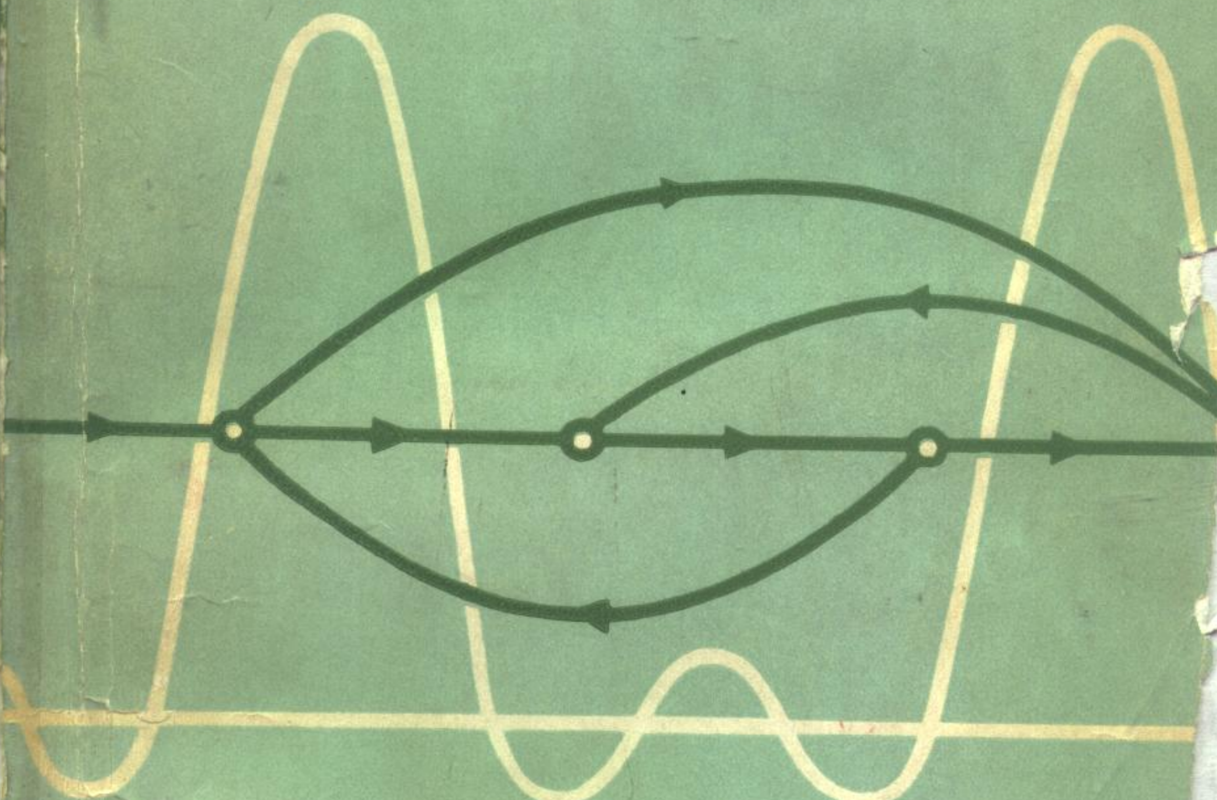
《数字信号处理》习题解答

顾福年 胡光锐



科学出版

《数字信号处理》习题解答

科

《数字信号处理》习题解答

顾福年　胡光锐

科学出版社

1983

内 容 简 介

本书是美国 A. V. 奥本海姆(Oppenheim)和 R. W. 谢弗 (Schafer) 合著的《数字信号处理》一书(中译本在 1980 年由科学出版社出版)中全部习题的详细解答。书中对其中一部分习题提供了两种或两种以上的解答。

本书解答的 242 个习题是《数字信号处理》一书的重要组成部分，该书将许多定理和重要结果的证明放在习题中进行，因此本书不但可为读者在学习《数字信号处理》选做习题时提供启发、检查与核对之用，而且对于深入理解数字信号处理的基本理论和解决实际问题也有很大帮助。

本书可供科研和技术部门从事数字信号处理工作的广大科技人员参考，也可供高等院校有关专业的学生、研究生和教师参考。

《数字信号处理》习题解答

顾福年　胡光锐

责任编辑　刘兴民

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1983 年 8 月第一版　开本：787×1092 1/16

1983 年 8 月第一次印刷　印张：22

印数：0001—16,100　字数：514,000

统一书号：15031・515

本社书号：3126・15—7

定价：3.40 元

前　言

本书是美国 A. V. 奥本海姆和 R. W. 谢弗合著的《数字信号处理》一书(中译本在1980年由科学出版社出版)中全部习题(共242题)的详细解答. 本书不是独立的,题解中所引用的公式和插图要从该书中去找.

