旭 译

高等教育出版社

(京)112号

内容提要

本书主要内容有傅里叶级数，函数的多项式逼近，傅里叶积分，广义函数，微分流形和微分形式，勒贝格积分，线性算子与线性泛函．原书为原苏联高等学校物理和力学一数学专业的教材，全书有两卷，本书为第二卷第二分册，可作为高等学校数学、应用数学计算数学等专业的教学参考书．

高等教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
河北省香河县印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 10.75 字数260 000
1994 年 11月第1版 1994 年 11月第1次印刷
印数0001— 1 155
ISBN7-04-004311-4/O·1231
定价 10.55 元

目　　录

第十五章 傅里叶级数.
函数的多项式逼近

§15.1. 序 言

三角函数系

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 3x, \cdots \tag{1}$$

在闭区间$[0,2\pi]$上是正交的，即对属于这个函数系的任何两个不同的函数，其乘积在该闭区间上的积分为零. 这可从下列等式推出:

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx dx = 0 \quad (k \neq l, k, l = 0, 1, \cdots),$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx dx = 0 \quad (k \neq l, k, l = 1, 2, \cdots),$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx dx = 0 \quad (k = 0, 1, \cdots, l = 1, 2, \cdots),$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 kx dx = \pi \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

本章将讨论三角级数理论以及函数用三角多项式逼近的问题.

一个函数 $f(x)$若定义于整个实轴上且对 $\omega > 0$ 满足条件: 对任何 x

$$f(x + 2\omega) = f(x),$$

则称 $f(x)$是以 $2\omega > 0$ 为周期的周期函数. 若对这样一个函数，(常

义或广义)积分

$$\int_0^{2\omega} f(x)dx$$

存在,则等式

$$\int_a^{a+2\omega} f(x)dx=\int_0^{2\omega} f(x)dx \tag{2}$$

对任何实数 a 成立. 这一点从图 15.1 上很容易看出,图中带有相同斜线的阴影部分的面积显然是相等的. 当然,这一性质也能够

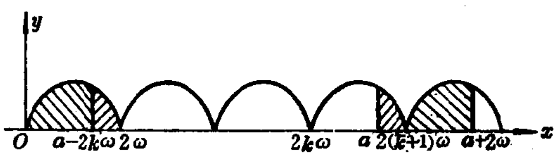

图 15.1

完全从形式上加以证明. 实际上,对任何给定的 a, 存在一个唯一确定的自然数 k 使得 $2k\omega\leqslant a<(2k+1)\omega$,并且显然有

$$\int_a^{2(k+1)\omega} f(x)dx=\int_a^{2(k+1)\omega} f(x-2k\omega)dx=\int_{a-2k\omega}^{2\omega} f(z)dz,$$

及

$$\int_{2(k+1)\omega}^{a+2\omega} f(x)dx=\int_{2(k+1)\omega}^{a+2\omega} f(x-2(k+1)\omega)dx$$
$$=\int_0^{a-2k\omega} f(z)dz.$$

将等式两边分别相加便得到(2)式.

当函数是以 2ω 为周期的周期函数时,我们常常应用等式

$$\int_0^{2\omega} f(t-x)dt=\int_0^{2\omega} f(t)dt, \tag{2'}$$

其中 x 是一个任意数. 实际上这一关系可由(2)式得出:

$$\int_0^{2\omega} f(t-x)dt=\int_{-x}^{2\omega-x} f(z)dz=\int_0^{2\omega} f(t)dt.$$

这个等式将常常用而不加说明.

组成函数系(1)的诸函数是以 2π 为周期的周期函数. 函数 $1, \cos x, \cos 2x, \cdots$ 是偶函数,而函数 $\sin x, \sin 2x, \cdots$ 是奇函数.

对于偶函数 $f(x)$ 我们有

$$\int_{-b}^{b} f(x)dx=2\int_{0}^{b} f(x)dx,$$

而对于奇函数有

$$\int_{-b}^{b} f(x)dx=0.$$

形如

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

的和称为 n 次三角多项式,其中 a_k, b_k 是常数.

三角多项式是最简单的、以 2π 为周期的周期函数. 三角多项式可以用来逼近以 2π 为周期的更为一般的函数.

对于一个以 2ω 为周期的函数, 我们可借助于作代换 $x=\dfrac{u\omega}{\pi}$ 把它变为函数 $F(u)=f\left(\dfrac{u\omega}{\pi}\right)$,而所得函数 $F(u)$ 以 2π 为周期. 以三角多项式 $T_n(u)$ 逼近后一函数 $(F(u)\sim T_n(u))$,那么我们就可变回原先的自变量 x 而得出原先函数的逼近

$$f(x)\sim T_n\left(\frac{\pi}{\omega}x\right).$$

我们将使用如下的名词术语和记号.

