上海研究生教育用书

谱方法的数值分析

向新民 编著

科学出版社

谱方法的数值分析

向新民 编著

科学出版社

2000

内 容 简 介

谱方法是70年代发展起来的一种数值求解偏微分方程的方法，它具有“无穷阶”收敛性，可采用快速算法，现已被广泛用于气象、物理、力学等诸多领域，成为继差分法和有限元法之后又一种重要的数值方法.

本书包括谱方法和正交多项式、投影算子和插值算子逼近、谱方法的稳定性和收敛性理论、某些线性和非线性方程的谱方法以及近些年来的某些新进展. 它可以作为计算数学、应用数学及有关专业的研究生、高年级本科生的教材，也可以作为物理、力学、气象、海洋等专业的工程技术人员的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

谱方法的数值分析/向新民编著.-北京:科学出版社,2000.4

ISBN 7-03-008031-9

Ⅰ.谱… Ⅱ.向… Ⅲ.谱(数学)-应用-偏微分方程-数值计算
Ⅳ.O241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第65959号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717

新蕾印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

2000年4月第 一 版 开本: 850×1168 1/32
2000年4月第一次印刷 印张: 10 5/8
印数: 1-2 000 字数: 275 000

定价: 21.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

前　言

谱方法是一种既古老又新兴的求解偏微分方程的数值方法. 早在 1820 年，Navier 就运用双重三角级数求解弹性薄板问题. 但是，长期以来，由于它计算量大而一直没有被广泛使用，直到 1965 年快速 Fourier 变换的出现，才给谱方法带来了生机. 近三十多年来，谱方法得到了蓬勃的发展，不仅广泛地运用于物理、力学、大气、海洋等领域的数值计算，而且它的数值分析理论也不断地完善. 至今，谱方法已和有限差分法、有限元法一起成为偏微分方程数值求解的第三种基本方法.

谱方法起源于 Ritz-Galerkin 方法，它是以正交多项式（三角多项式、Chebyshev 多项式、Legendre 多项式等，它们分别是正则和奇异 Sturm-Liouville 问题的谱函数）作为基函数的 Galerkin 方法、Tau 方法或配置法. 它们分别称为谱方法、Tau 方法或拟谱方法（配点法），统称为谱方法.

谱方法的最大魅力是它具有所谓“无穷阶”收敛性，即如果原方程的解无穷光滑，那么用适当的谱方法所求得的近似解将以 N^{-1}的任意幂次速度收敛于精确解，这里 N 为所选取的基函数个数. 这一优点是有限差分法和有限元法无法比拟的，众多的实际应用和数值实例也证实了该方法的有效性. 因此，谱方法日益受到人们的重视.

目前，国内外专门介绍谱方法思想及其理论的书籍甚少，为此，作者在总结前一段教学和科研成果的基础上撰写了本书，以供有兴趣的读者学习、参考.

全书共分为六章. 第一章预备知识，主要介绍后面各章要用到的泛函分析方面的基础内容、快速 Fourier 变换基本方法和某

些不等式. 在第二章中，首先通过实际例子介绍谱方法的主要思想，然后讨论作为正则和奇异的 Sturm-Liouville 问题谱函数的各类正交多项式系. 它们是运用谱方法的基本工具. 全书的主要部分是第三章和第四章. 在第三章中对各种不同的正交多项式系导出了各类投影算子和插值算子，并给出了在这些投影和插值运算下的误差估计，这为以后实际应用提供了理论基础. 第四章主要给出将谱方法运用于各种线性定常和非定常问题的一般框架，对 Galerkin 方法、Tau 方法、配点法分别导出了稳定性、收敛性和误差估计的一般结果，并列举了大量应用实例. 作为谱方法的进一步应用，在第五章中以某些重要的线性和非线性方程为例，更深入地讨论如何运用谱方法进行数值分析，这些方程包括二维涡度方程、KdV 方程、二维抛物型方程、广义 BBM 方程、变系数二阶椭圆方程和定常 Burgers 方程等，鉴于 Chebyshev 谱方法带有弱奇性的权，它给数值分析带来不小的困难，因而把讨论的重点放在了这一方法上. 在第六章，介绍近年来谱方法在某些方面的新进展，包括如何用 Gegenbauer 多项式来重构 Fourier 展开的部分和，借此来克服用 Fourier 展开的部分和逼近时所出现的 Gibbs 现象并恢复指数精度；用区域分解技巧来缓解谱方法对区域要求过严的限制. 另外近些年来，由于无限维动力系统的发展提出了非线性 Galerkin 方法和大时间误差估计问题，对这些问题如何运用谱方法也通过实际例子作了简要介绍. 在这一章的最后，针对发展方程通常在时间方向采用差分方法，导致总体误差经常受到时间方向离散误差的制约这一弱点，介绍了时空方向的谱逼近，采用这一方法可以大大提高整体逼近精度. 另外在每一章的最后还列出了有关文献，供读者参考使用.

