数理逻辑引论

马光胜 编著

哈尔滨工程大学出版社

数理逻辑引论

马光胜　编著

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

数理逻辑是计算机科学的重要理论基础。本书主要介绍数理逻辑中命题演算和谓词演算的知识，共分六章：预备知识、序数与基数、语义与语法、命题演算的可靠性与完备性理论、谓词演算的可靠性与完备性理论以及一阶理论的几个问题。

本书可作为计算机专业研究生、高年级本科生的教材或参考书，也可供计算机、数学、逻辑等方面的专业人员参考。

数理逻辑引论

马光胜　编著

责任编辑　朱春元

*

哈尔滨工程大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

哈尔滨毕升电脑排版有限公司排版

东北农业大学印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印张 5.75　字数 150 千字

1997 年 3 月第 1 版　1997 年 3 月第 1 次印刷

印数：1—1000 册

ISBN 7-81007-746-5

O·51　　定价：8.00 元

前　　言

十年前，作者在为计算机应用专业的硕士研究生讲授数理逻辑课程时，曾经编写了一本《数理逻辑》讲义。在多年的教学实践中，该讲稿在内容组成、讲授顺序、习题配备等方面做了多次修订，为出版这本书打下了基础。

从1992年起，计算机与信息科学系为加强计算机软件专业离散数学的教学，为本科生开设了数理逻辑课。根据高年级本科生和硕士研究生的教学特点和需求，作者又重新对讲稿内容作了增删。本书就是为了协调并组织好两方面的教学而编写的。

本书包括集合论中的有关知识、序数与基数、语义与语法、命题逻辑、一阶逻辑、一阶理论的几个问题等六部分内容。命题逻辑和一阶逻辑是数理逻辑的基础内容。在这两章中分别建立了两种演算，严格证明了它们各自的可靠性和完备性定理。反驳是一种重要推理方法，两种演算和两种反驳的关系也做了详细的讨论。为了深刻理解一阶逻辑完备性定理的证明，安排了前两章的内容。

在第1章中概述了本书涉及到的预备知识，它们是朴素集合论三原则、悖论、Zorn引理、数学归纳法、超穷归纳法等。在第2章中定义了序数和基数概念并讨论了它们的性质。对本科生授课时，可以简单讲述这些预备知识，不必详细论证其中的定理，而把主要精力放在第4、5章的语义和语法问题上。对研究生授课时，建议详细地论证这些预备知识。深入地学习集合论中的这些知识并且熟悉超穷论法，除了能理解第5章的核心定理之外，更重要的是为进一步学习数理逻辑的专论打下基础。习题有助于理解正文内容。有些习题与后文有直接联系（这些习题在正文中已指明它们的作用），这类习题是读者必做的。如果读者预修过离散数学课程，那将更容易理解和掌握本书的内容。

哈尔滨工业大学王义和教授对作者曾给予热情的鼓励，并对本书初稿提出了不少意见和建议。哈尔滨工程大学刘大昕教授在百忙之中审阅了书稿，并提出了宝贵的修改意见。在此向两位教授致以诚挚的谢意。

在这里还要感谢计算机与信息科学系的历届研究生，它们的学习心得有助于本书的完成。

书中不妥或错误之处，敬请读者指正。

编著者

目　　录

引　　言

一般公认的看法是，数理逻辑从兴起、发展到现在经历了大约三百年的时间。

早在17世纪初，Hobbes(1588－1679，英国)首先提出在逻辑学中应用数学方法的设想。他认为把一般的概念看作“标记”或“符号”，把逻辑的思维或概念的综合、分析看作“符号的加减”或数学的演算。Descartes(1596－1650，法国)主张把几何学的推理方法或演绎法应用到哲学上。他们均不同程度地发觉始自Aristotle时代的传统逻辑的不足，并且产生了新逻辑的启蒙思想。但是最早明确指出数理逻辑思想的是Leibniz(1646－1716，德国)。“他认为‘应该建立一种表意的普遍的符号语言，如同数学符号一样，每一个符号表达一个概念。一种完美的符号语言又应该是一种思维的演算，以便通过计算来代替思维和推理，除却事实的错误以外，所有的错误将只产生于计算的失误，论辩的双方只要用笔计算一下，就可以明确是非。’Leibniz的思想在今天的数理逻辑中已经部分地变成了现实(刘凤璞等，《逻辑学大全》，p. 172)。”由于他在运用数学方法时保留了概念、判断的内涵的解释而遇到困难，故没有建立起逻辑演算，但是他的一些明确的思想，确立了他成为数理逻辑的创始人。