符号 $C(a,b)$ (参看 § 14.1) 表示定义在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 f 的空间(类),其范数为

$$\|f\|_{C(a,b)}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|.$$

我们用 C^* 表示定义在整个实轴上、以 2π 为周期的连续函数

f 的空间(类),其范数为

$$\|f\|_{C^*}=\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|f(x)|=\max_{a\leqslant x\leqslant a+2\pi}|f(x)|$$

(a 是任意一个实数).

如果仅在闭区间$[0,\ 2\pi]$上考虑函数 $f\in C^*$, 那么可以认为 f 属于 $C(0,\ 2\pi)$($C^*\subset C(0,\ 2\pi)$). 然而, 此时所得到的不是空间 $C(0,\ 2\pi)$中的任何一个函数, 而是区间$(0,\ 2\pi)$上这样的函数 $f\in C^*$: 它在周期端点的值相同:

$$f(0)=f(2\pi) \tag{3}$$

反之,满足条件(3)的函数 $f\in C(0,2\pi)$在以 2π 为周期把它周期地延拓后就变为 C^* 类的函数.

我们用 L'^* 表示以 2π 为周期的这样的周期函数类: 当限于在区间$[0,2\pi]$考虑时, 它们属于空间 $L'(0,2\pi)$ (参看 § 14.2), 其范数为

$$\|f\|_{L^*}=\|f\|_{L(0,2\pi)}=\int_0^{2\pi}|f(x)|dx.$$

我们也可以说每个函数 $f\in L'^*$ 是(以 2π 为周期的)周期函数且在区间$[0,2\pi]$上绝对可积. 我们提请读者注意: 如果对于一个函数 f, 其积分

$$\int_0^{2\pi}f(x)dx \tag{4}$$

在黎曼意义下存在或具有有限个奇点, 并且在广义积分意义下绝对可积, 那么函数 f 属于 $L'(0,2\pi)$ (参看 § 13.13).

$L_2'^*$ 是以 2π 为周期的周期函数 f 的空间(类), 当限于在闭区间$[0,2\pi]$考虑时, 这些函数属于空间 $L_2'(0,2\pi)$ (参看 § 14.3), 在空间 $L_2'^*$ 中范数定义为

$$\|f\|_{L_2^*}=\left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

我们也可以说每个函数 $f(x)\in L_2'^*$ 是(以 2π 为周期的)周期函数且(在 $[0,2\pi]$ 上)模平方可积;在实函数 $f\in L_2'(0,2\pi)$ 的情形,我们可简单地说,在 $[0,2\pi]$ 平方可积. 我们提醒读者,空间 $L_2'(0,2\pi)$ 由这样一些函数组成:它们或者是在 $[0,2\pi]$ 上黎曼可积的,或者积分(4)只有有限个奇点,其模的平方在广义积分的意义下是绝对可积的. 这又强调了 $L_2'^*\subset L'^*$(参看§14.2(13)).

在傅里叶级数理论中,讨论以 2π 为周期的周期函数类(空间) L^* 与 L_2^* 显得更为自然,这里 L^* 与 L_2^* 分别属于勒贝格空间 $L(0,2\pi)$ 及 $L_2(0,2\pi)$.

读者已察觉,所有这些符号上的星号表示,组成相应的类的函数都是(以 2π 为周期的)周期函数.

属于这些函数类的函数 f 依赖于一个自变量 x, f 可能是实函数,也可能是复函数. 当 f 是复函数时,它可表为 $f(x)=\varphi(x)+i\psi(x)$. 因而例如我们说函数"模的平方"而不简单地说"函数的平方",仅在 f 是实函数时,二者才是一样的.

三角函数系(1)是正交的,在后面我们还将看到,这个函数系在 $L_2'^*$ 与 L_2^* 中(甚至在 C^* 中)是完备的. 从而对每一个 $f\in L_2'^*$ (L_2^*)我们可以让它和它的关于系(1)的傅里叶级数(参看§14.6(2))

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{5}$$

相对应,其中

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos kt\,dt \quad (k=0,1,\cdots) \tag{6}$$

及

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin kt\,dt \quad (k=1,2,\cdots). \tag{7}$$

(5)式右边的各个函数 $\frac{a_0}{2}$,$(a_1\cos x+b_1\sin x)$,$(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)$ …称为函数 f 的傅里叶级数的项(也称为 f 的调和函数),其中(5)式右端的系数 a_k 与 b_k 由(6)、(7)两式确定.