奥本海姆等著的这本《数字信号处理》是目前国际上颇受欢迎的一本基础理论著作,它是大学和研究所公认的标准教科书和参考书. 它受欢迎的原因除选材得当、条理清楚、论述严谨、系统而又深入浅出之外,主要的还因为该书中提供了大量的典型而深入的习题,这是学习数字信号处理不可缺少的训练手段,对于深入理解数字信号处理的基本原理以及解决实际问题有很大帮助.

数字信号处理的理论及其应用在我国受到广泛重视,有关高等学校普遍开设了这门课程,有关科技部门广泛开展了这方面的研究. 大学生、研究生以及使用电子计算机的各类科技人员,都迫切需要这方面的参考读物.

从1978年下半年起,我们学习了奥本海姆等的《数字信号处理》一书,并对其中的习题逐题进行了解答. 以后因教学需要,在1980年初油印了这本题解,作为资料交流,受到国内有关方面的欢迎. 这次正式出版前我们对它进行了全面修订和补充,改正了其中的错误,增加了一些解法. 在此过程中,我们参考了从美国刘必治教授和清华大学得到的美国的题解(手稿复制本). 在这里向提供手稿复制本的奥本海姆教授和清华大学的同志们致谢,并向早先提供资料的刘必治教授致谢.

我们希望读者在做习题时自己独立求解,在做题的过程中得到磨炼和提高. 总之要独立思考,不要依赖题解,本书不过是对你的解答提供核对、补充,或者最多是一种提示. 如果读者是这样来使用本书的话,就达到我们编著它的目的了. 有的题目,我们从不同的角度提供了两种或两种以上的解法,也许读者还有更好的方法,希望提出来互相交流. 解答中可能会有不妥和错误之处,欢迎批评指正.

顾福年　胡光锐

1981年6月于上海交通大学电子工程系

目　　录

第一章　时域离散信号和系统

1. 讨论一个输入为 $x(n)$ 和输出为 $y(n)$ 的任意线性系统．证明如果对于所有 n，$x(n)=0$，则对于所有 n，$y(n)$ 必然为零．

证　**证法 1**　设 $y(n)=T[x(n)]$．因为对于所有 n，$x(n)=0$，所以

$$x(n)=x(n)-x(n)=0$$

由于线性系统满足叠加原理，因此

$$y(n)=T[x(n)]=T[x(n)-x(n)]=T[x(n)]-T[x(n)]=0$$

证法 2　设 $y(n)=T[x(n)]$，对于所有 n，$x(n)=0$．并设 $y_1(n)=T[x_1(n)]$．因为线性系统满足叠加原理，所以

$$T[x(n)+x_1(n)]=T[x(n)]+T[x_1(n)]=T[x_1(n)]$$

因此

$$T[x(n)]=y(n)=0$$

2. 对于图 P 1.2 中的每一组序列，试用离散卷积法求线性非移变系统[单位取样响应为 $h(n)$] 对于输入 $x(n)$ 的响应．

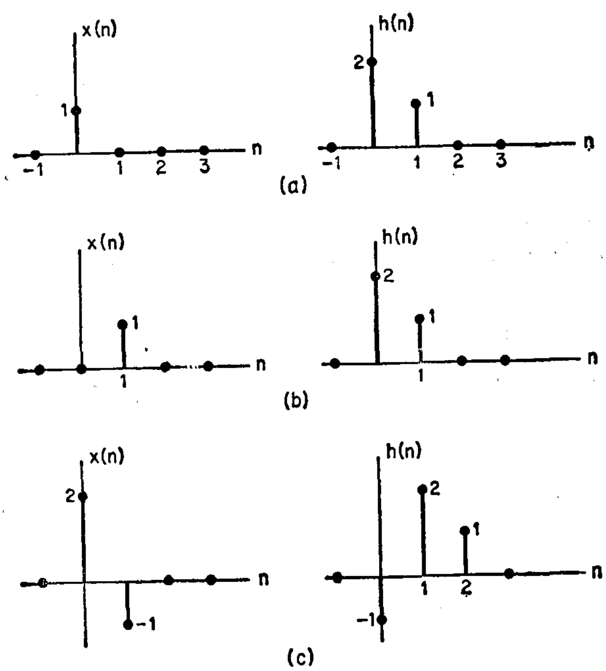


图　P 1.2

解　计算可按下式进行：

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$

(a) $y(0)=1\times 2=2$，　$y(1)=1$，　$y(n)=0$，　$n\neq 0, 1$．

(b) $y(1)=1\times 2=2,\quad y(2)=1,\quad y(n)=0,\quad n\neq 1,2.$

(c) $y(0)=-1\times 2=-2,$

$y(1)=2\times 2+(-1)\times(-1)=5,$

$y(2)=1\times 2+2\times(-1)=0,$

$y(3)=-1\times 1=-1,$

$y(n)=0,\quad n\neq 0,1,2,3.$

(a)、(b) 和 (c) 中求得的序列 $y(n)$ 如图 P 1.2-1(a)、(b)、(c) 所示.

