

上限法在塑性加工工艺中的应用

●林治平 编著

●中国铁道出版社

Shangxianfa

Shangxianfa Shangxianfa

231-23
5

上限法在塑性加工 工艺中的应用

林治平 编著

中国铁道出版社

1991年·北京

内 容 简 介

本书简要介绍上限法的理论基础,把上限法的主要解题方法分为五类(整体上限分析法、基元技术、上限元技术、变换法和流函数法),介绍各类解法的基本原理及应用范围,然后系统阐述上限法在塑性加工工艺中应用的各个方面,包括工步的力能分析,金属流动及变形分析、工具接触面上的压力分布,工艺参数及模具的优化设计、原始坯料尺寸及预成形工步尺寸的最佳选择,塑性加工缺陷分析、塑性变形温度场分析、摩擦磨损机理分析以及上限法在塑性加工C.A.S、C.A.D中的应用。

本书按上限法的应用编写,并引用一定数量典型实例,所涉及的范围有锻粗、冲孔、模锻、压痕、挤压、拉拔、板料成形及轧制等塑性加工工步,可供从事锻压、拉拔、挤压、轧制等各类塑性加工工艺的工程技术人员、科研人员及大专院校师生参考,也可作为大学高年级本科生和研究生选修课教材。

上限法在塑性加工工艺中的应用

林治平 编著

*

中国铁道出版社出版、发行

(北京市东单三条14号)

责任编辑 宋黎明 封面设计 刘景山

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本: 787×1092mm 1/32 印张: 19.5 字数: 486 千

1991年2月 第1版 第1次印刷

印数: 1—1100 册

ISBN 7-113-00896-8/TB·21 定价: 9.60元

前 言

近年来, 上限法的应用研究取得了很大进展, 出现了大量研究成果。上限法的应用范围几乎遍及塑性加工工艺的各个方面, 它已有可能帮助我们获得利用最小能量和材料保证最大充满型槽而不出现缺陷的塑性成形工艺方案。因此, 作者期望通过本书系统地介绍国内外学者在这一领域所取得的最新进展, 并结合实际工艺进行论述, 为塑性加工工艺和模具的优化设计提供理论依据, 使上限法能在生产实践中得到广泛应用和发展。

全书共分四章。第一章简述上限法的理论基础, 以便了解该法的理论依据及其与精确解的差别。第二章介绍上限法的五种主要解题方法及其应用范围, 以便根据具体条件灵活选用。第三章是本书的主要内容和重点, 分节介绍上限法在塑性加工工艺中应用的各个方面, 包括工步的力能分析、金属流动及变形分析、工具接触面上的压力分布、工艺参数与模具的优化设计、原始坯料尺寸及预成形工步尺寸的最佳选择、塑性加工缺陷分析、塑性变形温度场分析、摩擦磨损机理分析以及上限法在塑性加工计算机辅助模拟 (CAS)、计算机辅助设计 (CAD) 中的应用, 通过各种典型实例了解和掌握上限法分析塑性加工工艺的基本原理与方法。第四章是全书的小结, 讨论上限法应用的若干问题和上限法的特点与发展方向。

本书引用了大量国内外学者的论文和著作, 特别是H.Kudo教授、B.Avitzur教授和И.Я.Тарновский教授的著作, 作者在此表示衷心的感谢。

由于本书首次按应用归类编写, 加之作者学术水平有限, 书中缺点和错误在所难免, 欢迎读者批评指正。

作 者

1988年6月

目 录

绪 论	1
第一章 上限法的理论基础	3
§ 1.1 基本概念	3
1.1.1 密赛斯 (Mises) 材料	3
1.1.2 位移面、力面	4
1.1.3 运动学许可速度不连续面	4
1.1.4 运动学许可位移场、速度场	5
1.1.5 静力学许可应力场	5
1.1.6 变量 (Variable) 或参数 (Parameter)	5
§ 1.2 基本原理	6
1.2.1 功的平衡原理	6
1.2.2 虚功原理	7
1.2.3 变分极值原理	7
§ 1.3 精确解与上限解	11
1.3.1 精确解必须满足的条件	11
1.3.2 上限解对精确解必须满足条件的放松	18
§ 1.4 上限法解题步骤	18
1.4.1 上限法的解题步骤与应用	18
1.4.2 变形流动模式与运动学许可速度场的设计	19
1.4.3 运动学许可速度场的数学表达	22
1.4.4 塑性变形时功率消耗的计算	26
第二章 上限法主要解题方法的分类与应用原理	31
§ 2.1 整体上限分析法	31
2.1.1 在平行平板间镦粗圆柱体	31
2.1.2 在平行平板间镦粗板条	31
2.1.3 通过轴对称锥形模的正挤压	31
2.1.4 宽板坯挤过锥形收敛模	32
2.1.5 杯形件反挤压和轴对称复合挤压	32
2.1.6 形状简单的长轴类锻件的开式模锻	32
2.1.7 顶 镦	33
2.1.8 形状复杂零件的锻压	33
§ 2.2 基元技术	33
2.2.1 矩形基元技术	34
2.2.2 圆柱基元技术	37