注意,傅里叶系数 a_k 与 b_k(参看(6)、(7)两式)不仅对 $f\in L_2'^*$,而且对 $f\in L'^*$(且一般地对 $f\in L^*$)都有意义. 实际上函数 $\cos kx$ 和 $\sin kx$ 是有界且连续的,而函数 $f\in L'^*$ 是绝对可积的,因而确定 $f\in L'(0,2\pi)$ 的傅里叶系数的诸积分是绝对收敛的:

$$\int_0^{2\pi}|f(x)\cos kx|\,dx\leqslant\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx$$

及

$$\int_0^{2\pi}|f(x)\sin kx|\,dx\leqslant\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx.$$

因此,为了一般化,只要可能,我们便要考虑把属于 $L'^*(L^*)$ 的函数展开成傅里叶级数.

于是,对于每个函数 $f\in L'^*$(或者一般说来 $f\in L^*$)都有其傅里叶级数和它对应而不管此级数在某些点是收敛还是发散. 要着实注意,对函数 $f\in L'^*$ 加上一个 $L'^*(L^*)$ 中如下的零函数 θ:

$$\int_0^{2\pi}|\theta(x)|\,dx=0$$

虽使 f 有所改变,例如在有限个点有所改变,但它不改变 f 的傅里叶系数,从而不改变函数 f 的傅里叶系数本身. 一个函数的傅里叶系数的集合称为这个函数的谱. 在物理或技术科学中所研究的许多振动过程(振荡)可用周期为 2ω(在一般情况下可能不是 2π)的周期函数 $F(u)$ 来描述. 在这样一种描述中变量 $u=t$ 是时间而 $y=F(u)$ 是振荡点的纵坐标或者是力的量值或者是速度或电流密度的量值以及其他等等. 如果 F 是三角多项式,那么

$$y=F(u)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^n\left(a_k\cos\frac{k\pi}{\omega}u+b_k\sin\frac{k\pi}{\omega}u\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_1^n A_k\cos\left(\frac{k\pi}{\omega}u-\varphi_k\right),$$

其中 $A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$ 而 $\varphi_k(k=1,\cdots,n)$ 是由 $a_k=\cos\varphi_k, b_k=\sin\varphi_k$, $0\leqslant\varphi_k\leqslant 2\pi$ 确定的.

这在物理学中称为将振动过程 $y=F(u)$ 分解成简单的振动过程——调和振动(调和函数)

$$A_k\cos\left(\frac{k\pi}{\omega}u-\varphi_k\right). \tag{8}$$

调和函数(8)具有频率 $\frac{k\pi}{\omega}$, 振幅 A_k 和初相位 φ_k. 在图 15.2 中所画的是三个以 2π 为周期的周期函数: $S_2(x)=\sin x-\frac{\sin 2x}{2}$ (实线), $S_3(x)=\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}$(短划线)及 $S_4(x)=\sin x-\cdots-\frac{\sin 4x}{4}$(虚线).

图 15.3 是对于较大的 n 所绘的和函数

$$S_n(x)=\sum_1^n(-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k} \tag{9}$$

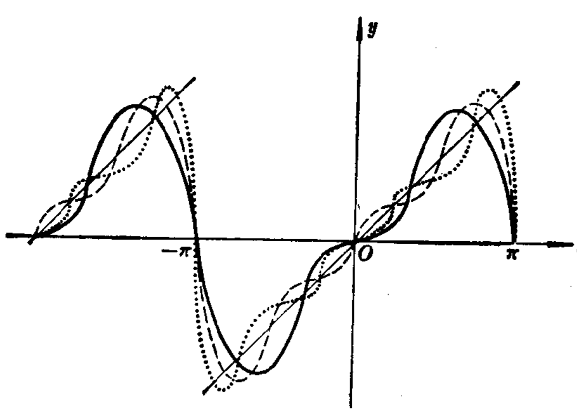

图 15.2

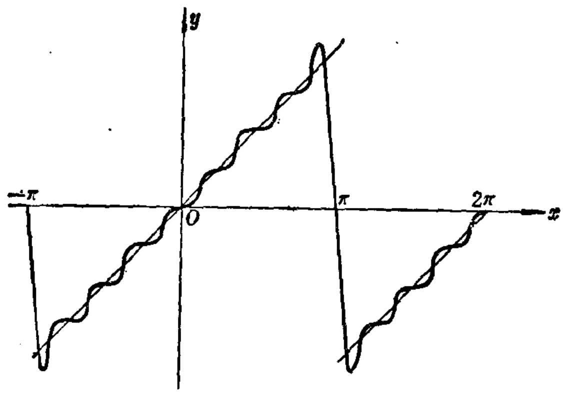

图 15.3

的示意图. 这个图象使人想到(以后再加以证明),当 $n\to\infty$ 时,极限函数

决定 $$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x) \tag{10}$$

是(以 2π 为周期的)周期函数,它在开区间 $-\pi<x<\pi$ 上的值由关系式

$$S(x)=x \quad 当 -\pi<x<\pi, S(\pi)=0 \tag{11}$$

决定

因为函数 $S(x)$在点 $x_k=(2k+1)\pi(k=1,2,\cdots)$间断,连续函数 $S_n(x)$的序列$\{S_n(x)\}$不可能在整个实轴上一致收敛到 $S(x)$;然而,对任何属于开区间$(-\pi,\pi)$的闭区间$[a,b]$,序列是一致收敛的. 一般地,在 $S(x)$具有连续导数的 x 轴上任何区间上序列一致收敛.

