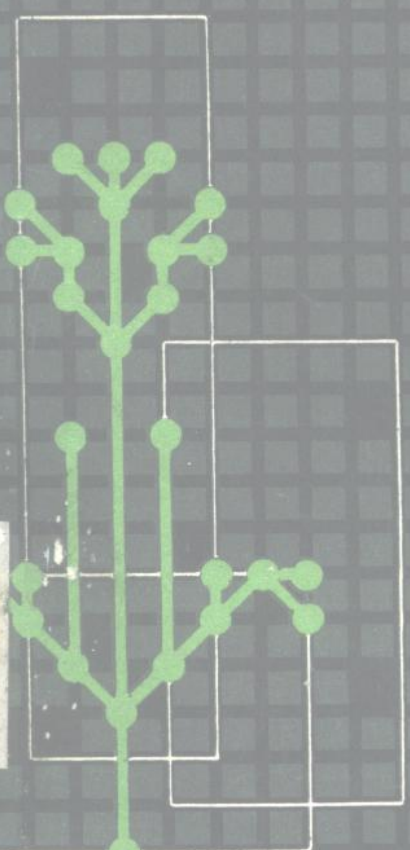
离散数学引论

王义和 编



哈尔滨工业大学出版社

离散数学引论

王义和 编

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书内容包括三部分：集合论、图论、近世代数。全书共分十四章，讨论了集合、映射、无穷集合及其基数、关系、模糊集合论；图的基本概念、树、割集、连通性与可平面性、有向图；半群和独异点、群、环和域、格、布尔代数。每节后配有难度不同的习题。

本书可用作高等院校计算机软件、计算机及应用专业的教材，也可供有关专业的科技人员参考。

离散数学引论

王义和 编

*

哈尔滨工业大学出版社出版

新华书店首都发行所发行

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印张15.25 字数395,000

1986年12月第1版 1986年12月第1次印刷

印数 1—3,000

书号 15341·40 定价 3.05 元

序　言

编者近几年来，在哈尔滨工业大学计算机软件专业讲授离散数学课程。本书是根据所写的讲义修改而成。

计算机科学是一个年轻的学科。它有两个主要部分：构成计算基础的一些概念和模型；设计计算系统（软件和硬件）的工程技术。在计算机科学的广阔领域中，许多问题还处在萌芽状态，有的处在由工程实践向理论转化的过程中，这就需要一个抽象过程。因此，对未来的计算机科学工作者，就需要有较好的数学训练和抽象能力的培养。离散数学这门课，部分地担负着这样的一项重要任务。

所以，在讲授离散数学课程时，除了应该尽量选择那些在后继课程中要直接用到的那些数学概念和有关内容外，还应该选择少量的对培养学生的逻辑思维与提高抽象能力特别有益的内容。因此，清楚地了解一些重要概念和模型，是如何从现实生活及各种不同的学科中抽象出来的——即它们的现实原型，就显得十分重要了。本书中，对一些重要概念和定理，尽量给出直观的或现实的背景，使读者明了这些抽象概念和理论的产生之必然性。

本书内容包括三篇，共分十四章。在集合论部分讨论了集合及其运算、映射、无穷集合及其基数、关系，特别还介绍了当前正在兴起和发展的模糊集合论；在图论部分讨论了图的基本概念、树、割集、图的连通性和可平面性、有向图；在近世代数部分讨论了半群和独异点、群、环和域、格和布尔代数等代数结构。每节后大都配有难度不同的习题以供读者练习之用。在讲授

时带“※”的章节及习题可以略去。

我感到本书不足的是未包含数理逻辑部分。在哈工大，数理逻辑历来都是单独作为一门课程开设的。

本书在编写过程中，得到了哈工大计算机软件教研室有关同志的热情支持。特别是得到原航天工业部宋健教授的鼓励。哈工大计算机应用教研室孙希文老师以极其负责的精神审阅了原稿，提出了许多宝贵意见和建议。在此一并表示深切的谢意！