2.2.3 矩形基元技术的进一步规范化	44
§ 2.3 上限元技术	49
2.3.1 矩形基元的速度场与功率计算	50
2.3.2 三角形基元的速度场与功率计算	57
2.3.3 上限元法应用举例	63
§ 2.4 变换法	66
2.4.1 坐标变换后的不连续速度场和速端图	66
2.4.2 消耗功率的计算	67
2.4.3 坐标变换法应用举例	69
§ 2.5 流函数法	73
2.5.1 流线与流函数概念	74
2.5.2 通过余弦曲线凹模平面变形正挤压过程分析	75
2.5.3 三维成形动可容速度场举例	77
第三章 上限法在塑性加工工艺中的应用	82
§ 3.1 塑性加工工步的力能分析	82
3.1.1 镦粗、拔长与压入	82
3.1.2 正挤压	94
3.1.3 轴对称复合挤压与管材拉拔	99
3.1.4 反挤压	104
3.1.5 积极摩擦反挤压	115
3.1.6 长轴类零件模锻	127
3.1.7 轴对称零件模锻	134
3.1.8 轧制与辊锻	142
§ 3.2 塑性加工时金属的流动与变形分析	146
3.2.1 圆环镦粗时金属流动的上限分析及其应用	146
3.2.2 环形件闭式模锻时金属流动的上限分析	155
3.2.3 环形件自由浮动凹模闭式模锻时金属流动的上限分析	163
3.2.4 锻造圆形盖板时金属流动的上限分析	168
3.2.5 锥形凹模挤压时流线与应变的计算	172
3.2.6 轧制的变形分析	180
§ 3.3 塑性加工时工具接触面上的压力分布	184
3.3.1 虚拟单元法的基本原理	184
3.3.2 镦粗时工具接触面上的压力分布	186
3.3.3 反挤时工具接触面上的压力分布	187
3.3.4 复合挤压时工具接触面上的压力分布	188
§ 3.4 塑性加工工艺参数及模具的优化设计	191
3.4.1 挤压和拉拔时工艺参数的优化	191
3.4.2 开式模锻工艺参数的优化	195
3.4.3 六角螺母闭式模锻时合理尺寸的确定	198

3.4.4	翻管时的最佳圆环面半径和管厚	200
3.4.5	深拉延成形模模具形状及尺寸的优化	201
3.4.6	由圆坯料挤压多边形截面工件时模具的优化设计	204
§ 3.5	锻件坯料形状与尺寸的优化	208
3.5.1	由锻件图绘制速端图反算坯料形状和尺寸	208
3.5.2	轴对称环形件开式模锻时坯料尺寸的确定	215
§ 3.6	塑性加工缺陷分析	221
3.6.1	条料锻造时发生中心开裂的可能性	221
3.6.2	反挤压(冲击挤压)缺陷分析	225
3.6.3	锥形收敛模挤压的缺陷分析	234
3.6.4	杯杆件复合挤压中心缩孔分析	237
§ 3.7	塑性变形温度分布的预测	242
3.7.1	平面变形时温度上升及分布的预测	243
3.7.2	轴对称挤压时的温度分布	246
§ 3.8	摩擦、磨损机理分析	249
3.8.1	摩擦机理分析	249
3.8.2	磨损机理分析	253
§ 3.9	上限法在塑性加工CAS、CAD中的应用	257
3.9.1	轴对称塑性变形的上限元法模拟	258
3.9.2	平面应变锻造过程载荷和流动的上限元法模拟	267
3.9.3	用上限元法建立模具CAD程序系统	271
3.9.4	上限法在挤压模CAD中的应用	273
第四章	上限法应用的若干问题	275
§ 4.1	解平面变形问题时三角形单元的划分	275
4.1.1	用单排三角形速度场求矩形断面长条料镦粗的上限解	275
4.1.2	对矩形断面长条料镦粗上限解的分析	277
4.1.3	单排速度场最小上限解与其它解法的比较	279
4.1.4	小结	280
§ 4.2	关于利用上限元法分析应变和应力的精确程度问题	281
4.2.1	利用矩形单元求解轴对称镦粗问题时的基本公式	281
4.2.2	在不同摩擦条件下镦粗圆柱体时的变形力和应变分布	283
4.2.3	由应变分布求应力分布	285
4.2.4	单元数对上限元解的影响	290
4.2.5	上限元法与整体上限分析法的比较	290
4.2.6	结果分析与结论	291
§ 4.3	关于速度场与解题方法	292
4.3.1	解各类问题时使用的运动学可能速度场	292
4.3.2	解题方法与速度场	295
§ 4.4	上限法与滑移线法的一致及其相互补充	296