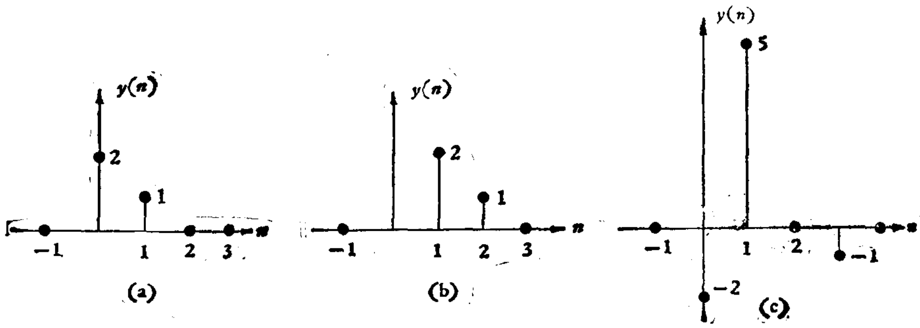


图 P 1.2-1

3. 直接计算卷积和,求序列

$$h(n)=\begin{cases}\alpha^n, & 0\leqslant n<N\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$x(n)=\begin{cases}\beta^{n-n_0}, & n_0\leqslant n\\ 0, & n<n_0\end{cases}$$

的卷积 $y(n)=x(n)*h(n)$,并用公式表示之.

解 可以分成三种情形来求解:

(1) 当 $n<n_0$ 时,由于 $h(n-k)$ 和 $x(k)$ 的非零取样互不重叠,因此

$$y(n)=0$$

(2) 当 $n_0\leqslant n\leqslant n_0+N-1$ 时,从 $k=n_0$ 到 $k=n$, $h(n-k)$ 和 $x(k)$ 的非零取样有重叠,因此

$$\begin{aligned}y(n)&=\sum_{k=n_0}^{n}x(k)h(n-k)\\&=\sum_{k=n_0}^{n}\alpha^{n-k}\beta^{k-n_0}\\&=\alpha^n\beta^{-n_0}\sum_{k=n_0}^{n}(\beta\alpha^{-1})^k\end{aligned}$$

若 $\alpha\neq\beta$,则

$$y(n)=\alpha^n\beta^{-n_0}\frac{(\beta/\alpha)^{n_0}-(\beta/\alpha)^{n+1}}{1-\beta/\alpha}=\frac{\alpha^{n-n_0+1}-\beta^{n-n_0+1}}{\alpha-\beta}$$

若 $\alpha=\beta$,则

$$y(n)=\alpha^{n-n_0}\sum_{k=n_0}^{n}1^k=(n-n_0+1)\alpha^{n-n_0}$$

(3) 当 $n \geqslant n_0 + N - 1$ 时,从 $k = n - N + 1$ 到 $k = n$, $h(n-k)$ 和 $x(k)$ 的非零取样有重叠,因此

$$y(n) = \sum_{k=n-N+1}^{n} \alpha^{n-k}\beta^{k-n_0} = \alpha^n\beta^{-n_0} \sum_{k=n-N+1}^{n} (\beta/\alpha)^k$$

若 $\alpha \neq \beta$,则

$$y(n) = \alpha^n\beta^{-n_0}\frac{(\beta/\alpha)^{n-N+1} - (\beta/\alpha)^{n+1}}{1-\beta/\alpha} = \beta^{n-n_0-N+1}\frac{\alpha^N - \beta^N}{\alpha - \beta}$$

若 $\alpha = \beta$,则

$$y(n) = \sum_{k=n-N+1}^{n} \alpha^{n-n_0} = N\alpha^{n-n_0}$$

4. 设 $e(n)$ 为一指数序列,

$$e(n) = \alpha^n, \text{对于所有的 } n$$

又设 $x(n)$ 和 $y(n)$ 表示两个任意序列. 试证明

$$[e(n)x(n)] * [e(n)y(n)] = e(n)[x(n) * y(n)]$$

证 因为

$$\begin{aligned}[e(n)x(n)] * [e(n)y(n)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [e(k)x(k)][e(n-k)y(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k x(k)\alpha^{n-k}y(n-k) \\ &= \alpha^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) \\ &= \alpha^n[x(n) * y(n)]\end{aligned}$$

