高等教育机械类自学考试教材

高等数学

上册

陆庆乐　马知恩　编

西安交通大学出版社
光明日报出版社

高等教育机械类自学考试教材

高　等　数　学

（上　册）

西安交通大学自学教材编写组

陆庆乐　马知恩　编

西安交通大学出版社

光明日报出版社

内 容 简 介

本书是根据1980年颁布的高等工业学校216学时高等数学教学大纲的要求编写的自学考试教材。

全书分上、下两册出版。上册内容为一元函数微积分学（包括函数、极限、连续，导数与微分，导数应用，定积分与不定积分，积分应用）；下册内容有向量代数、空间解析几何、多元函数微积分学、微分方程与级数。

本书叙述详细，说理透彻，例题较多，并配有大量习题。每章末都有“小结与学习建议”，便于自学。

本书供在职的中专或高中毕业生有志于自修机械类专业并希望获取大学本科毕业证书的读者使用，也可以作为一般工科院校、师范院校、电视大学、职工大学、函授大学等的教材或教学参考书。

高 等 数 学（上册）

西安交通大学自学教材编写组
陆庆乐 马知恩 编
西安交通大学出版社
光明日报出版社 联合出版
西安交通大学出版社印刷厂印装
陕西省新华书店发行·各地新华书店经售

开本：787×1092 1/16 印张：18.875 字数：468千字
1984年6月第一版 1984年6月第一次印刷
印数：1—20,000
统一书号：13340·005 定价：2.16元

高等教育机械类自学考试教材

序　言

《中华人民共和国宪法》中明确规定国家鼓励自学成才。为此，教育部制订了一项崭新的高等教育自学考试制度，它为有志学习而没有机会进大学的人开辟了广阔的学习途径，也为造就和选拔社会主义现代化建设的合格人才开辟了广阔的途径。

一九八三年，教育部决定成立全国高等教育自学考试指导委员会机械类专业委员会，机械类专业的自学考试工作即将在全国广泛展开。为此，首先需要有一套适合于自学的教材。这套高等教育机械类自学考试教材，就是适应这个需要而编写的，它适合于机械类专业自学使用。作为第一步，我们先编出《高等数学》《物理学》《普通化学》《理论力学》四门课的教材，其他课程的自学考试教材也将陆续组织编写和出版。

本丛书各本教材的内容都按照高等学校机械类专业的教学大纲编写，同时根据这套教材的性质，努力在便于自学方面下功夫。和目前高等学校使用的教材相比，它除了有必要的指导自学的内容之外，基本概念的阐述更为细致、说明更为详尽，例题数量较多，还编入了丰富的复习思考题和作业。

这套教材中各本书的编者，我们都约请有较高学术水平并长期从事该课程教学，有丰富实践经验的同志担任。希望它的出版对广大有志于在机械类专业方面自学和深造的同志能有一定的帮助，祝愿这些同志循序渐进、锲而不舍，早日掌握先进的科学知识，为社会主义现代化建设作出更大的贡献。

全国高等教育机械类自学考试指导委员会主任

史　维　祥

一九八四年六月

编　者　的　话

本书是根据高等学校工科数学教材编审委员会审订，1980年颁布的216学时高等数学教学大纲的要求编写的．在编写过程中，我们考虑到自学考试的特点，结合多年来在教学中的经验和体会，从以下几个方面进行了一些努力．

1．叙述比较详细，语言力求确切，文字通俗易懂．

2．对概念的引出，注意了阐明它们的实际背景，着重于概念的实质的揭示．

3．对一些重要定理的证明，注意了推证思路的阐述，并尽量设法结合几何直观，使读者易于接受．

4．书中例题较多，注意了对解题方法的训练，及时指出在解题中一些在概念上与运算上易犯的错误．

5．在每节后配有搞清概念的思考题与帮助掌握基本方法的运算题，在每章末还配有一些比较深入而带有综合性的总习题，对其中较难的习题适当予以提示．此外，每章还备有一份考试题，以供自我检查学习效果之用，全部习题都有答案．