4.4.1 解平面变形问题时上限法与滑移线法的一致	296
4.4.2 利用上限法与滑移线法的一致扩大两种解法的应用	297
4.4.3 小 结	300
§ 4.5 上限法应用小结	300
4.5.1 上限法特点	300
4.5.2 今后上限法应用研究的内容	301
参考文献	302

绪 论

上限法也称上限逼近法或上限分析法,它是一种利用变分极值原理分析塑性加工工步的近似解法。上限法属于极限分析法的一种,由于由它求出的塑性加工载荷总是大于或至少等于真实加工载荷,所以可确保实际工步操作的完成。另一种极限分析法是下限法,由它求出的塑性加工载荷总是小于或至多等于真实加工载荷,无法保证实际工步操作的需要,而且求解过程要比上限法难得多。因此,近年来国内外学者都更加重视上限法的研究与开发应用,并取得了重大进展。目前,上限法的应用范围与实际意义已远远超出对塑性加工力能的估算,上限法正在成为工程技术人员处理工艺问题的强有力的工具。

上限法的发展历史要追溯到1936年,当时苏联的Гвоздев А.А.首次建议利用上下限定理确定结构的承压能力。以后,从40年代末到50年代初,Марков А.А., Hill R., Prager W.及Hodge P.G.等人相继提出了一系列上下限极值原理,以及弹塑性和刚塑性材料的各种变分原理。但是,把这些原理应用于分析塑性加工问题,则是Hill R.和Green A.P.于1951年首先提出并应用于求解平面变形条件下拉拔和光滑平板间条料压缩的。以后,Торновский И.Я., Johnson W., Kudo H., Avitzur B., Kobayashi S., Степанский Л.Г.等人对上限法的发展作出了巨大贡献。其中,最有代表性的是:Johnson W.和Kudo H.于1962年首次利用由三角形刚性块组成的流动模式和速度场求解平面变形问题,使计算过程大大简化;Kudo H.于1958年提出了单位变形区技术,它不仅可用于求平面变形问题的上限解,而且也可用于求轴对称问题的上限解,Kudo的划分变形体为规范化基元的思想对上限法的进一步发展起巨大作用;1963年Торновский И.Я.等人提出用一般多项式或二度空间坐标的三角函数描述不均匀变形速度场,随后Avitzur B.提出球形速度场,Kobayashi S.使用曲边三角形速度场;1967年Lambert E.R.和Kobayashi S.首先利用流函数法确定平面变形和轴对称稳态问题的上限解,以后Nagpal V.和Altan T.利用二元流函数求三维成形问题的上限解;Avitzur B., Kobayashi S., Nagpal V., Altan T., Male A.T.和DePierre等人利用上限法分析了圆环镦粗,并制订了利用圆环镦粗法测定塑性变形摩擦和变形抗力的理论基础;Avitzur B.等人于1972年近似估算了坯料惯性力对工艺载荷的影响;Avitzur B. (1974年)、Thomason P.F. (1968年)及Austen A.R.

(1974年)等人把上限法应用于分析锻造和挤压的宏观裂纹机理;Johnson W., Tanner R.等人利用上限法确定变形体中的温度分布;McDermott R.P.和Bramley A.N.于1974年首次提出了上限元法;Johnson W.和Mamalis A.G. (1977年)作了利用最佳可能速度场确定应力的尝试;Kiuchi M.和Murata Y. (木内学、村田良美)于1980年提出用虚拟单元上限元法求接触面压力的分布。

在国内,近年来对上限法应用的研究也做了大量工作,例如:王祖唐利用上限法分析了不均匀镦粗和复合挤压;阮雪榆等人用上限法分析了不同类型的挤压;关廷栋等人对上限元法作了深入研究,并进行了开式模锻等工艺的变形模拟;罗子健用上限法分析成型凹模深拉伸;吴诗惇利用上限法分析复合挤压缺陷;程慈龄用流线速度场分析正挤多边形截面;李双

义对矩形基元技术进行了深入研究并提出了自己的见解；贺毓辛、张承鉴分别通过试验方法建立动可容速度场并导出了平面轧制和辊锻的上限解；作者除对上限法的应用范围等问题进行了研究外（见第四章），还用上限法分析了圆环镦粗时金属的流动、在活动凹模内挤压和模锻时的金属流动和变形力，并导出了矩形盒形件挤压力的上限解。

显然，上限法在60年代，特别是在70年代以后得到了迅速发展，这是因为：（1）上限法求解比较方便，只要设计出合理的、满足速度边界条件和不可压缩条件的运动学许可速度场就能求出变形力的上限解；（2）上限法所得的解虽然不是精确解，但也不是像有限元法和有限差分法所求出的那样的数值解，而是一种特殊的解析解，可用于直观地分析变形过程中各种因素之间的关系与作用；（3）上限法比有限元法和滑移线法等其它方法更容易求解，即使是上限元法，也比有限元法节省大量机时，而且可使用一般容量的微机；（4）上限法可用于求解和分析塑性加工工艺的多方面问题。