所以

$$[e(n)x(n)] * [e(n)y(n)] = e(n)[x(n) * y(n)]$$

5. 令 $x(n)$、$y(n)$ 和 $w(n)$ 表示三个任意序列,试证明

(a) 离散卷积服从交换律,即

$$x(n) * y(n) = y(n) * x(n)$$

(b) 离散卷积服从结合律,即

$$x(n) * [y(n) * w(n)] = [x(n) * y(n)] * w(n)$$

(c) 离散卷积服从加法分配律,即

$$x(n) * [y(n) + w(n)] = x(n) * y(n) + x(n) * w(n)$$

证 (a) 因为

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$$

令 $n - k = k'$,则 $k = n - k'$,所以

$$x(n) * y(n) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} x(n-k')y(k') = y(n) * x(n)$$

(b) 应用 (a) 的结果,并按照卷积的定义,可以得到

$$x(n)*[y(n)*w(n)] = x(n)*[w(n)*y(n)]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)[w(n-k)*y(n-k)]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\Big[\sum_{l=-\infty}^{\infty} w(l)y(n-k-l)\Big]$$

交换求和次序,可以写成

$$x(n)*[y(n)*w(n)] = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-l-k)\Big]w(l)$$
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} [x(n-l)*y(n-l)]w(l)$$
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} w(l)[x(n-l)*y(n-l)]$$
$$= w(n)*[x(n)*y(n)]$$

再应用 (a) 的结果就可以证明

$$x(n)*[y(n)*w(n)] = [x(n)*y(n)]*w(n)$$

(c) 按照卷积的定义,可以写出

$$x(n)*[y(n)+w(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)[y(n-k)+w(n-k)]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)w(n-k)$$

因此可以得到

$$x(n)*[y(n)+w(n)] = x(n)*y(n) + x(n)*w(n)$$

6. 讨论一个单位取样响应为 $h(n)$ 的时域离散线性非移变系统.如果输入 $x(n)$ 是周期为N的周期序列, 即 $x(n)=x(n+N)$,证明输出 $y(n)$ 亦是周期N的周期序列.

证 按照卷积的定义,可以得到下面两式:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$
$$y(n+N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n+N-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k+N)$$

因为 $x(n)$ 是周期为N的周期序列,所以

$$x(n-k+N) = x(n-k)$$

比较上面两式,便可以得到

$$y(n) = y(n+N)$$

即 $y(n)$ 也是周期N的周期序列.

7. 如果系统输出是输入函数乘上一个复常数,则该输入函数称作系统的本征函数.

(a) 证明函数 $x(n)=z^n$ 是线性非移变系统的一个本征函数, 其中 z 是一个复常数.

(b) 作为一个相反的例子,证明 $z^n u(n)$ 不是线性非移变系统的一个本征函数,其中

z 是一个复常数.

证 (a) 按照题意,可以写出

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)z^{n-k}$$

$$=z^n\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)z^{-k}$$

上式中 z^n 为输入函数,$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}h(k)z^{-k}$ 为与 n 无关的复常数,因此函数 z^n 是线性非移变系统的一个本征函数.

(b) 因为 $x(n)=z^nu(n)$, 所以

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)z^{n-k}u(n-k)$$

$$=z^nu(n)\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)z^{-k}u(n-k)/u(n)$$

上式中 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}h(k)z^{-k}u(n-k)/u(n)$ 与 n 有关,不是复常数,因此函数 $z^nu(n)$ 不是线性非移变系统的本征函数.

8. 已知一个线性非移变系统的单位取样响应除区间 $N_0\leqslant n\leqslant N_1$ 之外皆为零; 又已知输入 $x(n)$ 除区间 $N_2\leqslant n\leqslant N_3$ 之外皆为零. 结果,输出除了某一区间 $N_4\leqslant n\leqslant N_5$ 之外皆为零. 试以 N_0、N_1、N_2 和 N_3 表示 N_4 和 N_5.

解 按照题意,在区间 $N_0\leqslant n\leqslant N_1$ 之外单位取样响应 $h(n)$ 皆为零,在区间 $N_2\leqslant n\leqslant N_3$ 之外输入 $x(n)$ 皆为零, 因此在区间 $N_0+N_2\leqslant n\leqslant N_1+N_3$ 之外, $h(n-k)$ 和 $x(k)$ 的非零取样互不重叠,故输出皆为零. 由于题中给出输出除了区间 $N_4\leqslant n\leqslant N_5$ 之外皆为零,所以

$$N_4=N_0+N_2\qquad N_5=N_1+N_3$$

9. 通过直接计算卷积和, 确定单位取样响应为 $h(n)$ 的线性非移变系统的阶跃响应,已知 $h(n)$ 为

$$h(n)=a^{-n}u(-n),\qquad 0<a<1$$

解 按照题意可以写出

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^{-k}u(-k)u(n-k),\qquad 0<a<1$$