6．每章末附有“小结与学习建议”，其中除了对内容的小结外，还指出了该章的基本内容与基本要求、重点与难点以及对学习本章的指导．在前言中对学习方法作了一般性的介绍．

7．注意了联系实际，特别是结合机械专业的特点，举了一些有关机械方面的例子．

本书分上、下两册出版，上册内容为一元函数微积分学，下册内容有向量代数、空间解析几何、多元函数微积分学、微分方程与级数．

本书力图做到熔教材、习题集、自学指导书三者于一炉，但限于时间与编者的能力，一定还存在不少缺点与错误，诚恳希望读者提出批评与指正．

编　　者

前　　言

（一）　课程的性质与任务

高等数学在高等工科院校的教学计划中是一门重要的基础理论课．它是为培养适应四个现代化需要的高级工程技术人才服务的．通过这门课程的学习要使读者系统地获得一元函数与多元函数的微积分、空间解析几何与向量代数、常微分方程与无穷级数的基本知识，必要的基础理论和常用的运算方法．在学习过程中，读者应注意培养自己具有比较熟练的运算能力、抽象思维能力、逻辑推理能力、几何直观和空间想象能力，从而使自己得到数学分析方法和运用这些方法解决几何、力学和物理等实际问题的初步训练，为学习后继课程和进一步扩大数学知识奠定必要的数学基础．

（二）　课程的内容

按照高等数学教学大纲的内容，本教材共分五篇十八章．

第一篇　一元函数的微积分学（共七章）

第一章　函数概念　　　　第二章　极限概念．连续函数
第三章　导数与微分　　　第四章　导数的应用
第五章　定积分　　　　　第六章　不定积分与积分法
第七章　定积分的应用

第二篇　向量代数与空间解析几何（共两章）

第八章　向量代数　　　　第九章　空间解析几何

第三篇　多元函数的微积分学（共四章）

第十章　偏导数与全微分　　第十一章　偏导数的应用
第十二章　重积分与它的应用　　第十三章　线积分与面积分

第四篇　常微分方程（共两章）

第十四章　一阶微分方程　　第十五章　高阶微分方程

第五篇　无穷级数（共三章）

第十六章　常数项级数　　第十七章　函数项级数与幂级数
第十八章　傅里叶级数

（三）　学时分配建议

学习总时数（包括作习题时间）为 600 学时．各章学习时数分配如下：

章	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
学时	20	46	66	48	24	48	24	28	30	36	22	40	40	26	32	20	30	20

（四）　学习方法建议

本教材在每章的各节之后均配有习题，其中包括帮助深入理解概念的思考题与掌握方法的基本运算题．在章末配备了一些带有综合性的复习题．习题中带有星号“＊”的题，如果时

间不允许，可以不做。章末的习题供学有余力的读者选作，其他习题应力争全作。

每章都附有"自我检查题"，用以检查经过自学是否已经掌握了该章的主要内容，具有阶段测验性质。要在认真学完该章以后，在对该章进行了阶段性全面复习的基础上，再做这些题目，要求在规定的时间内，盖上书本(闭卷)独立完成。

各种习题，教材中都有答案。

在每章结束时，教材都写有"小结与学习建议"，其中除了对内容的小结外，还指出了该章的基本内容与基本要求，和学习该章时应注意的问题。

以下就如何阅读教材与作习题等问题，提一些建议，供读者参考。

1）在阅读教材正文之前，先翻阅一下各章"小结与学习建议"中的基本内容与基本要求，以便在阅读教材时能心中有数，避免平均使用力量。阅读教材时，要逐段细读，集中精力吃透内容，并逐个解决疑难问题。对基本概念必须正确理解，对基本理论必须彻底弄清，对基本方法必须完全掌握。一般说来，在未达到上述要求以前，不宜学习新的内容。但如果有个别不阻碍学习新内容的细节问题，一时还不能解决，那就暂时把它放下，不要因此而止步不前，可以继续往下阅读。有些问题，往往在你往下学习到与之有关的内容时，因受启发而就能得到解决。

在自学过程中，既要动脑思考问题，也要动手演算问题。因此要随时准备好纸与笔把教材中的定理证明、公式推导、例题计算等再重演一遍，把教材中简化了的或未写出的计算部分加以补足。这样，可以加深和巩固对定理、公式的印象，也有利于了解推理与计算中的关键所在，训练作题的能力。教材中的例题是经过挑选的。所以在重演过程中还要注意解题的思想方法，解题的条理性和书写格式。如能坚持不懈，对解题能力的培养必将产生良好的效果。