鉴于目前有关上限法的专著极少，而且主要按工艺过程进行论述，资料分散，不容易掌握方法的实质和要领，也不便于工程实际应用，因此本书对上限法的主要解题方法进行初步分类，并以工艺应用为线索，将国内外上限法研究成果归纳为塑性加工工步的力能分析、金属流动与变形分析、工艺参数（包括原始坯料尺寸及预成形工步尺寸）及模具的优化设计、工具接触面上的压力分布、塑性加工缺陷分析、塑性变形温度场分析、摩擦磨损机理分析以及上限法在塑性加工CAS、CAD中的应用等几个主要方面进行介绍，最后讨论上限法应用的若干问题，并对上限法的特点和研究方向作了简要小结。

第一章 上限法的理论基础

上限法属于能量法的范畴，其理论基础是功的平衡原理、虚功原理和变分极值原理。它在分析塑性加工问题时，用能量平衡方程代替力的平衡方程，因而不要求满足应力张量的平衡微分方程。同时，一般将真实材料近似为Mises材料，以便简化解题过程。由于上限法放松了精确解所必需满足的条件，所以它的解不是唯一的，许多种应力分布都能满足被放松了的条件，其中只有使上限值最低的那一个，才可能是真实解的近似值。

本章阐述上限法理论基础的主要方面，包括上限法原理中的基本概念、上限法所依据的基本原理以及上限解与精确解在要求满足力学条件方面的差别。有关塑性变形体的应力状态、应变状态、屈服准则及本构方程等塑性力学的基础理论知识，请参看文献〔1〕、〔13〕等有关著作。

§ 1.1 基本概念

1.1.1 密赛斯 (Mises) 材料

真实金属材料的性质通常是不均匀的、各向异性的，而且塑性变形时首先发生弹性变形，然后才开始塑性变形，并伴随有加工硬化发生。对于这样的真实材料，要想用数学形式精确表达其原始性质及其在塑性变形过程中所发生的性质变化和应力应变关系变化，则是相当困难，甚至不可能的。因此，在上限法中一般采用了材料的简化模式——Mises材料。

Mises材料对真实材料的简化表现在以下几方面：

1. Mises材料是连续均匀的、各向同性的，在塑性变形时忽略了弹性变形和应变硬化，是一种理想的刚塑性材料。这种材料一旦开始变形流动，将在定载荷下无限地流动下去，其应力应变曲线如图1—1所示。

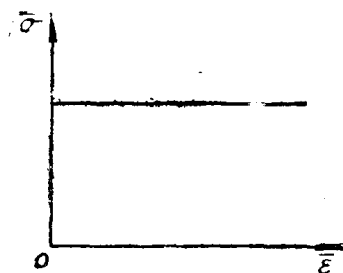


图1—1 理想刚塑性材料的应力应变曲线

2. Mises材料是一种速度不敏感材料，服从以应变速度表达的列维-密赛斯 (Levy-Mises) 流动方程 (详见本章第三节)，即：

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \sigma'_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (1-1)$$

式中 $\dot{\epsilon}_{ij}$ —— 应变速率，
 $\dot{\epsilon}$ —— 等效应变速率，
 $\bar{\sigma}$ —— 等效应力，

σ'_{ij} ——应力偏张量。

所以, Mises 材料的偏应力分量与应变速率的关系是这样的, 如果所有应变速率分量按比例发生变化, 偏应力分量将保持不变。

3. 服从 Mises 屈服准则, 即当变形体内的等效应力 $\bar{\sigma}$ 达到某定值时, 材料即行屈服, 该定值与应力状态无关。

1.1.2 位移面、力面

设体积为 V 、表面积为 S 的刚塑性体在表面力 T_i 的作用下发生塑性变形, 其某瞬间的变形和受力情况如图 1—2 所示, 则表面积可划分为 ab 、 cd 和 bc 、 ad 两部分。 ab 、 cd 面为材料与锻压工具的接触表面, 这些面上的位移 u_i 或位移速度 $\dot{u}_i$ 是由工艺要求或锻压工具给定的, 是已知的, 而需要施加多大表面力 T_i (或产生多大内应力 σ_{ij}) 则是未知的。这样的表面称为位移面, 用符号 S_u 表示。 ad 面为表面力 T_i 等于零的自由表面, bc 面为外加一个已知拉力 T_i 的表面, 这些面上的作用力是给定的, 已知的, 而变形时的位移 u_i 或位移速度 $\dot{u}_i$ 则是未知的, 需要确定的。这样的表面称为力面, 用符号 S_T 表示。

因此, S_u 面是已知位移 (u_i 、 du_i)、位移速度 ($\dot{u}_i$) 而未知表面力 (T_i) 的表面; S_T 面是已知表面力 (T_i) 而未知位移 (u_i 、 du_i)、位移速度 ($\dot{u}_i$) 的表面。用上限法解题的目的之一, 就是确定 S_u 面上的平均压力或单位变形力。