由于作者学识水平所限，在选材、论证等方面均难免有不当之处，甚至出现错误，恳请读者不吝赐教.

本书作者曾于 1993～1995 年间获得过国家自然科学基金资助与原工作单位——黑龙江大学的同事们一起开展过谱方法数值分析方面的研究. 这次在本书的撰写过程中，又得到了上海市学

位办研究生教育基金和上海师范大学出版基金的资助. 借此机会，作者对国家自然科学基金委、上海市学位办、上海师范大学以及黑龙江大学的领导和同事们所给予的关心和支持表示最衷心的感谢.

作　者

1998 年岁末

此书由

上海市研究生教育专项经费资助

目　录

第一章　预备知识

根据谱方法研究的需要，这一章将简要介绍 Hilbert 空间、Banach 空间初步结果和 Sobolev 空间的某些内容，主要是嵌入定理和迹定理；在§1.4 还将介绍谱方法计算中常用的快速 Fourier 变换（FFT）；在最后一节介绍在以后讨论需要的 Gronwall 不等式和 Hardy 型不等式.

§1.1　Hilbert 空间和 Banach 空间初步

1.1.1　基本概念

定义 1.1　设 E 是一个非空集合，如果对 E 中任意一对元素 x,y，都有一个实数 $\rho(x,y)$ 与之对应，而且满足如下条件：

1°　$\rho(x,y)\geqslant 0$，且 $\rho(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$，

$$\tag{1.1.1}$$

2°　成立三角不等式：

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z),\quad\forall\, x,y,z\in E,\tag{1.1.2}$$

那末称 $\rho(x,y)$ 是两点 x,y 之间的距离，而称 E 按距离 $\rho(x,y)$ 成为一度量空间或距离空间.

若在 E 中定义了距离，那么极限点、收敛性、开集、闭集等一系列重要概念也可随即引进.

例 1.1　在 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中，对于

$$x=(x_1,\cdots,x_n),\quad y=(y_1,\cdots,y_n),$$

规定距离

$$\rho(x,y)=\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\Big)^{1/2},$$

则 $\mathbf{R}^n$ 即构成一个距离空间.

例 1.2 设 $C[a,b]$为$[a,b]$上所有连续函数全体,定义

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|,$$

不难验证 $\rho(x,y)$为 $C[a,b]$中的距离,而 $C[a,b]$本身在这样定义的距离下构成距离空间.

距离概念的引进实际上在 E 中赋于了一种拓扑结构,下面进一步对集合赋于代数结构,使之成为赋范空间.首先给出

定义 1.2 设 K 是复数(或实数)域,H 是某些元素组成的集合.对 H 中的元素定义"加法"运算,即对 $\forall x,y\in H$,使 $x+y\in H$,且满足

1° $x+y=y+x$(交换律), (1.1.3)

2° $(x+y)+z=x+(y+z)$(结合律), $\forall z\in H$, (1.1.4)

3° H 中存在元素θ(称为零元素),使得

$$\theta+x=x,\quad \forall x\in H, \tag{1.1.5}$$

4° $\forall x\in H$,存在$-x\in H$(称为负元素),使得

$$x+(-x)=\theta, \tag{1.1.6}$$

此外,对 H 中的元素还引进"数乘"运算,它满足

5° $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x,\quad \forall \alpha,\beta\in K,\forall x\in H,$ (1.1.7)

6° $1\cdot x=x,\quad \forall x\in H,$ (1.1.8)

7° $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,\quad \forall\alpha,\beta\in K,\forall x\in H$(分配律),
(1.1.9)

8° $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$, $\forall\alpha\in K,\forall x,y\in H$(乘法分配律), (1.1.10)

则称 H 是一复(或实)线性空间或向量空间.

利用$(-1)y=-y,x-y=x+(-y)$可定义 H 中的"减法"运算,它是加法运算的逆运算.由此不难建立线性相关、线性无关、子空间、维数、同构等概念.

定义 1.3 设 H 为复(实)线性空间,如果对 H 中的每一个元素 x,按某种规则对应一非负实数 $\|x\|$,且满足下列条件:

1° $\|x\|\geqslant 0$, $\|x\|=0$ 的充要条件是 $x=\theta$(H 中的零元素), (1.1.11)

2° $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$, $\forall \alpha\in K, \forall x\in H$, (1.1.12)

3° $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$, $\forall x, y\in H$(三角不等式), (1.1.13)

则称 H 为一线性赋范空间,称 $\|x\|$ 为元素 x 的范数或模.

如果对任意 $x, y\in H$,令 $\rho(x,y)=\|x-y\|$,则 H 也构成一距离空间,因而赋范空间可以看作为一个特殊的距离空间.