数理逻辑三百年的说法是从Leibniz开始的。Leibniz之后，数理逻辑在相当长的一段时间内没有什么发展。到了19世纪中期，Boole(1815－1864，英国)在Hamilton(1788－1856，英格兰)的成就上建立了一个抽象代数系统。Boole的思想集中体现在《逻辑的数学分析：论一种演绎推理的演算法》(1847)和《思维规律的考察：逻辑和概念的数学理论基础》(1854)两本著作中。他完全从外延角度进行数量化处理，首创一种后人称之为Boole代数的逻辑代数，

第一次使得逻辑演算以现今人们所熟悉的形态和规模出现。Boole的工作使数理逻辑的建立迈出了一大步，被公认为是数理逻辑的第二创始人。

Boole 代数后来得到了改进和发展。Jevons(1835－1882，英国)用可相交的逻辑和代替了原来不相交的逻辑和，并且强调了每一个推导步骤都应有逻辑解释。

Peirce(1838－1914，美国)和 Frege(1848－1925，德国)引进和研究了量词，对 Boole 代数进行了重大改革。他们明确指出 Boole 的逻辑代数实际上是命题函数代数，并且当研究命题函数代数时必须引入量词。Schröder(1841－1902，德国)、Huntington(1874－1952，美国)和 Tarski(1902－1983，波兰)都研究和发展了 Boole 代数。

与 Boole 同时的 De Morgan(1806－1878，英国)研究了关系概念和关系逻辑。Peirce 和 Schröder 都对关系逻辑做了重要贡献。Boole 代数和关系逻辑是数理逻辑发展的初始阶段的有代表性的两大成果。但是这两个成果还不足以构成数理逻辑的基础。

1879 年，Frege 在《概念语言》这部著作中改进了包括 Boole 代数在内的以前的逻辑，采用自己制定的符号语言来构造他的演算系统。他的主要功绩是建立量词理论，采用一些推理规则和一组简单明了的公理系统，从这些公理出发，推出整个逻辑，从而建立了在数理逻辑中十分重要的一阶谓词演算。这也是逻辑史上第一个比较严格、初步自足的公理演绎系统。由于 Frege 的这些功绩，他被推崇为数理逻辑的第三个创始人。后来 Peano(1858－1932，意大利)和 Russell(1872－1970，英国)完善了 Frege 的理论，建立了一个完全的命题演算和谓词演算系统。

用现代观点来看，将完善化、精确化的经典逻辑演算称之为最狭义的数理逻辑。

在 19 世纪末叶和 20 世纪初，数学科学的发展提出了研究数学思维方法和数学基础问题的必要性。集合论中的悖论，尤其是 Russell 悖论的发现，给数学界极大的震动，它们冲击了长期形成

的“数学真理是绝对真理”的观点，同时也动摇了“数学是逻辑推理严格性的典范”这一信念。为了消除悖论以解决数学基础问题，为了探求数学的本质和捍卫数学理论的严格性，数学家们空前活跃起来，开展了数学基础的争辩。在长期的论争中形成了三个不同的数学基础学派，即所谓逻辑主义（代表人物 Russell）、形式主义（代表人物 Hilbert，1862—1943，德国）和直觉主义（代表人物Brouwer，1881－1966，荷兰）。

数学基础问题的研究极大地推动了数理逻辑的发展，形成了数理逻辑的四个分支：证明论、模型论、递归论和公理化集合论。这四论构成了近代数理逻辑的主要内容。这样数理逻辑就是数学的逻辑，即数学逻辑。或者说，四论加上逻辑演算构成了较广义的数理逻辑。

证明论是 Hilbert 提出的。他为了消除数学中的悖论，使数学有一个牢固的基础，根据他的“有穷观点”，提出证明各个数学分支无矛盾性的著名的“方案”。后来 Gödel（1906—1978，奥地利）的不完备性定理证明了 Hilbert 的无所不包的证明系统的设想是不现实的，但在有限的范围内证明某一数学系统的一致性确是必要的。Gödel 的理论否定了 Hilbert 方案的某些设想，加深了对公理方法的认识，也促进了递归论的产生和发展。证明论的主要内容是证明数学（具体指自然数论和集合论）的无矛盾性，它是研究数学证明的理论和规律的科学，所以证明论又叫作元理论（metatheory）或元数学（metamathematics）。