具体计算可分两种情形来进行:

(1) 若 $n\leqslant 0$, 则 $u(-k)u(n-k)$ 除区间 $-\infty\leqslant k\leqslant n$ 外皆为零,因此

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}a^{-k}=\sum_{k=-n}^{\infty}a^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}a^k-\sum_{k=0}^{-n}a^k$$

最后可得

$$y(n)=\frac{1}{1-a}-\frac{1-a^{-n}}{1-a}=\frac{a^{-n}}{1-a}$$

(2) 若 $n>0$, 则 $u(-k)u(n-k)$ 除区间 $-\infty\leqslant k\leqslant 0$ 外皆为零,因此

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{0}a^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}a^{k}=\frac{1}{1-a}$$

10. 讨论一个具有下列有限时宽单位取样响应 $h(n)$ 的系统:

$$h(n)=0,\quad n<0,\quad N\leqslant n\ (N>0)$$

证明如果 $|x(n)|\leqslant B$，则输出的界值为

$$|y(n)|\leqslant B\sum_{k=0}^{N-1}|h(k)|$$

同时请证明$|y(n)|$可能达到这个界值,即寻找一个满足$|x(n)|\leqslant B$ 的序列 $x(n)$，使 $y(n)$ 对于某些 n 值有

$$y(n)=B\sum_{k=0}^{N-1}|h(k)|$$

证 由于题中给出 $h(n)=0$，$n<0$，$N\leqslant n$，式中 $N>0$,因此可以把 $y(n)$ 写成

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)x(n-k)$$

而

$$|y(n)|\leqslant\sum_{k=0}^{N-1}|h(k)||x(n-k)|$$

若 $|x(n-k)|\leqslant B$，则输出的界值

$$|y(n)|\leqslant B\sum_{k=0}^{N-1}|h(k)|$$

为了达到这个界值，我们凑一个序列

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{h^*(-n)}{|h(-n)|}B, & h(-n)\neq 0\\ 0, & h(-n)=0\end{cases}$$

于是

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)\frac{h^*(k-n)}{|h(k-n)|}B$$

因此

$$y(0)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{|h(k)|^2}{|h(k)|}B=B\sum_{k=0}^{N-1}|h(k)|$$

11. 1.3 节曾定义了系统的因果性.根据这个定义证明,线性非移变系统中,因果性意味着: $n<0$ 时单位取样响应 $h(n)$ 为零. 同时证明,如果 $n<0$ 时系统的单位取样响应为零,则该系统必然是因果性的.

证 1.3 节中关于因果性的定义为: 输出变化不会发生在输入变化之前的系统称为因果系统. 即对于因果系统,若 $n<n_0$ 时 $x_1(n_1)=x_2(n_1)$，则 $n<n_0$ 时 $y_1(n_1)=y_2(n_1)$. 由此推得:当且仅当 $n<0$ 时的单位取样响应等于零时,一个线性非移变系统才是因果系统. 现予以证明. 先证必要性,由因果系统定义,若

$$x_1(n_1)=x_2(n_1),\quad n_1<n_0$$

则

$$y_1(n_1)=y_2(n_1),\quad n_1<n_0$$

而

$$y_1(n_1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)x_1(n_1-n)$$

$$y_2(n_1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)x_2(n_1-n)$$

当 $n_1<n_0$ 时 $x_1(n_1)=x_2(n_1)$，而当 $n_1\geqslant n_0$ 时就不一定 $x_1(n_1)=x_2(n_1)$，$x_1(n_1)$ 和 $x_2(n_1)$ 可各自为任意值. 由上面两式可以看出，连加号中当 $n<0$ 时就不一定 $x_1(n_1-n)=x_2(n_1-n)$，要使 $y_1(n_1)=y_2(n_1)$，则必定

$$h(n)=0,\quad n<0$$

再证充分性. 当 $n<0$ 时 $h(n)=0$，则可以写出

$$y_1(n_1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)x_1(n_1-n)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)x_1(n_1-n)$$

$$y_2(n_1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)x_2(n_1-n)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)x_2(n_1-n)$$

对于任意 n_i，当 $n_i<n_0$ 时，$x_1(n_i)=x_2(n_i)$，即 $n=0,1,2,\cdots$时 $x_1(n_1-n)=x_2(n_1-n)$，由上面两式可以得出，当 $n_1<n_0$ 时，$y_1(n_1)=y_2(n_1)$. 因此根据因果系统定义，该系统必为因果系统.