图 15.3 还表明,在极限函数 $S(x)$的间断点 x_k 的近傍,$S_n(x)$的图象产生一个陡降,这是逐段光滑的极限函数之第一类间断点特有的现象,即所谓的吉布斯现象,关于它,我们将在 § 15.9 研究.

§15.2. 狄利克雷和

设给定一个函数 $f\in L'^*$（或一般地 $f\in L^*$），而且 $\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 是其傅里叶级数：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{1}$$

其中

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos kt\,dt\quad(k=0,1,2,\cdots),$$

及

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin kt\,dt\quad(k=1,2,\cdots).$$

这个级数的第 n 个部分和可改写成如下形式：

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_1^n(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt+\sum_1^n\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_1^n\cos k(t-x)\right\}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}D_n(t-x)f(t)dt\end{aligned} \tag{2}$$

其中（参看 §8.2(16)）

$$D_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_1^n\cos kx=\frac{1}{2}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{3}$$

我们得到了函数 $f(x)$ 的第 n 个傅里叶和数的简洁表达式：

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t-x)f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n(u)f(x+u)du. \tag{4}$$

在(4)式中后一等式的推导用到了被积函数的周期性.

积分(4)称为 n 阶狄利克雷积分，三角多项式 $D_n(x)$ 称为 n 阶狄利克雷核. 应当注意，对任何 x 及 $n=0,1,2,\cdots$ 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t-x)dt&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_1^n \cos k(t-x)\right\}dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}dt=1,\end{aligned} \tag{5}$$

因为

$$\int_0^{2\pi}\cos k(t-x)dt=\int_0^{2\pi}\cos kt dt=0\quad(k=1,2,\cdots).$$

在等式(5)的推导中我们应用了函数 $\cos kt$ 的周期性质(以 2π 为周期)以及函数 $\cos kt$ 在$[0,\ 2\pi]$区间上与恒等于1的函数正交这一事实.

任何两个属于 L^* 的勒贝格(绝对)可积的函数，若它们几乎处处相等，则它们具有相同的傅里叶级数，即它们的傅里叶系数相同.

任何形如

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_1^\infty(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx) \tag{6}$$

的级数称为三角级数，其中 α_k 与 β_k(级数的系数)是某些常数.

一个三角级数是傅里叶级数仅当存在一个函数 $f\in L^*$，而 f 的傅里叶系数与数 α_k 及 β_k 重合，即 $a_k=\alpha_k$ 及 $b_k=\beta_k$ 的时候. 例如，若我们已知级数(6)在$[0,\ 2\pi]$均方收敛到函数 $f\in L_2'^*$(或 $f\in L_2^*$)，那么级数(6)是这个函数的傅里叶级数(参看§14.6引理

1 的推论).

两个偶函数或两个奇函数的积是偶函数，而一个偶函数乘以一个奇函数的积是奇函数. 因此,若一个函数 $f\in L'^*$(或 $f\in L^*$)是偶函数,其傅里叶级数具有如下形式

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty a_k\cos kx\ \left(a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos ktdt\right),$$

因为它的所有系数 b_k 等于零;若 f 是奇函数，其傅里叶级数的形式为

$$f(x)\sim\sum_1^\infty b_k\sin kx\qquad\left(b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin ktdt\right),$$

因为在这种情况,所有的系数 a_k 等于零.

如果用矩形公式(参看 § 10.6)近似地计算以 2π 为周期的函数 $f(x)$的第 n 个傅里叶部分和的系数 a_k 与 b_k,设用结点

$$x_k=\frac{2\pi k}{2n+1}\quad(k=0,1,\cdots,2n),\tag{7}$$

把周期分成 $2n+1$ 等分,那么所得三角多项式为

$$S_n(f,x)=\frac{a_0^{(n)}}{2}+\sum_1^n(a_k^{(n)}\cos\ kx+b_k^{(n)}\sin\ kx),$$

其中

$$a_k^{(n)}=\frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}f(x_j)\cos kx_j\quad(k=0,1,\cdots,n)$$

及

$$b_k^{(n)}=\frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}f(x_j)\sin kx_j\quad(k=0,1,\cdots,n).$$

请注意,它是结点(7)上的 n 阶内插三角多项式. 这样一来就有

$$f(x_j)=S_n(f,x_j)\quad(j=0,1,\cdots,2n).$$