每个定理是由条件与结论两部分构成的。定理的条件在证明结论的过程中是必须用到的。因此在学习时要注意在证明的那些地方用到了这些条件。应用定理解题时，必须要求定理中的条件得到满足。不顾条件，任意滥用定理，必然会导致错误的结果。教材中有的定理，在本课程的要求范围内不能严格证明的，我们就不加证明。有些比较简单的证明，作为习题由读者自己来完成。但不论证或不证，对教材所有定理的涵义都应理解透彻，并能灵活运用。

2）在做习题前，必须先理解教材内容，切勿认为会做题就理解了教材内容。解题时，要做到心中步步有根据，即要能够说出用到的定理、公式、结论等。有些关键性或不易看清的地方则要把理由、所用公式等指明。书写要求清楚、整洁。每题必须演算出最后结果。一题可以做多种解法，并加以比较。解题切忌先看答题。要在得出结果后再对答案。如果结果与教材中的答案不符，应再作检查，弄清是解题中的错误，还是只是形式上的不同。

3）在仔细阅读和钻研教材的同时，建议做好学习笔记，可记下定义、定理、公式、方法、重要例题的要点、定理和公式证明的主要步骤与关键以及学习的心得体会与阅读参考书的札记等。笔记要记得层次清晰，条理清楚，以便日后查阅。

以上是我们对学习本课程所介绍的一些学习方法，仅供读者参考。学习方法因人而异，方法也多种多样，希望读者在学习过程中，根据自己的具体情况，逐步摸索出一套适合于自己的学习方法，不断提高自己的自学能力。

目　　录

第六章　不定积分与积分法

第七章　定积分的应用

附　录

第一篇　一元函数的微积分学

第一章　函数概念

函数是数学的最重要的基本概念之一，是现实世界中量与量之间的依赖关系在数学中的反映。在微积分学中，函数是主要的研究对象。在这一章中，我们将在中学已有知识的基础上阐明一元函数的一般定义，总结中学数学里已经讲过的一些函数，并介绍一些关于函数的简单性态。

1-1 一元函数的定义　自然界的现象无一不在变化之中。我们在观察某种自然现象或生产过程时，总可以看到某些量在不断地起着变化，而且在这些量与量之间还往往存在着一定的联系。举例来说，在真空中的自由落体，如果由静止状态开始下降，所经过的路程 s①就不断发生变化，并且与时间 t 有着如下的关系：

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

其中 g 是重力加速度。又如决定气体状态的三个物理量——体积 V、压强 p、绝对温度 T——一般总是在变化着的，而且就质量为 1 摩尔的理想气体而论有如下的等式：

$$pV=RT \tag{2}$$

其中 R 是一个常数。又如当一个动点在以原点为中心、ρ 为半径的圆周上以均匀角速度 ω 转动时，动点的坐标 x 与 y 不断发生变化，并与时间 t 有着这样的依从关系

$$x=\rho\cos\omega t,\quad y=\rho\sin\omega t$$

类似的例子在自然现象中是不胜枚举的。

自然科学所要研究的不仅是某一刹那的现象，而更其重要的是在整个变化过程中研究有那些东西在变化，它们之间的变化规律是怎样的。因此，作为自然科学与工程技术的有效工具的数学，就必须在这方面有一种概括的、抽象的表达方法。

当我们在研究某一现象的过程时，所遇到的许多不同的量中，有些是在过程中取一定的数值保持不变的量，这种量称为**常量**。有些是在过程中取得不同值的量，这种量称为**变量**。另外，还有一种量，它在所研究的过程中变化极为微小，而这种变化对研究的影响又微不足道，为了使研究过程简单起见，我们常把它作为常量来处理。

变量的变化范围称为**变域**。最常用的变域是介于两个实数，比如说，a 与 b 之间的一切实数。在数轴上表出，这就是由 a 至 b 的线段。如果以 x 记变量，我们把这个线段，或在这线段上的一切实数叫做变量 x 的**区间**；a 与 b 称为区间的**端点**，而在 $a<b$ 时 a 称为**左端点**，b **右端点**。

① 直线运动中的位移，在本书中都称作路程。

区间是否包括端点要看所研究的问题而定．按照包括或不包括端点在内，区间可以区分为：

1)**闭区间**，两个端点都包括在内，记作$a\leqslant x\leqslant b$或$[a, b]$；

2)**开区间**，两个端点都不包括在内，记作$a<x<b$或(a, b)；

3)**半开区间**，只包括一个端点在内，记作$a\leqslant x<b$或$[a, b)$，及$a<x\leqslant b$或$(a, b]$(图1.1)。