1.1.3 运动学许可速度不连续面

在不均匀变形条件下 (例如当图 1—2 中 ab 和 dc 面上存在摩擦剪应力时), 变形体内各部分质点的流动速度差别很大, 这时可用一些假想的 (虚拟的) 面 (例如 aob 和 doc 锥面) 把变形体分割成若干部分, 在各部分内部, 质点速度的变化是连续的 (或不变的), 而由一个部分进入另一个部分时, 质点速度在所假想的分割面上发生突变 (跳跃性变化), 如图 1—3 所示, 由 I 区的 u_1 变为 II 区的 u_2 。但是, 这种突变应当不破坏变形体连续性, 即 u_1 和 u_2 在垂直于分界线方向 (法向) 的速度分量相等 ($u_{1n} = u_{2n}$)。这种切向速度发生跳跃性变化的面, 称为运动学许可的速度不连续面, 通常用符号 S_D^* 表示, 其迹线称为速度不连续线。沿不连续面切线方向的速度差 Δu_D^* (在图 1—3 中 $\Delta u_D^* = u_{1n} - u_{2n} = |u_{1n}| + |u_{2n}|$) 称为速度不连续量。

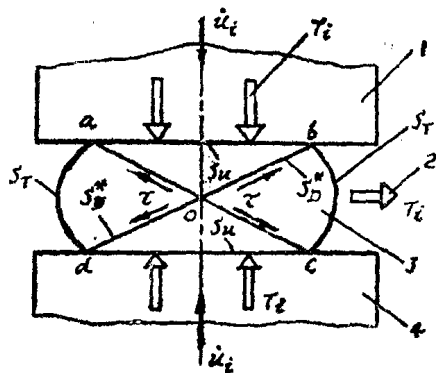


图 1—2 塑性成形时的位移 (或速度) 和应力边界条件示意图

1——可动工具; 2——外加单位力; 3——坯料;
4——固定工具。

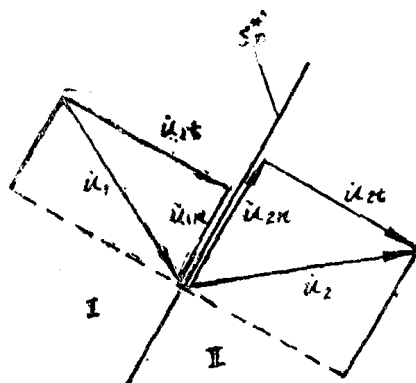


图 1—3 速度不连续面 ($u_{1t} = u_{2t}$, $u_{1n} \neq u_{2n}$)

1.1.4 运动学许可位移场、速度场

为了确定位移面 S_u 上的变形力,可先虚拟一个位移场或速度场,只要求它满足以下条件:

1. 符合位移面上位移或速度的边界条件,即在 S_u 面上 $du_i^* = du_i$ 或 $\dot{u}_i^* = \dot{u}_i$ (*号表示虚拟);
2. 保持体积不变条件,即 $\epsilon_{ii} = 0$ 或 $\dot{\epsilon}_{ii} = 0$;
3. 塑性流动时保持变形体的连续性,不发生重叠和开裂,即速度越过不连续线时与该线垂直的分量保持不变。

至于与所虚拟位移场或速度场相应的虚应力、虚表面力是否能满足静力学平衡条件则不加要求,这样的虚位移场或虚速度场称为运动学许可的位移场或速度场,通常用符号 u_i^* ($\dot{u}_i^*$), u_i^* 表示 (在本书许多实例中将*号省略)。

塑性加工时,真实的位移场必定是运动学可能的,而运动学可能的位移场则不一定是真实的 (因为不满足静力学条件),因此利用它计算出的变形力也不是真实的,通常大于真实变形力。

1.1.5 静力学许可应力场

为了确定 S_u 面上的变形力,也可先虚拟一个应力场 (或表面力场),只要求它满足以下条件:

1. 符合力面上力的边界条件,即在 S_T 面上 $T_i^* = T_i$;
2. 符合微分平衡方程,即

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (1-2)$$

3. 在塑性变形区内不违背塑性条件。

至于与所虚拟的应力场相对应的虚位移、虚应变是否能满足体积不变条件和变形连续条件则不加要求,这样的虚应力场,称为静力学许可的应力场,通常用 σ_{ij}^* 表示。

塑性变形时,真实的应力场必定是静力学可能的,而静力学可能的应力场则不一定是真实的 (因为不满足运动学条件),因此利用它计算出的变形力也不是真实的,通常小于真实变形力。

1.1.6 变量 (Variable) 或参数 (Parameter)

在上限法计算中,进入公式的变量或参数可区分为以下几类:

1. 独立变量 (Independent Variable)

独立变量是指原始给定的、已知的变量,它是由工艺尺寸、模具尺寸以及给定的边界条件等决定的。例如,圆柱体镦粗时圆柱坯料的原始直径和原始高度,棒料挤压时的挤压比以及金属与加工工具接触表面上的摩擦系数等,都是独立变量。