编者水平有限，书中错误和不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

一九八四年九月十七日

目 录

第一篇 集合论

第二篇 图论

第一篇　集合论

第一章　集合

集合论是德国人康托(Cantor)于1874年建立的，起初不被人们所注意，到了十九世纪九十年代的初期方为数学家们采用，成为分析数学、几何学和代数学的有力工具。现在，集合论已成为应用很广而且内容很充实的一门学科，它在近代数学中占据着重要的地位，而且正在影响着整个数学。集合论不但是整个数学的基础，而且在计算机科学中具有十分广泛的应用，成为计算机科学工作者必不可少的基础知识。计算机科学领域中的大多数基本概念和理论，几乎均采用集合论的有关术语来描述和论证。

本章将叙述集合的一些初等概念和结果：集合的概念、子集、幂集、运算及基本性质、有穷集合元素的个数及其计算法则。这些内容不但是本书以后各章的必备知识，而且也是近代数学和计算机科学的基本工具。证明两个集合相等的方法，是本章的主要方法，也是必须掌握的基本方法之一。

§1．集合的概念

在日常生活中，经常会遇到“集合”这个概念。例如，某教室里的全体学生所组成的集、自然数集、实数集、FORTRANⅡ的基本字符的全体所形成的集合，等等。集合的概念是如此普遍，以致于很难用更简单的概念来定义它。因此，我们把“集

合”，作为最原始的概念而不给出形式定义，只给予一种描述，说明这个概念的含义。这正如同欧几里德几何中的“点”不加定义，而作为最原始的概念之一一样。

通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体，就叫做集合，简称集。构成集合的每一个东西，称为这个集合的成员。这些成员可以是具体的东西，也可以是抽象东西。但构成这个集的这些成员中的每一个，决不能是这个集合自身。因为一个集是由它的成员构成的，是先有成员后形成集，所以一个集正在形成中便不能作为一个实体充当集的成员。否则在概念上将产生循环，从而产生矛盾。

任何一个东西，相对于某个集合均称为元素。例如，中华人民共和国的全体公民，便形成一个集合。这样，每个中华人民共和国的公民，便是这个集合的一个成员或元素，而每个其他国家的公民，便不是这个集合的成员。又如，某个学校里的所有桌、椅形成了一个集合。我们看到，集合的概念与常用的词“全体”、“总和”、“聚集”意义相同，它们是同义词。

今后，常用大写英文字母表示集合，而用小写字母表示其元素。于是，若A是一个集合，则对任一对象或东西——元素 a，对集A而言，a 或是A的一个成员或不是。如果元素a是A的一个成员，则称元素a属于集A，并记成 $a\in A$。否则就说a不属于集A并记为$a\overline{\in}A$（或$a\notin A$）。$a\in A$，读作“a属于集A”；$a\overline{\in}A$，读成“a不属于集A”。

例 1. 设N为全体自然数所形成的集合，则

$$7\in N,\ 10\in N,\ 2^7\in N,\ 9999\in N,$$

但

$$0\overline{\in}N, 1/2\overline{\in}N,\ 12.5\overline{\in}N,\ \sqrt{8}\overline{\in}N,\ -3\overline{\in}N。\ \#$$

一个对象属于一个集合这个概念是集论中一个基本概念，它反映了对象（元素）与集合间的一种关系。“集合”、“元素”、“属于”三个概念是集论中三个基本概念，它们是未加形

式定义的原始概念。集论中的其他概念，均可用这三个概念来严格定义。

所谓一个集合是已知的，就是对任一对象，利用某种方法，可以判断它是否是这个集合的成员，而不是说这个集合的每一个成员都给出来（即写出来）。这正如分析中所说的，已知一个级数，并不是把这个级数的所有项都写出来一样，而是给出了某种方法，只要说出级数的项数，便可由此方法算出这一项是什么。在数学上，常用"具有某种性质的对象的全体"来规定一个集合。