12. 对于下列每一个系统判别它是否为：(1) 稳定系统；(2) 因果系统；(3) 线性系统.

(a) $T[x(n)]=g(n)x(n)$.

(b) $T[x(n)]=\sum_{k=n_0}^{n}x(k)$.

(c) $T[x(n)]=\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0}x(k)$.

(d) $T[x(n)]=x(n-n_0)$.

(e) $T[x(n)]=e^{x(n)}$.

(f) $T[x(n)]=ax(n)+b$.

并说明理由.

解 (a) (1) 若 $|x(n)|\leqslant M$，则 $|T[x(n)]|\leqslant|g(n)|M$，所以当$|g(n)|$有界时，则该系统为稳定系统.

(2) 若 $y_1(n)=g(n)x_1(n)$ 及 $y_2(n)=g(n)x_2(n)$，当 $n<n_0$ 时 $x_1(n)=x_2(n)$，则 $y_1(n)=y_2(n)$，因此该系统是因果系统.

(3) 由于

$$\begin{aligned}T[ax_1(n)+bx_2(n)]&=g(n)[ax_1(n)+bx_2(n)]\\&=ag(n)x_1(n)+bg(n)x_2(n)\\&=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]\end{aligned}$$

该系统满足叠加原理，所以是线性系统.

(b) (1) 若 $|x(n)|\leqslant M$，则 $|T[x(n)]|\leqslant\sum_{k=n_0}^{n}|x(k)|=|n-n_0|M$，$n\to\infty$，

$|T[x(n)]| \to \infty$，所以该系统不是稳定系统.

(2) 当 $n < n_0$ 时，$T[x(n)]$ 取决于 $x(n)$ 的将来值,所以该系统不是因果系统.

(3) 由于

$$
\begin{aligned}
T[ax_1(n)+bx_2(n)] &= \sum_{k=n_0}^{n}[ax_1(n)+bx_2(n)] \\
&= a\sum_{k=n_0}^{n}x_1(n) + b\sum_{k=n_0}^{n}x_2(n) \\
&= aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]
\end{aligned}
$$

所以该系统是线性系统.

(c) (1) 若 $|x(n)| \leqslant M$， 则 $|T[x(n)]| \leqslant \sum\limits_{k=n-n_0}^{n+n_0}|x(k)| \leqslant |2n_0+1|M$，所以该系统为稳定系统.

(2) 因为 $T[x(n)]$ 取决于 $x(n)$ 的将来值,所以该系统不是因果系统.

(3) 由于

$$
\begin{aligned}
T[ax_1(n)+bx_2(n)] &= \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0}[ax_1(n)+bx_2(n)] \\
&= a\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0}x_1(n) + b\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0}x_2(n) \\
&= aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]
\end{aligned}
$$

所以该系统是线性系统.

(d) (1) 若 $|x(n)| \leqslant M$，则 $|T[x(n)]| = |x(n-n_0)| \leqslant M$，所以该系统是稳定系统.

(2) 因为 $T[x(n)] = x(n-n_0)$，当 $n_0 \geqslant 0$ 时，$T[x(n)]$ 不取决于 $x(n)$ 的将来值,所以当 $n_0 \geqslant 0$ 时该系统是因果系统，$n_0 < 0$ 时是非因果系统.

(3) 由于

$$
\begin{aligned}
T[ax_1(n)+bx_2(n)] &= ax_1(n-n_0) + bx_2(n-n_0) \\
&= aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]
\end{aligned}
$$

所以该系统是线性系统.

(e) (1) 若 $|x(n)| \leqslant M$，则 $|T[x(n)]| = |e^{x(n)}| \leqslant e^{|x(n)|} = e^{M}$，所以该系统是稳定系统.

(2) 因为 $T[x(n)]$ 不取决于 $x(n)$ 的将来值,所以该系统是因果系统.

(3) 由于

$$
\begin{aligned}
T[ax_1(n)+bx_2(n)] &= e^{ax_1(n)+bx_2(n)} = [e^{x_1(n)}]^a[e^{x_2(n)}]^b \\
&\neq aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]
\end{aligned}
$$

故该系统不满足叠加原理,所以是非线性系统.

(f) (1) 若 $|x(n)| \leqslant M$，则 $|T[x(n)]| = |ax(n)+b| \leqslant |a|M + |b|$，因此当 a 和 b 为有限值时该系统是稳定系统.

(2) 因为 $T[x(n)]$ 不取决于 $x(n)$ 的将来值,所以该系统是因果系统.

(3) 由于

$$T[cx_1(n)+x_2(n)] = acx_1(n)+ax_2(n)+b$$
$$\neq cT[x_1(n)]+T[x_2(n)]$$

该系统不满足叠加原理，所以是非线性系统.