2. 伪独立变量 (Pseudoindependent Variable)

伪独立变量是指待定的,由非独立变量最小化确定的变量。由于它开始时先作为独立变量处理,尔后经最小化原理处理变成了非独立变量,所以称之为伪的或假的独立变量。例如,在有接触摩擦条件下镦粗圆柱体时其侧表面的鼓形程度、圆棒料挤压时冲头下的塑性变

形区高度以及通过最小化方法确定的模具尺寸等都属于伪独立变量。

3. 非独立变量 (Dependent Variable)

非独立变量是指由独立变量和伪独立变量确定的变量,例如要求计算单位变形力时,单位变形力就是非独立变量。

4. 半独立变量 (Semi-Independent Parameter)

文献〔13〕在分析棒料挤压出现裂纹的位置时,把中心裂纹与凹模出口间的距离称为半独立变量。实质上,它也是一种伪独立变量。

§ 1.2 基本原理

1.2.1 功的平衡原理

功的平衡原理是指塑性变形时,外力沿其位移方向所作的功 W_e 等于内力所作的功 W_i ,即

$$W_e = W_i \quad (1-3)$$

塑性变形时外力所作的功,在数值上等于作用力 P 所作的功 W_p 和接触摩擦剪应力 τ 所消耗的功 W_r 的代数和,即

$$W_e = W_p - W_r \quad (1-4)$$

当外力以作用于变形体微面积 ds 上的单位面力 T_i 表示,位移以 u_i 表示时,外力所作的功可写成:

$$W_e = \int_s T_i u_i ds \quad (1-5)$$

内力所作的功也就是塑性变形时应力 σ_{ij} 所作的功,如图1-4所示。当不考虑弹性变形时,即设变形体为刚塑性体时,微元体 dv 消耗的塑性变形功 $d w^p$,就是图中矩形 $BCOD$ 所包围的面积乘以 dv ,即 $d w^p = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv$ 。因此,内力在整个体积内所作的功为:

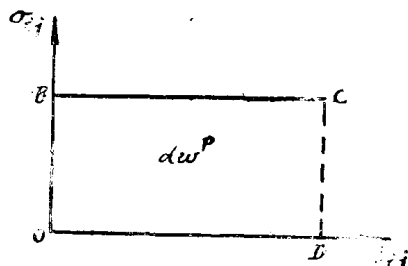


图1-4 理想刚塑性体的变形功

$$W_i = \int_v d w^p = \int_v \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (1-6)$$

将式(1-5)、(1-6)代入式(1-3),得

$$\int_s T_i u_i ds = \int_v \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (1-7)$$

公式(1-7)就是塑性变形时功的平衡方程,又称基本能量方程。对于复杂加载条件下的大变形,应该用增量和速率表示。这样,公式(1-7)可改写成:

$$\int_s T_i du_i ds = \int_v \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dv \quad (1-8)$$

或

$$\int_s T_i \dot{u}_i ds = \int_v \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dv \quad (1-9)$$

式中 du_i 、 $\dot{u}_i$ ——位移增量和位移速率;
 $d\varepsilon_{ij}$ 、 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ ——应变增量和应变速率。

1.2.2 虚功原理

塑性变形时的虚功原理是虚位移原理在塑性变形理论中的应用。该原理可叙述如下：

“若对载荷系作用下处于平衡的变形体给一微小虚变形，则外力所做的虚功等于内力所做的虚功”。显然，虚功原理也就是塑性体虚变形时的功的平衡原理，基本能量方程式(1—7)完全适用于虚功原理。因此，虚功原理可写成以下表达式：

$$\int_s T_i du_i^* ds = \int_v \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^* dv \quad (1-10)$$

$$\int_s T_i^* du_i ds = \int_v \sigma_{ij}^* d\epsilon_{ij} dv \quad (1-11)$$

$$\int_s T_i^* du_i^* ds = \int_v \sigma_{ij}^* d\epsilon_{ij}^* dv \quad (1-12)$$

式中带有星号的表示虚拟的数值。在本书的许多部分，为了简化起见，往往把星号省略。

1.2.3 变分极值原理

变分问题是研究泛函在某一函数类中的极值问题。在利用上限法求解塑性加工工艺问题时，变形功是位移的函数，而位移又是坐标的函数，所以变形功是位移的泛函。为了确定塑性变形体的应力、应变、变形力及变形体外形尺寸等参数，在塑性理论中应用以下两个变分极值原理：

1. 最大塑性功（散逸功）原理

塑性变形的重要特点是不可逆性，塑性变形某瞬间所消耗的功增量，除了一部分以弹性应变能增量形式贮存在变形体内部之外，塑性应变能增量将全部消耗掉，所以塑性功又称散逸功或消耗功。