在图(1.1)中，区间的端点包括在内时，把端点描成实点，不包括在内时，把端点描成空点．

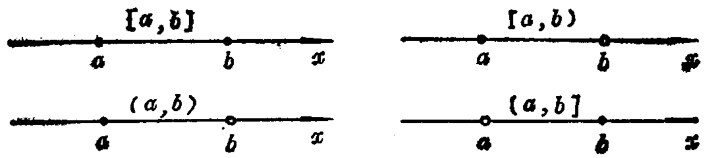


图 1.1

除了这些**有限区间**，还有各种**无限区间**：

4)小于(不大于)c的一切实数，记作$-\infty<x<c$或$(-\infty,c)$($-\infty<x\leqslant c$或$(-\infty,c]$)；

5)大于(不小于)c的一切实数，记作$c<x<+\infty$或$(c,+\infty)$($c\leqslant x<+\infty$或$[c,+\infty)$)；

6)一切实数，记作$-\infty<x<+\infty$或$(-\infty, +\infty)$．

这样，对于每一个变量说来，总有它的一定的变域，这是跟该变量不可分割的．我们还将看到，区间的开闭也往往跟所要证明的结论有重大关系．为简便起见，此后在不需要区别以上所说的各种情况时，我们就把某一区间简单记作I。

在变量概念的基础上我们就可以进一步来阐明什么是函数了．

函数的定义 如果当一个变量x在给定的某一个变域中取任意一个值时，另一个变量y就依某一确定法则有一个或几个值，与x的这个值相对应，那末变量y称为变量x的函数，记作

$$y=f(x) \tag{3}$$

其中x叫做**自变量**，函数y也叫做**因变量**；自变量x的这个变域叫做函数的**定义域**，而当变域是一个区间时叫做**定义区间**；因变量y所对应的数值范围叫做函数的**值域**(图1.2)。y与x之间的这种依赖关系叫做**函数关系**．

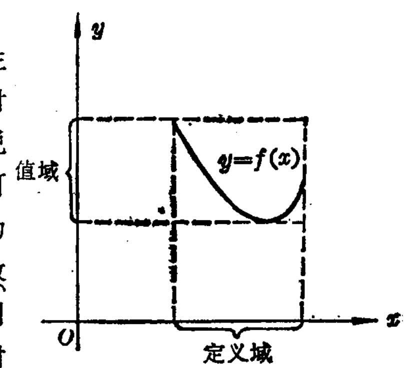


图 1.2

根据这个定义，要使一个因变量y与一个自变量x发生函数关系，必须而且只须有某一确定法则，当x每取一值时y总有一个或几个值与之对应．至于这个对应法则跟它的说明方式究竟是怎样的，定义对此并无要求．这样，我们才可能把自然现象中量与量之间的错综复杂的变化关系概括成为数学的函数关系加以一般的研究．所以这种对应法则是函数定义中的一个重要因素．在函数的记号(3)中，我们就是用$f(\ )$来一般地表示这种对应法则；但是如果我们要同时讨论几个不同的函数，就得用不同的字母，如$g(\ )$，$\varphi(\ )$，$F(\ )$等等来表示它们不同的对应法则．举例来说，圆的面积A及周长C都是半径ρ的函数，这里$\rho\geqslant 0$．但这些是不同的函数，即有着不同的对应法则．因此，可分别记成：

$$A=f(\rho)=\pi\rho^2,\quad C=g(\rho)=2\pi\rho$$

当$\rho=1$时，则有

$$A=f(1)=\pi, \quad C=g(1)=2\pi$$

这里，$f(1)$与$g(1)$就分别表示函数A与C在$\rho=1$时所取得的**函数值**．由此可知，在自变量取定某一值后，相应的函数值就完全由其对应法则所确定．再举一个例子，设

$$f(x)=1+x+x^2$$

便有

$$f(m)=1+m+m^2$$

及

$$f(x+h)=1+(x+h)+(x+h)^2$$

除了所说的对应法则外，在上述定义中还明确规定，自变量x的取值限于它的变域，即限于函数的定义域．因此，定义域是函数定义中的另一个重要因素．我们在提出一个函数时应该指明它的定义域．以后如果讲到一个函数而不写出定义域时，就规定它的定义域是使函数有确定值的实数的全体．举例来说，函数

$$y=mx+b$$

显然有定义区间$(-\infty, +\infty)$；函数$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是闭区间$[-1, 1]$；而函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是开区间$(-1, 1)$．又如，$y=a$，其中$a$是一个常量，也可以看作是$x$的函数，因为不论$x$取任何值，$y$总有对应的值（就是常数$a$），可知是完全符合函数定义的，它的定义区间是$(-\infty, +\infty)$．