常用以下两种方法给出一个集合。最自然的方法是把集的所有元素全列出来。例如，由 1、2、3 三个数所构成的集合就可以记成$\{1,2,3\}$，花括号"{"与"}"表示把 1、2、3 放在一起构成一个集合。有时用一个大写字母，例如 S，作为这个集合的名字，写成

$$S=\{1,2,3\}。$$

一般说来，一个集合仅含少数的几个元素时，才能用这种方法给出。即使是有穷（也说有限）个但数量较大，原则上这种方法也是可行的，然而实际上，很少能把其全部元素列出。不过当列出其几个元素后，就可以看出组成该集的其他元素的规律时，也可采用此方法给出集合。例如，由 26 个小写英文字母 a、b、c、…、x、y、z形成的集就可表成

$$\{a,b,c,\cdots,x,y,z\}$$

其中的"…"就表示那些未列出的，但已可知的是些什么样的元素。利用此方法甚至有时可以表示含有无穷多个元素的集合。例如，全体自然数形成的集合N就可以写成：

$$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

用上述方法表示集合并不是永远可能的。例如，区间$[0,1]$中的所有实数之集就不能用这种方法给出。为此，介绍另一种常用记号。设 $P(x)$ 是关于对象x的一个命题，而x是某类对象的一

般表示，则我们用$\{x|P(x)\}$表示使命题$P(x)$成立的那些对象x所形成的集合。

例 2 所有正偶数形成的集合E就可以记成

$$\{m|\ 2|m\text{且}m\in N\}。\qquad \#$$

例 3. $[0,1]$上的所有连续函数所形成的集$C[0,1]$可记成

$$\{f(x)|f(x)\text{在}[0,1]\text{上连续}\}。\qquad \#$$

易见，集合的第二种记法较方便。它给出了组成集合的各元素所具有的性质因此它告诉我们更多的信息。这种记法，既适合于有穷集合又适用于含无穷多个元素的集合。

一个集合称为有限集，如果它仅含有有穷个元素。如果一个集中含有无穷个元素，则称该集为无穷集。

有限集的一个特例是仅含有一个元素的集。只有一个元素所形成的集，称为单元素集。例如方程

$$x^3-x^2+x-1=0$$

的实根所形成的集，就是一个单元素集$\{1\}$。但应该特别注意的是，不要把单元素集和它所含有的唯一元素混为一谈。否则会引出矛盾。

在应用中，常涉及具有某种性质的对象的全体形成的集合，这样的集合也参加运算。但事先不知具有某种性质的元素是否存在。如果后来发现这种元素不存在，于是这种集合就不含有任何元素了。所以有必要引入不含任何元素的集合，称之为空集，记成 ϕ。例如，方程

$$x^2+1=0$$

的实根的全体所形成的集合就是空集。空集的引入，可以使许多问题的叙述得到简化。

§2. 子集、集合的相等

在§1中，引出了“集合”、“元素”以及元素与集合间的“属

于”关系等三个概念。这三个概念并未真正加以定义，而是作为原始的概念接受下来，对它们仅仅作了直观的描述，以说明它们各自的含义。本节将利用这三个概念来定义子集、集合间的包含关系、集合的相等、幂集、集族等基本概念。

定义 1. 设 A、B 是两个集合。如果集合A中任一元素均是集合B的元素，则称集合A是集合B的一个子集。这时或说集合 A 包含在集合B里，或说B包含集A。

集合 A是集合B的子集记成

$$A\subseteq B \quad 或 \quad B\supseteq A.$$

读成“A包含在B里”或“B包含着A”。

由定义可知

$A\subseteq B$，当且仅当对一切的$x\in A$均有 $x\in B$。

以后常用记号“$\Leftarrow\Rightarrow$”表示“当且仅当”。用记号“$\forall x\cdots$”表示“对一切的$x\cdots$”或“对所有的$x\cdots$”。于是，上述论断就可简单地写成

$$A\subseteq B\Leftarrow\Rightarrow\forall x\in A,\ x\in B。$$

例 1. 设N为自然数集、Q为有理数集、R为实数集、C为复数集，则显然有，

$$N\subseteq Q\subseteq R\subseteq C,$$ #

$\{1\}\subseteq N$，$\{1, 1.2, 9.9\}\subseteq Q$，$\{5, \sqrt{2}, \pi\}\subseteq R$。