13. 讨论一个输入为 $x(n)$ 和输出 $y(n)$ 的系统. 系统的输入-输出关系由下列两个性质确定:

(1) $y(n)-ay(n-1)=x(n)$;　(2) $y(0)=1$.

(a) 判断该系统是否为非移变的.

(b) 判断该系统是否为线性的.

(c) 假设差分方程 (性质 1) 保持不变但规定 $y(0)$ 值为零. (a) 或 (b) 的答案是否改变?

解 (a) 令 $x_1(n)=\delta(n-1)$，由已知条件

$$y_1(n)-ay_1(n-1)=\delta(n-1)$$
$$y_1(0)=1$$

得

$$y_1(1)=\delta(1-1)+ay_1(1-1)=1+a$$
$$y_1(2)=\delta(2-1)+ay_1(2-1)=a+a^2$$
$$y_1(3)=\delta(3-1)+ay_1(3-1)=a^2+a^3$$
$$\vdots$$

同样可得 $y_1(-1)=a^{-1}, y_1(-2)=a^{-2},\cdots$，因此

$$y_1(n)=a^{n-1}u(n-1)+a^n$$

若令 $x_2(n)=\delta(n)$，由已知条件

$$y_2(n)-ay_2(n-1)=\delta(n)$$
$$y_2(0)=1$$

得

$$y_2(1)=\delta(1)+ay_2(1-1)=a$$
$$y_2(2)=\delta(2)+ay_2(2-1)=a^2$$
$$y_2(3)=\delta(3)+ay_2(3-1)=a^3$$
$$\vdots$$

同样可得 $y_2(-1)=0$，$y_2(-2)=0,\cdots$，因此

$$y_2(n)=a^nu(n)$$

因为 $y_2(n)$ 与 $y_1(n)$ 不是非移变关系，所以该系统不是非移变系统.

(b) 令

$$x_3(n)=x_1(n)+x_2(n)=\delta(n-1)+\delta(n)$$

由已知条件

$$y_3(n)-ay_3(n-1)=\delta(n-1)+\delta(n)$$
$$y_3(0)=1$$

推得

$$y_3(1)=\delta(1-1)+\delta(1)+ay_3(1-1)=1+a$$
$$y_3(2)=\delta(2-1)+\delta(2)+ay_3(2-1)=a+a^2$$
$$y_3(3)=\delta(3-1)+\delta(3)+ay_3(3-1)=a^2+a^3$$
$$\vdots$$

同样可得 $y_3(-1)=0$，$y_3(-2)=0,\cdots$，因此

$$y_3(n)=a^{n-1}u(n-1)+a^nu(n)$$

利用 (a) 的结果

$$y_1(n)+y_2(n)=a^{n-1}u(n-1)+a^n+a^nu(n)$$

可以看出

$$y_3(n)\neq y_1(n)+y_2(n)$$

该系统不满足叠加原理，所以不是线性系统.

(c) 假设差分方程保持不变，但 $y(0)=0$，可以按照和 (a)、(b) 同样的方法进行推导. 令

$$x_1(n)=\delta(n-1)$$

则

$$y_1(n)=a^{n-1}u(n-1)$$

若令

$$x_2(n)=\delta(n)$$

则

$$y_2(n)=-a^nu(-n-1)$$

因为 $y_2(n)$ 与 $y_1(n)$ 不是非移变关系，所以该系统不是非移变系统.

再令

$$x_3(n)=x_1(n)+x_2(n)=\delta(n-1)+\delta(n)$$

则

$$y_3(n)=a^{n-1}u(n-1)-a^nu(-n-1)$$

因此

$$y_3(n)=y_1(n)+y_2(n)$$

该系统满足叠加原理，故是线性系统.

14. 讨论具有下列单位取样响应的线性时域离散非移变系统：

$$h(n)=\left(\frac{j}{2}\right)^nu(n),\qquad \text{其中} j=\sqrt{-1}$$

确定其对如下输入激励的稳态响应 (n 足够大时的响应)：

$$x(n)=[\cos\pi n]u(n)$$

解 由于

$$x(n)=[\cos\pi n]u(n)=(-1)^nu(n)$$

因此

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-k}u(n-k)\left(\frac{j}{2}\right)^ku(k)$$

因为 $k<0$ 时 $u(k)$ 为零，所以

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n-k}u(n-k)\left(\frac{j}{2}\right)^k$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{-k}u(n-k)\left(\frac{j}{2}\right)^k$$