在实际问题中，函数的定义域还往往要受到具体条件限制．举例来说，函数

$$y=Cx^2$$

的定义域原是无限区间$(-\infty+\infty)$．但是如果取$C=\pi$，y与x分别表示圆的面积与半径，那末这函数就是圆的面积公式，在$x<0$时不再有实际意义．于是函数的定义域就变为区间$[0,+\infty)$了．又如果取$C=\frac{1}{2}g$，y与x分别表示真空中自由落体所经过的路程s与时间t，那末，这函数就是前面的公式(1)，它的定义区间应该是$[0, T]$，其中T落体着地的时刻．

综上所说，可见函数的对应法则与定义域是函数定义中的两个要素．这是我们在学习函数概念时所必须注意的．所以，只要给定了定义域与对应法则，我们就认为函数就给定了．如果两个函数的定义域和对应法则都一样，我们就说这两个函数**相等**或**相同**．例如，$f(x)=1+\sin x$与$g(t)=1+\sin t$，它们的定义域都是$(-\infty, +\infty)$，对应法则也相同：$f(\ \ )=1+\sin(\ \ )=g(\ \ )$，所以是两个相同的函数．但是$y=x$与$y=\sqrt{x^2}$，虽然它们的定义域都是$(-\infty, +\infty)$，然而后者当$x<0$时的对应法则却是$y=-x$，两者是不同的，所以它们是两个不同的函数．如果就区间$[0,+\infty)$来说，它们是相同的函数．有时两个函数的对应法则表面上看来是不同的，其实是一样的．例如，$y=\sin^2 x+\cos^2 x$与$y=1$，因为$\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$．

总之，如果两个函数有相同的定义域而且对定义域中的每一个值都对应着相同的函数值，那末这两个函数是相等的或相同的．

单值与多值函数 如果对应于定义域的任何一个x值，函数$y=f(x)$仅有一个确定的值，那末这函数称为**单值函数**；如果函数$y=f(x)$有二个以上确定值，那末称为**多值函数**．例如，$y=mx+b$是一个单值函数，而函数$y=\pm\sqrt{\rho^2-x^2}$则是多(双)值函数．

为了讨论的方便起见，我们总设法避免函数的多值性．在一定条件下，多值函数可以分裂为若干**单值支**．例如，双值函数$y=\pm\sqrt{\rho^2-x^2}$就可以分成两个单值支：一支是不小于零

的 $y=+\sqrt{\rho^2-x^2}$，另一支是不大于零的 $y=-\sqrt{\rho^2-x^2}$．我们知道方程 $x^2+y^2=\rho^2$ 的图形是中心在原点、半径为 ρ 的圆周．这同时也就是双值函数 $y=\pm\sqrt{\rho^2-x^2}$ 的图形；两个单值支就相当于把整个圆周分为上下两个半圆周．所以只要把各个单值支弄清楚，由各支合起来的多值函数也就了如指掌．此后，如果没有特别说明，我们所讨论的都限于单值函数．

一元与多元函数 上述函数的定义只提出了因变量 y 与一个自变量 x 之间的关系．但是自然界中的变化关系并不是那样简单地只限于两个变量的，自变量的数目往往不止一个．举例来说，把理想气体的气态方程(2)写成

$$p=\frac{RT}{V}$$

那末 p 就是含有两个自变量 T 与 V 的函数．

我们把只含有一个自变量的函数叫做**一元函数**，含有两个以上自变量的函数叫做**多元函数**．多元函数的记号也跟一元函数的相类似．例如，

$$u=f(x,\ y,\ z)$$

就表示一个含有三个自变量 x、y、z 的函数 u，其中 $f(\quad)$ 同样表示函数的对应法则，而各自变量的取值也有一定的范围．

任何理论的发展总是由简而繁的；关于一元函数的讨论往往可以推广到多元函数中去．因此，在这一篇中我们只致力于有关一元函数的问题；要到下一篇才再详细推论到多元函数．

习　　题　1—1

1．把下列各不等式表示的变域用区间的记号来表示，并在数轴上画出这些变域：

(1) $-3\leqslant x\leqslant 1$； (2) $-3\leqslant x<1$； (3) $-3<x<1$；

(4) $|x|\leqslant 1$； (5) $|x|>2$； (6) $-1\leqslant x<+\infty$．

2．用绝对值不等式来表示下列各区间：

(1) $(-1,\ 1)$； (2) $(-2,\ 4)$； (3) $(1,\ 4)$； (4) $(-\delta,\ \delta)$；

(5) $(x_0-\delta, x_0+\delta)$； (6) $(x_0-\delta, x_0)$ 及 $(x_0, x_0+\delta)$［用一个绝对值不等式表示］．