模型论是研究形式系统和它的解释（模型）之间的关系的一门科学。在数理逻辑中，对形式系统的研究，往往借助于对满足这些形式系统的数学结构的研究来完成。这种具体的数学结构称为模型。模型论研究各种模型的性质、彼此之间的关系、模型分类以及构造模型的方法。模型论的早期工作是由德国数学家 Löwenheim 提出的：“如果一个命题有一个无限模型，则它有可数模型（1915）。”后来这一结果发展成 Löwenheim－Skolem－Tarski 定理。Skolem 把 Löwenheim 的结果推广到可数语言的无限公式集

合的情况(1920)。Tarski 又把它推广到不可数语言的情况(1931)。Gödel 完备性定理和紧致性定理是模型论中的另一项工作。首先 Gödel 对可数语言的情况给出了证明(1930),后来 Мальцев(1909－1967,苏联)对不可数语言的情况给出了证明(1936)。本书介绍的完备性定理的证明方法是 Henkin 给出的(1949)。Robinson(1918－1974,美国)利用非标准模型把无限小、无限大引入数学分析中,得出非标准分析。模型论是一门年轻的学科,直到 50 年代初,模型论才成为数理逻辑的一个独立分支,并确定了它的研究范围。

递归论又称递归函数论,是关于可计算性问题的理论。递归论主要是运用数理函数方法研究"可计算性"或"能行过程"的学科。"能行过程"原本是一个比较含糊的概念,现在它已经有了许多精确的定义。例如,一般递归式、Turing 机、正规算法、有限自动机等,这些定义彼此等价。Turing(1912－1954,英国)把可计算性概念同机器程序、形式系统概念统一起来:凡是能行可计算的函数都能用 Turing 机计算(1936)。电子计算机出现以后,递归论更加受到人们的重视。许多数学家对递归论做出了贡献,他们是 Hilbert、Gödel、Herbrand(1908－1931,德国)、Turing、Church(1903－ ,美国)、Kleene(1909－ ,美国)等。近几十年递归论发展很快,硕果累累。它的主要内容包括:原始递归函数、一般递归函数、递归可枚举性、判定问题以及递归不可解性等理论。

公理化集合论是用公理化方法重建朴素集合论的研究理论。集合论在数理逻辑中占有很重要的地位。Cantor(1845－1918,德国)朴素集合论导致了矛盾。集合论中出现的问题使逻辑学,进而整个数学都出现了危机。于是迫使人们重新建立无矛盾的(至少是目前还未发现矛盾的)集合论理论,数学家们想到了公理化方法。公理化方法的研究始于公元前约三百年 Euclid(公元前约 330－公元前 275,希腊)的《几何原本》。19 世纪,Gauss(1777－1855,德国)、Лобачевский(1792－1856,俄国)、Riemann(1826－1866,德国)等人研究了非欧几何学,使用和发展公理化方法。这些研究局

限在实质公理学范围。

Hilbert 的《几何基础》(1899)不仅建立了欧氏几何的形式公理系统,而且具体解决了公理化方法的一系列逻辑理论问题。

1908 年 Zermelo(1871－1953,德国)和 Russell 提出了两个看起来不同的集合论公理系统,称为 Z 系统。在 Z 的基础上,经 Fraenkel(1891－1965,德国)和 Skolem 的修改和补充形成 ZF 系统。在 ZF 中再加进选择公理(AC),便构成 ZFC 系统。

Russell 在 1908 年以及在他与 Whitehead(1861－1947,英国)合著的《数学原理》(1910－1913)里提出了类型论(type theory)。类型论中的分支类型理论可以消除“恶性循环”,即限制概括原理。在他们之后,Von Neumann(1903－1957,匈牙利)利用函数概念采取符号逻辑的方法,把 ZF 系统形式化并做了形式推广。其后,Bernays(1888－1977,德国)和 Gödel 改进和简化了 Von Neumann 的形式结构。历史上将形式推广之前的理论称为 ZF,而把形式推广之后的理论称为 Bernays - Gödel 集合论(缩写为 BG)。