由定义 1，若A、B、C是任意三个集合，则

1°. $A\subseteq A$；

2°. 如果$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$。

应该注意的是符号“$\in$”与“$\subseteq$”在概念上的区别。符号“$\in$”表示元素与集合间的隶属关系，形式上符号“$\in$”的左边的记号是相对于其右边的记号的元素。而符号“$\subseteq$”则表示集合与集合间的包含关系。形式上“$\subseteq$”的两边均是集合，地位平等。因此，应严格地区分这两个符号所表示的概念，否则会引出矛盾。

由定义1可知，判断一集A是否是集B的子集，是由条件“如果对每个x，$x \in A$，则$x \in B$”是否成立来决定的。如果这个条件为真，则A是B的子集；如果条件为假，则A不是B的子集。而条件“如果对每个x，$x \in A$，则$x \in B$”是一个复合语句，“对每个$x, x \in A$”是前提，“$x \in B$”是结论。前提和结论间用“如果…，则…”连成一个句子，形成一个复合命题。在数学中，特别是数理逻辑中，我们规定这样的一个复合命题是假的，当且仅集当前提是真的，结论是假的。

空集是任一集的子集，即对任何集A，$\phi \subseteq A$。从

$A \subseteq B \Leftrightarrow$ 不属于B的元素必也不属于A

也同样可以得到：对任何集A，$\phi \subseteq A$。

定义 2. 如果$A \subseteq B$且B中至少有一个元素b使$b \overline{\in} A$，则称A是B的真子集。A是B的真子集时就记成$A \subset B$。

例如，所有正偶整数之集E是自然数集N的真子集，即$E \subset N$。

定义 3. 设A与B是两个集合。如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A与B相等，并记成$A = B$。

这就是说，如果集合A与集合B是由完全相同的元素组成时就说这两个集合是相等的，否则就是不等的。如果A与B是不相等的两个集，则记成$A \neq B$。两个相等的集并不意味着它们是用同样的方式定义的。

例 2. 设$A = \{2, 3\}$，B为方程

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

的根所形成的集合，则显然有$A = B$。

若令$D = \{1, 2, 3, 4\}$，则A是D的真子集，即，$A \subset D$。 #

易见，

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ 且 } A \neq B。$$

定义3指出了一个重要的原则：要证明两个集合相等，唯一的方法是证明每一个集中的任一元素均是另一个集的元素。这种证明应是靠逻辑推理，不能依靠直观。这个方法是本章的主要方

法，是必须掌握的基本方法，它贯穿在本书的各章中。

在数学、计算机科学中，甚至在日常生活中常常会遇到以集合为元素的集。例如，在学校中，每个班是一个集，而全校的各个班又形成了一个集，那么这个集就是以集为元素的集。又如直线上每一个区间是一个集，而多个区间就形成一个以集为元素的集。为了明确起见，有下面定义：

定义 4. 以集为元素的集称为集族。

定义 5. 集合S的一切子集（包括空集ϕ及S本身）形成的集族称为S的幂集，记成2^S。

于是，$2^S=\{A|A\subseteq S\}$。

例 3. 若 $S=\{1,2,3\}$，则

$2^S=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$。 #

注意，$2^\phi=\{\phi\}$。在这里，要区分ϕ与$\{\phi\}$，ϕ表示空集，其中没有任何元素，而$\{\phi\}$则表示一个集族，它有唯一的一个元素—空集，$\phi\in\{\phi\}$。又集$\{\phi,\{\phi\}\}$是含两个元素的集。

一般说来，如果S是由n个元素组成的集合，则S的幂集2^S就有2^n个元素。其证明留给读者完成。

在极其个别的场合下，还会遇到以集族为元素的集，不再给它命名。甚至也还会遇到以某个集合的一些元素及它的某些子集混合组成的集。例如：集 $U=\{a,b,\{a,b\}\}$。在这里 a、b、$\{a,b\}$都是作为U的元素，于是，

$$\{a,b\}\in U，\{a,b\}\subseteq U。$$

设I是一个集合，如果对I中每个元素l有一个唯一的集与之对应，这个集用A_l表示，l作为一个标号而用之，于是所有A_l形成的集族就可简记成，$\{A_l\}_{l\in I}$，集I称为标号集。

习　　题

1. 写出程序设计语言 FORTRAN Ⅱ 的基本字符集。
2. 写出程序设计语言ALGOL60的基本字符集。