最大塑性功原理可叙述如下：“一个完全刚塑性体发生塑性变形时，实际消耗的塑性功增量，大于产生相同塑性应变增量 $d\epsilon_{ij}$ ，并与真实应力状态 σ_{ij} 在同一屈服轨迹的另一假想应力状态 σ_{ij}^* 所做的塑性功增量”或“塑性变形时，真实应力 σ_{ij} 所做的功具有最大值”或“实际消耗的功最大”。其表达式为

$$\int_v (\sigma'_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\epsilon_{ij} dv \geq 0 \quad (1-13)$$

式中 σ'_{ij} 、 $d\epsilon_{ij}$ ——与真实表面力和给定位移相对应的偏应力和应变增量；

σ_{ij}^* ——任意静力学许可的偏应力。

现在按以下步骤证明上述最大塑性功原理：

(1) 根据增量理论，应变增量 $d\epsilon_{ij}$ 主轴与应力主轴重合，所以主应变增量和主应力一样，可以表示为主轴空间的一个矢量。

(2) 根据体积不变条件，三个主应变增量之和应等于零，即 $d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3 = 0$ ，该方程与 π 平面方程相同。另外，按Mises方程有 $d\epsilon_{ij} = \sigma'_{ij} d\lambda$ ，即应变增量的指向与应力偏量的指向重合。所以，代表体积不变条件的平面与 π 平面重合，矢量 $d\epsilon_{ij}$ 一定在 π 平面上。

(3) 如图1—5所示，应力矢量 $\overrightarrow{OP}_0$ 在 π 平面上的投影为 $\overrightarrow{OP}$ ，则 OP 即代表应力偏量 σ'_{ij} 。因为应变增量 $d\epsilon_{ij}(\overrightarrow{OQ})$ 在 π 平面上，并与 $\sigma_{ij}(\overrightarrow{OP})$ 同方向，所以可把它的起点 O 沿着该方向移至 $\overrightarrow{OP}$ 的端点 P 上，变成矢量 $\overrightarrow{PQ'}$ ，如图1—5(b)所示。这样，文献〔1〕第一章所述的单位体积塑性功增量（真实应力的单位塑性功增量）就是矢量 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{PQ'}$ 的数

量积, 即:

$$dw = \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ'} = |OP| |PQ'| \cos \alpha = |OP| \cdot |PQ'| \quad (1-13a)$$

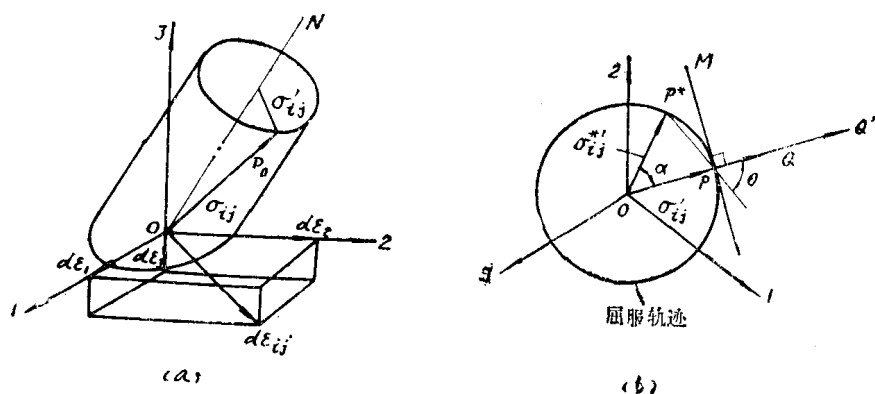


图 1-5 主轴空间 (a) 及 π 平面 (b) 上的应力、应变矢量

(4) 设有另一静力学许可的应力状态 σ^*_{ij} , 其偏量 σ'^*_{ij} 与 σ'_{ij} 在同一屈服轨迹上, 并可使微元体产生相同的塑性应变增量 $d\epsilon_{ij}$, 则其单位塑性功增量 (假想应力的单位塑性功增量) 为

$$dw^* = \sigma^*_{ij} d\epsilon_{ij} = \overrightarrow{OP^*} \cdot \overrightarrow{PQ} \quad (1-13b)$$

(5) 为了证明真实应力所做的功最大, 将公式 (1-13a) 减去公式 (1-13b), 得

$$\begin{aligned} dw - dw^* &= (\sigma'_{ij} - \sigma^*_{ij}) d\epsilon_{ij} = (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP^*}) \cdot \overrightarrow{PQ} \\ &= \overrightarrow{P^*P} \cdot \overrightarrow{PQ} = |P^*P| \cdot |PQ| \cos \theta \end{aligned} \quad (1-13c)$$

由于屈服轨迹是凸的曲线 (图 1-5), P^* 点一定在 P 点处屈服轨迹切线 PM 的左边, 且 $PQ \perp PM$, 所以 $\theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta \geq 0$, 故

$$dw - dw^* = (\sigma'_{ij} - \sigma^*_{ij}) d\epsilon_{ij} \geq 0 \quad (1-13d)$$