公理化集合论的主要成果有:Gödel 关于选择公理与广义连续系统问题 GCH 协调性的研究(1939),Cohen(1934－　,美国)证明了选择公理和 GCH 的独立性、创造了力迫法(1963－1966)。

证明论、模型论、递归论和公理化集合论的建立,使数理逻辑中一系列概念得到了精确的数学定义,对电子计算机的产生和发展起到了理论奠基作用,数理逻辑因之与计算机科学有了密切联系。“到 30 年代末,数理逻辑已经成熟,它的理论基础已经奠定,成为一门具有丰富内容的学科(王宪钧,《数理逻辑引论》,p. 259)。”

现代对数理逻辑内容的认识和理解除了上述内容之外,还包括递归逻辑、模态逻辑、时态逻辑、概率逻辑、模糊逻辑、多值逻辑等一些逻辑学分支。这些理论自然是用数学方法研究的逻辑。这是人们对数理逻辑的最广义的理解。这里不展开讨论这些分支的发展情况。

在 30 年代以前,数理逻辑是作为一门纯理论的学科而存在和

发展的。逻辑学和数学本身的发展促进了数理逻辑的兴起和成熟。这里面交识着方法论和认识论上一系列哲学问题。它反过来对逻辑学和数学都有重大影响。30年代以后，数理逻辑开始应用于开关电路的设计，成为计算机科学的基础理论之一。

从数理逻辑的内容和发展过程来看，它有如下几个特点：

首先，数理逻辑使用特制的符号语言。

第二，它采用数学方法（如初等数论方法、代数方法、算术方法等）研究逻辑问题，特别是研究数学中的逻辑问题。

第三，数理逻辑中的公理化方法和由它发展起来的形式化方法是发现新定理、探求新结果的一个主要手段。

第四，构造模型方法产生了新的数学分支（如非标准分析）。

第五，它探讨思维推理过程的机械化问题，对计算机科学许多领域产生了深远的影响。

最后，数理逻辑尽管明确地优于传统逻辑，但它不能反映辩证思维的形式和规律，因此，它作为逻辑工具的作用仍是有限的。

第 1 章　预备知识

我们假设读者熟悉曾发表过的朴素集合论(naive set theory)的基本内容。在本书的参考文献中列出了几本有代表性的集合论专著，它们是 Fraenkel (1961)、Halmos (1960)、Kuratowski - Mostowski(1976)、谢邦杰(1979)和刘世超-杨兆庆(1978)。关于序数(ordinal)和基数(cardinal)的初步知识在第 2 章中作进一步的介绍。这些概念在第 5 章中要使用。

1.1　基本概念

我们把类(class)和集合(set)区分开。除在公理化集合论和非标准分析课程以外(在那里，术语“类”和“集合”将赋于更精确的含义)，一个类被理解为客体(object)的一个任意搜集(collection)。而一个集合是一个类，这个类是另一个类的成员(member)(集合的另一个可区别的特性是只有集合才能有基数)。

给定一个客体 x 和一个类 X，通常我们把“x 是 X 的一个成员(元素，点)”写成 $x\in X$，是说“X 包括 x”或“x 在 X 之中”。若 X 包括一个类 Y 的每一个成员，则 X 包含 Y，记作 $Y\subseteq X$。两个类看成是相等的，如果它们有同样的成员。

我们用 N 或 ω 记自然数(包括 0)集合。除在公理化集合论之外，空集用$\varnothing$表示。

若 A 是一个集合，则 A 的幂集 $\rho(A)$是 A 的所有子集的集合。

给定 $n(\geqslant 1)$个客体 $x_1,\cdots,x_n$，我们用$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$表示客体 $x_1,\cdots,x_n$ 构成的 n 重序元。这样$\langle x,y\rangle$是 x 和 y 构成的二重序元，简称为序偶。习惯上，我们记$\langle x\rangle=x$，称它为 x 的有序单点(ordered singleton)。

类的有限序列 $A_1,\cdots,A_n(n\geqslant 1)$的笛卡尔乘积记作 $A_1\times\cdots\times A_n$ 它是所有的 n 重序元$\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$的搜集，其中 $a_1\in A_1,\cdots,a_n\in A_n$。若每一个 A_i 都等于类 A，则我们用 A^n 记 $A_1\times\cdots\times A_n$。习惯上，$A^0=\{\varnothing\}$，这样 A^0 仅有一个成员，即$\varnothing$。