由于 k 为正值，且 $k > n$ 时 $u(n-k)$ 为零，故

$$y(n) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{-k} \left(\frac{j}{2}\right)^k = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{j}{2}\right)^k$$

$$= (-1)^n \left[\frac{1-(j/2)^{n+1}}{1+j/2}\right]$$

对于大的 n，$(-j/2)^{n+1}$ 趋于零，所以

$$y_\infty(n) = \frac{(-1)^n}{1+j/2} = \frac{\cos \pi n}{1+j/2} = (-1)^n\left(\frac{4}{5} - j\frac{2}{5}\right)$$

15. 一个时域离散系统如图 P 1.15 所示，系统变换 $y(n) = T[x(n)]$ 是任意的，它还可以是非线性的和时变的. 只知道系统是有定义的，即对于任何给定的输入，系统的输出是唯一的. 假设选择输入为 $x(n) = Ae^{j\omega n}$，并测量输出的某个参数 P（例如，最大幅度）. 一般来说，P 将是 ω 的函数.

我们研究一下不同的激励频率下 P 的性态. 证明 P 是 ω 的周期函数，试求其周期. 类似的结果在时域连续情况下是否成立?

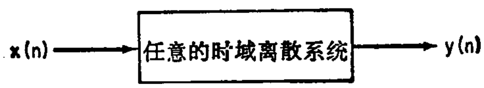


图 P 1.15

解 假设输入为 $x(n) = Ae^{j\omega n}$，它是周期为 2π 的 ω 的周期序列，对应的系统输出为 $P(\omega)$. 如果输入 $x_1(n) = Ae^{j(\omega+2\pi)n} = Ae^{j\omega' n}$，对应的系统输出为 $P_1(\omega')$. 由于系统对于给定的输入，其输出是唯一的，因此输出 $P(\omega)$ 及 $P_1(\omega')$ 是相同的. 即

$$P(\omega) = P_1(\omega') = P(\omega + 2\pi)$$

故其周期为 2π.

在时域连续情况下，我们假设输入为 $x(t) = Ae^{j\omega t}$，如果输出是周期的，则仅是 t 的周期函数，而不是 ω 的周期函数. 为了证明输出不是 ω 的周期函数，可令

$$x_1(t) = Ae^{j(\omega+\omega_0)t}$$

则

$$x_1(t) = Ae^{j\omega t}e^{j\omega_0 t} \neq x(t)$$

因此，除非对于一定的 t 值，而对于一般情况来说，其输出

$$F[x_1(t)] \neq F[x(t)]$$

所以在时域连续情况下，和时域离散系统类似的结果并不成立.

16. 在 1.5 节中给出了序列的一对傅里叶变换:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad \text{（傅里叶变换）} \qquad \text{(P 1.16-1)}$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \quad \text{（傅里叶反变换）} \qquad \text{(P 1.16-2)}$$

(a) 将 (P 1.16-1) 式代入 (P 1.16-2) 式并计算积分，证明两式互为反变换.

(b) 将 (P 1.16-2) 式代入 (P 1.16-1) 式重作 (a).

证 (a) 将 (P 1.16-1) 式代入 (P 1.16-2) 式得

$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)e^{-j\omega l}\right]e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega(n-l)}d\omega$$

因为

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega(n-l)}=\begin{cases}\pi-(-\pi)=2\pi, & n=l\\ \dfrac{e^{j\pi(n-l)}-e^{-j\pi(n-l)}}{n-l}=0, & n\neq l\end{cases}$$

所以

$$h(n)=\frac{1}{2\pi}2\pi h(n)=h(n)$$

(b) 将 (P 1.16-2) 式代入 (P 1.16-1) 式得

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega'})e^{j\omega' n}d\omega'\right]e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega'})d\omega'\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j(\omega'-\omega)n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega'})d\omega'\cdot\delta(\omega'-\omega)$$

$$=H(e^{j\omega})$$

这里 $\delta(\omega'-\omega)$ 是狄拉克 (Dirac) δ 函数。

17. 在 1.5 节中曾直观地证明

$$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad \text{(P 1.17-1)}$$

式中 $Y(e^{j\omega})$、$H(e^{j\omega})$ 和 $X(e^{j\omega})$ 分别是线性非移变系统的输出 $y(n)$、单位取样响应 $h(n)$ 和输入 $x(n)$ 的傅里叶变换，同时满足

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(n-k)x(k) \quad \text{(P 1.17-2)}$$

对 (P 1.17-2) 式的卷积和作傅里叶变换，证明 (P 1.17-1) 式成立。

证 由于

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(n-k)x(k)$$

对上式作傅里叶变换，得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(n-k)x(k)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n-k)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)e^{-j\omega k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n-k)e^{-j\omega(n-k)}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)e^{-j\omega k}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)e^{-j\omega l}$$

因此

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$