设 H 为一距离空间,M、$E\subset H$,若对于 E 中任意点 x 的任意邻域均含有 M 中的点,则称 M 在 E 中稠密.如果 H 中的任一基本序列都有极限,且极限点属于 H,则称 H 是完备空间(完全空间).完备的线性赋范空间称为 Banach 空间.

范数概念可以看成是 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中距离概念的推广.

例 1.3 ($L^p(\Omega)$空间) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为一有界区域,记在 Ω 上 Lebesgue 可测,且 $\int_\Omega |f(x)|^p dx<+\infty$ 的函数 $f(x)$ 全体为 $L^p(\Omega)$,其中 $1\leqslant p<+\infty$,若令

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

可以验证 $L^p(\Omega)$ 是一个 Banach 空间.如果 $p=+\infty$,则定义

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)}=\|f\|_\infty=\inf_{m(\Omega_0)=0}\left(\sup_{\Omega-\Omega_0}|f(x)|\right)$$

$$=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)|.$$

同样可以证明,在这样定义的范数下,$L^\infty(\Omega)$ 也构成一个 Banach 空间,称它为本性有界函数空间,相应的函数称为本性有界函数.

例 1.4 例 1.2 中的 $c[a,b]$,若定义 $\|f\|_c=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$,不难证明它也构成一 Banach 空间.

在欧氏空间中除了上述范数特征之外,还有两个向量内积这一重要特征,由它可导出向量间的夹角和正交性,这一概念也可推广到一般的抽象空间.

定义 1.4 设 H 为复(实)线性空间.若对于 $\forall x, y\in H$,恰有

一复(实)数(x,y)与之对应,且满足

1° $(x,x)\geqslant 0,\quad \forall x\in H, (x,x)=0$ 的充要条件是 $x=\theta$, (1.1.14)

2° $(x+y,z)=(x,z)+(y,z),\quad \forall x,y,z\in H,$ (1.1.15)

3° $(\alpha x,y)=\alpha(x,y),\quad \forall \alpha\in K,\ \forall x,y\in H,$ (1.1.16)

4° $(x,y)=\overline{(y,x)},$ (1.1.17)

则称(x,y)为 x 与 y 的内积,而称 H 为内积空间.

在实内积空间中,可以定义 x 的范数和 x 与 y 之间的夹角为

$$\| x \| = (x,x)^{1/2},\quad \theta = \arccos\frac{(x,y)}{\| x \| \| y \|},$$

不难验证这样定义的范数满足赋范空间的定义,所以也构成一个线性赋范空间.称完备的内积空间为 Hilbert 空间.

例 1.5 作为有限维欧几里得空间的推广,考察复数序列 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$,使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < +\infty,$$

这种序列的全体记为 l^2. 对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$ 和 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)$,定义加法和数乘

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \cdots, \xi_n + \eta_n, \cdots),$$
$$\alpha x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \cdots, \alpha\xi_n, \cdots),$$

并定义 x 和 y 的内积为

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta}_i,$$

不难证明,l^2 为一 Hilbert 空间.更一般地,如果$\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$满足

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty,\quad p \geqslant 1,$$

对它定义范数

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p},$$

则可证明这样的数列全体构成一 Banach 空间,记为 l^p. 在证明过

程中需用到如下 Hölder 和 Minkowski 不等式：

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i\eta_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q\right)^{1/q}, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i+\eta_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p\right)^{1/p}.$$

它们的积分形式为

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_\Omega |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q},$$

$$\left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_\Omega |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

值得注意的是并不是任意内积空间都是完备的，但对它可以加入某些新元素使之成为一个 Hilbert 空间，这即是下面

定理 1.1 任何内积空间 H 均可添加某些新元素而成为一个 Hilbert 空间$\overline{H}$，且使 H 为$\overline{H}$的稠密线性子集.

此定理证明见文献[1]，这里从略.

1.1.2 投影定理

下面来介绍 Hilbert 空间中的一个重要定理——投影定理. 设 H 为一 Hilbert 空间，集合 $K\subset H$，如果对 $\forall x_1, x_2\in K$，它们的联线 $tx_1+(1-t)x_2\in K(0\leqslant t\leqslant 1)$，则称 K 为 H 中的凸集.