对于 $n\geqslant 1$，一个类 A 上的一个 n 元关系是 A 的成员的 n 重序元的一个搜集，即 A^n 的子类。A 上的一个一元关系称为一个特征(property)，它恰是 A 的一个子类。A 上的恒等(对角线)关系是二元关系

$$\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}.$$

A 上的成员关系是二元关系

$$\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in A\wedge x\in y\}.$$

若 R 是 A 上的 n 元关系且 $B\subseteq A$，则把 R 对 B 的限制(restriction)定义作 B 上的 n 元关系 $\mathrm{R}\cap B^n$。如果 R 是一个二元关系，我们常写 $x\mathrm{R}y$ 表示$\langle x,y\rangle\in\mathrm{R}$。

一个函数(变换，映射)是这样的序偶所构成的类 f，只要当$\langle x,y\rangle\in f$ 和$\langle x,z\rangle\in f$ 时，就有 $y=z$。f 的定义域 dom(f)是类

$$\{x\mid \text{对某一个 } y,\langle x,y\rangle\in f\}.$$

f 的值域 ran(f)是类

$$\{y\mid \text{对某一个 } x,\langle x,y\rangle\in f\}.$$

若 f 是一个函数，且 $x\in\mathrm{dom}(f)$，则满足$\langle x,y\rangle\in f$ 的唯一的 y 用 $f(x)$表示(除在公理化集合论以外)，或有时表作 fx 等等。称$f(x)$为 f 在 x 点的值，有时我们用它的值来确定一个函数 f，在这些条件下我们写 $x\to f(x)$(例如，$x\to x+1$ 描述 N 上的后继函数)。若 f 是这样一个函数，$\mathrm{dom}(f)=A$ 且 $\mathrm{ran}(f)\subseteq B$，我们则说 f 是从 A 到 B 的函数，写作 $f:A\to B$。如果有 $f:A\to B$ 且 $X\subseteq A$，我们定义

$$(f|X)(x)=f(x),\text{当 } x\in X \text{ 时}$$

是 f 的限制 $f|X:X\to B$。如果 $X\subseteq A$ 且 $Y\subseteq B$，我们令

$$f[X]=\{f(x)\mid x\in X\},$$

$$f^{-1}[Y]=\{x\mid f(x)\in Y\},$$

并且对 $y\in Y$，我们令

$$f^{-1}(y)=f^{-1}[\{y\}].$$

若对所有 $x,y\in A, f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$，则称 f 是一对一的（入射）；$f[A]=B$，则称 f 是到上的（满射）；若 $f:A\to B$ 满足上述两个条件，则 f 是一一对应的（双射）。若 A 和 B 之间存在一个双射，则说 A 和 B 是等势的。若 $f:A\to B$ 且 $g:B\to C$，则 f 和 g 的合成 $g\circ f:A\to C$ 定义为 $(g\circ f)(x)=g(f(x)), x\in A$。我们有时略去 $\circ$ 把 $g\circ f$ 简写为 gf。可以看出，对每个类 A，A 上的恒等关系是一个从 A 到 A 的双射，据此也称它是 A 上的恒等映射。若 $A\subseteq B$，则 A 到 B 的入射是用 $i(x)=x, x\in A$ 定义的映射 $i:A\to B$。

若 A 是一个类且 I 是一个整数集合。我们用 A^{I} 表示从 I 映到 A 的所有函数的搜集（注意，这个定义包括 $A^{\varnothing}=\{\varnothing\}=A^0$）。若 $\{A_i \mid i\in \mathrm{I}\}$ 是一族有下标的集合，我们用 $\prod\limits_{i\in\mathrm{I}} A_i$ 表示所有这样函数的搜集，它们的定义域是 I，对于所有 $i\in\mathrm{I}$，有 $f(i)\in A_i$。选择公理断言：若每个 $A_i\neq\varnothing$，则 $\prod\limits_{i\in\mathrm{I}} A_i\neq\varnothing$。