将上式对整个体积积分, 即得最大塑性功原理表达式:

$$dW - dW^* = \int_V (\sigma'_{ij} - \sigma^*_{ij}) d\epsilon_{ij} dv \geq 0 \quad (1-14)$$

式中 dW, dW^* ——真实应力和假想应力的塑性功增量。

由图 1-5 及公式 (1-13d) 可以看出, 最大塑性功原理还可表述为: 对于一定的应变增量场而言, 在所有符合屈服准则的应力场中, 与该应变增量场成正比例关系的真实应力场 (或称符合 Mises 应力应变关系的真实应力场) 所作的功最大。在理论分析问题, 也可找到一个与假想应力场 σ^*_{ij} 相应的、符合 Mises 应力应变关系的假想应变增量场 $d\epsilon^*_{ij}$ 。由图 1-5 (b) 可知, 这种假想应力场和假想应变增量场所作的功也是最大的, 即

$$\int_V (\sigma^*_{ij} - \sigma'_{ij}) d\epsilon^*_{ij} dv \geq 0 \quad (1-15)$$

因此, 最大塑性功原理的一般表达方式是: 对于一定的应变增量场 (不管是真实的还是虚设的) 来说, 在所有符合塑性条件的应力场中 (不管是真实的还是虚设的), 与该应变增量场符合 Mises 应力应变关系的应力场所作的塑性功最大。

由最大塑性功原理可推出两个重要定理:

1) 下限定理

塑性变形时在变形体内往往存在有运动学许可的速度 (或位移增量) 不连续面 S_D^* , 位于该面两侧的材料在剪应力作用下 (塑性变形时 $\tau = k$) 发生相动滑动。若滑动速度为 $\dot{u}_D^*$, 则需要增加的消耗功增量为

$$\sum \int_{S_D^*} k \dot{u}_D^* dS_D^*$$

这时, 基本能量方程式 (1—7)、(1—8)、(1—9) 应写成:

$$\int_S T_i u_i ds = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv + \sum \int_{S_D^*} k u_D^* ds_D^* \quad (1-16)$$

$$\int_S T_i du_i ds = \int_V \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dv + \sum \int_{S_D^*} k du_D^* ds_D^* \quad (1-17)$$

$$\int_S T_i \dot{u}_i ds = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dv + \sum \int_{S_D^*} k \dot{u}_D^* ds_D^* \quad (1-18)$$

下限定理是指: “在 S_n 面上与任何假想的静力学许可应力场 σ_{ij}^* 相应的表面力 T_i^* 所作的功增量, 总是小于至多等于真实表面力 T_i 所作的功增量”。

根据基本能量方程和虚功原理, 并考虑到球张量 σ_m 不作功, 可得

$$\begin{aligned} \int_S T_i du_i ds &= \int_{S_u} T_i du_i ds_u + \int_{S_T} T_i du_i ds_T \\ &= \int_V \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dv = \int_V \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij} dv \end{aligned} \quad (1-19a)$$

$$\begin{aligned} \int_S T_i^* du_i ds &= \int_{S_u} T_i^* du_i ds_u + \int_{S_T} T_i^* du_i ds_T \\ &= \int_V \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij} dv = \int_V \sigma'_{ij}^* d\varepsilon_{ij} dv \end{aligned} \quad (1-19b)$$

因为 S_T 面上的应力或表面力是给定的, 所以该面上任何假想的应力增量都只能等于真实的应力增量, 即 $T_{ij}^* = T_{ij}$, 所以

$$\int_{S_T} T_i du_i ds_T = \int_{S_T} T_i^* du_i ds_T \quad (1-19c)$$

将式 (a) 减式 (b), 得

$$\int_{S_u} T_i du_i ds_u - \int_{S_u} T_i^* du_i ds_u = \int_V (\sigma'_{ij} - \sigma'_{ij}^*) d\varepsilon_{ij} dv \quad (1-19d)$$

由最大塑性功原理公式 (1—14) 可知, 上式右边必大于或等于零, 故得下限定理的表达式:

$$\int_{S_u} T_i du_i ds_u \geq \int_{S_u} T_i^* du_i ds_u \quad (1-19e)$$

下限定理公式 (1—19e) 表明, 由 S_u 面上 T_i^* 所确定的载荷 P^* , 总是小于或等于由真实表面力 T_i 所确定的载荷 P (即真实载荷)。由于 σ_{ij}^* 可以有多个, 故相应的 T_i^* 和 P^* 也有多个。如果能找出所有静力学许可的应力场及与其相应的载荷 P^* , 则其中最大的一个 P^* , 就是真实载荷。但是, 由于实际情况很复杂, 不可能考察尽所有的静力学许可应力场, 因此一般只能得到真实载荷的下限值。

2) 上限定理

上限定理是指: “在 S_u 面上与任何假想的运动学许可位移增量场 du_i^* 相应的表面力 T_i^* 所