定理 1.2 设 K 为 H 中的闭凸集，$x_0\in H$，则必有 $y\in K$，使得

$$\| x_0 - y \| = \inf_{z\in K} \| x_0 - z \|.$$

证明 令 $d=\inf\limits_{z\in K}\| x_0 - z \|$，显然有极小化序列$\{z_j\}$，使得

$$\lim_{j\to\infty} \| x_0 - z_j \| = d.$$

现证$\{z_j\}$是基本列. 事实上，由于 K 为 H 中的凸集，故$\frac{1}{2}(z_n+z_m)\in K$，于是

$$\| 2x_0 - z_n - z_m \| \geqslant 2d.$$

由平行四边形公式

$$\| x+y \|^2+\| x-y \|^2=2(\| x \|^2+\| y \|^2)$$

知

$$\begin{aligned}\| z_n-z_m \|^2 &= \|(z_n-x_0)-(z_m-x_0)\|^2 \\ &= 2(\| z_n-x_0 \|^2+\| z_m-x_0 \|^2)-\|(z_n-x_0)+(z_m-x_0)\|^2 \\ &\leqslant 2(\| z_n-x_0 \|^2+\| z_m-x_0 \|^2)-4d^2\to 0,(n,m\to\infty),\end{aligned}$$

所以$\{z_j\}$是基本序列.由于 K 是闭的,故必有 $y\in K$,使得$\lim\limits_{j\to\infty} z_j=y$,因而$\| x_0-y \|=\inf\limits_{z\in K}\| x_0-z \|$,定理证毕.

设 M 是H 的闭线性子空间,定义

$$M^{\perp}=\{y\in H \mid (y,x)=0,\forall x\in M\},$$

称 $M^{\perp}$为 M 的直交补.不难证明 $M^{\perp}$也是 H 的闭子空间,而且$M\cap M^{\perp}=\{\theta\}$.

定理 1.3(直交分解定理) 设 M 是H 的闭子空间,则对每个$x\in H$ 可唯一表示为

$$x=y+z, \tag{1.1.18}$$

其中 $y\in M,z\in M^{\perp}$.

证明 若 $x\in M$,则取 $y=x,z=\theta$.现设 $x\overline{\in} M$,由定理 1.2知,必有 $y\in M$,使

$$\| x-y \| = \inf_{w\in M}\| x-w \|.$$

对任意 $h\in M$ 和实参数λ,定义函数

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= \| x-y+\lambda h \|^2 \\ &= \| x-y \|^2+2\lambda \mathrm{Re}(x-y,h)+\lambda^2\| h \|^2,\end{aligned}$$

它于 $\lambda=0$ 处取极小,因而 $\varphi'(0)=0$,即

$$\mathrm{Re}(x-y,h)=0,\forall h\in M.$$

设$(x-y,h)=re^{i\theta}(r\geqslant 0)$,以 $e^{i\theta}h$ 代替上式中的h,则得

$$|(x-y,h)|=r=\mathrm{Re}(x-y,e^{i\theta}h)=0,$$

这表明$(x-y)\in M^{\perp}$.若令 $z=x-y$ 即得定理的表达式.

最后证明这分解是唯一的.若还有另外的分解 y',z',使

$$x=y+z=y'+z',$$

其中 $y,y'\in M,z,z'\in M^{\perp}$,则 $y-y'=z'-z\in M\cap M^{\perp}=\{\theta\}$,因而有 $y=y',z=z'$.定理证毕.

从上述证明可知:若$(y,z)=0$,则 $\|x\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2$.通常令 $y=Px$,称 y 为x 在M 上的正交投影,而称 P 为正交投影算子,显然 $\|Px\|\leqslant\|x\|$.

1.1.3 Riesz 表现定理

称定义在 H 上取值在数域K 上的映照$f(x)$为泛函;若$\forall x,y\in H$ 和$\forall\alpha,\beta\in K$,有

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y),\qquad(1.1.19)$$

则称 $f(x)$为 H 上的线性泛函.对线性泛函恒有 $f(\theta)=0$.若对任意$\{x_n\}\subset H$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in H$,总有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$,则称 $f(x)$是 H 上的连续线性泛函.

容易证明,若线性泛函在一点连续必处处连续.

设 $f(x)$是 H 上的线性泛函,若存在常数 M,使$\forall x\in H$,有

$$|f(x)|\leqslant M\|x\|,\qquad(1.1.20)$$

则称 $f(x)$为 H 上的有界线性泛函,而且定义

$$\|f\|=\sup_{\substack{x\in H\\x\neq0}}\frac{|f(x)|}{\|x\|}=\sup_{\|x\|\leqslant1}|f(x)|\qquad(1.1.21)$$

为泛函 $f(x)$的范数.

命题 1.1 线性泛函 $f(x)$连续的充要条件是它有界.

证明 设 $f(x)$有界,则从

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x-x_0)|\leqslant M\|x-x_0\|$$

可知 $f(x)$连续.反之,若 $f(x)$连续但非有界,则存在 x_n,使得$|f(x_n)|\geqslant n\|x_n\|$,$n=1,2,\cdots$.令 $z_n=x_n/n\|x_n\|$,那么一方面有 $z_n\to\theta$,另一方面

$$|f(z_n)|=\left|f\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right)\right|\geqslant1,当\ n\to\infty,$$

这和连续性矛盾.

定义 1.5 用 H'表示H 上所有有界线性泛函全体,称之为 H