对任意 $n\in\mathrm{N}$，一个类 A 上的一个 n 元运算是一个从 A^n 到 A 的函数。特别，A 上的一个0元运算是从 $\{\varnothing\}$ 到 A 的一个函数。从而我们可以用唯一的值来表示给定的0元运算，这个值称之为某一个结构上的标定个体(designated individual)。这样，A 上的一个0元运算仅是 A 中的一个成员。如果 f 是 A 上的一个 n 元运算，我们用 $f(a_1,\cdots,a_n)$ 表示 $f(\langle a_1,\cdots,a_n\rangle)$。$A$ 的一个子类 B 说是在 f 作用下封闭的或稳定的，如果对任意 $b_1,\cdots,b_n\in B$，有 $f(b_1,\cdots,b_n)\in B$。如果在 f 作用下 B 是封闭的，我们用

$$(f\mid B)(b_1,\cdots,b_n)=f(b_1,\cdots,b_n),\ b_1,\cdots,b_n\in B$$

来定义 f 对 B 的限制 $f\mid B$。

一个类 A 上的一个二元关系 R 是一个等价关系，如果它满足

(*a*) $x\mathrm{R}x$，对所有 $x\in A$；

(*b*) $x\mathrm{R}y$ 蕴含 $y\mathrm{R}x$，对所有 $x,y\in A$；

(*c*) $x\mathrm{R}y$ 和 $y\mathrm{R}z$ 蕴含 $x\mathrm{R}z$，对所有 $x,y,z\in A$。

R 是 A 上的一个等价关系，对每个 $x\in A$，集合 $[x]=\{y\mid y\in A, xRy\}$ 称为 x 的 R-等价类。称 A 的子集所构成的集合族 $\{A_i\}$ 是 A 的一个划分，如果 $\bigcup A_i=A$ 且对 A 的不同子集 X,Y，有 $X\cap Y=\varnothing$。显然，若 R 是 A 上的一个等价关系，则 A 成员的所有 R-等价类所构成的集合族是 A 的一个划分。

一个偏序集是一个序偶 $\langle A,\leqslant\rangle$，其中 A 是一个集合，$\leqslant$ 是 A 上满足下述各条的一个二元关系：

(a) $x\leqslant x$，对所有 $x\in A$；

(b) $x\leqslant y$ 和 $y\leqslant x$ 蕴含 $x=y$，对所有 $x,y\in A$；

(c) $x\leqslant y$ 和 $y\leqslant z$ 蕴含 $x\leqslant z$，对所有 $x,y,z\in A$。

如果 $x\leqslant y$，则说 x 小于等于 y 或 y 大于等于 x。我们也用"$x<y$"表示"$x\leqslant y$ 且 $x\neq y$"。若 $\langle A,\leqslant\rangle$ 是一个偏序集，则 $\leqslant$ 称为 A 上的一个偏序关系。一个偏序集是全序的（或称线序的），如果它还满足

(d) $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$，对所有 $x,y\in A$。

若 A 是任意集合族，则集合的包含关系 $\subseteq$ 是 A 上的一个偏序。我们常用集合 A 表示一个偏序集 $\langle A,\leqslant\rangle$。

$\langle A,\leqslant\rangle$ 是一个偏序集且 $X\subseteq A$。一成员 $a\in A$ 是 X 的一个上（下）界，如果对任意 $x\in X$，有 $x\leqslant a$ $(a\leqslant x)$。A 中 X 的一个上（下）界称为上（下）确界，如果 a 小于（大于）A 中 X 的其余每一个上（下）界。如果 X 在 A 中有上（下）确界，我们用 $\sup(X)$ $(\inf(x))$ 来表示它。那么，$\sup(\varnothing)$ $(\inf(\varnothing))$ 是满足下述条件的 A 中一个元 a：对每一个 $x\in A$，有 $a\leqslant x$ $(x\leqslant a)$。即若 A 中存在 $\sup(\varnothing)$ $(\inf(\varnothing))$，那么它必定是 A 的最小（最大）元。

A 的一个子集 X 是偏序集 $\langle A,\leqslant\rangle$ 中的链，如果 $\leqslant$ 全序 X，即对所有 $x,y\in X$ 有 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$。$\langle A,\leqslant\rangle$ 是诱导的(inductive)，如果 A 中的每一个链在 A 中有一个上界。一个元 $a\in A$ 是最大的，如果当 $x\in A$ 且 $a\leqslant x$ 时有 $x=a$。Zorn 引理（它等价于选择公理）断言：对于一个诱导集 $\langle A,\leqslant\rangle$ 的每一个元 x，存在一个最大元 $a\in A$，使 $x\leqslant a$。

一个偏序集 $\langle A,\leqslant\rangle$ 是良序的，如果 A 的每个非空子集 X 包