3．设 $P(x,\ y)$ 是已知曲线 L 上的动点，A 是 L 上的定点，问：

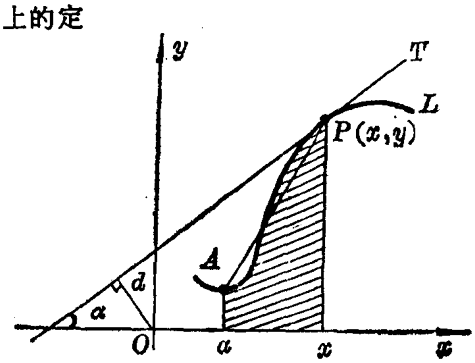
1) 图中阴影部分的面积是不是 x 的函数？

2) 弧长 $\overset{\frown}{AP}$ 是不是 x 的函数？

3) 切线 PT 的倾角 α 是不是 x 的函数？

4) 割线 AP 的斜率是不是 x 的函数？

5) 从原点 0 到切线的距离 d 是不是 x 的函数？



（第 3 题）

4．计算下列各函数(或函数式)在各指定点处的值：

(1) 设 $f(x)=x^2-3x+7$，求 $f(x+h)$；$f(x+\Delta x)-f(x)$，这里 Δx 表示一个数．

(2) 设 $f(x)=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+x^2}}\right)$，$a>0$，求 $f(a/2)$；$f(2a)$．

5. 设 $f(x)=|x|/x$, $g(x)=\begin{cases}1, & x<10\\ 5, & x>10,\end{cases}$ 证明 $g(x)=3+2f(x-10)$

6. 下列各对函数中哪些相同？哪些不同？为什么？

(1) $\sqrt[3]{x}$ 与 $\sqrt[6]{x^2}$；　(2) $\dfrac{x^5+1}{x^5+1}$ 与 1；　(3) $1+2x$ 与 $1+2y$；

(4) $2x^3+2$, $x\neq 1$ 与 $(4x^6+8x^3+4)/(2x^3+2)$；

(5) $\sqrt{x-1}/\sqrt{x-2}$ 与 $\sqrt{(x-1)/(x-2)}$.

*7. 指出下列方程中哪些表示函数关系？哪些不是函数关系？为什么？

(1) $x^2+y+1=0$；　(2) $x^2+y^2+1=0$；　(3) $y=2$.

1-2 函数的表示法　因为函数的对应法则是多种多样的，所以把这些法则具体地表示出来，对于函数的讨论就具有重要的实际意义。通常用以表达函数的方法有解析法、图示法及列表法三种。现在让我们分别加以讨论。

1)**解析法**　如果把两个变量之间的函数关系直接用公式或解析式表出，我们说这是函数的解析表示法。在函数的解析表达式中，除了各种代数运算外，还可以包含有我们在中学数学里早已熟知的函数（如三角函数、对数函数等）及符号（如阶乘 $n!$ 等）。这里是一些简单的例子：

$$y=\frac{1+x+x^2}{\lg x},\quad s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t,\quad y=\sqrt{1+\sin x}$$

有时一个函数要用几个式子来表达。

例 1　设有温度为 -10℃ 的一克冰，经加热后变为 $+10$℃ 的水，求它所吸收的热量 Q 与温度 T 之间的函数关系。

［**解**］　由中学物理我们已知冰的溶解热是 80 卡/克，比热是 0.5 卡/克·度，而水的比热是 1 卡/克·度。因为在 -10℃ 时 $Q=0$。于是当温度 T 从 -10℃ 到 0℃ 的变化过程中，一克冰所吸收的热量 Q 与 T 的关系是

$$Q=0.5[T-(-10)]=0.5T+5$$

当 $T=0$℃ 时，冰开始溶解；等到吸足 80 卡的热量，才全部化成一克水。因此，当所吸收的热量从 5 卡增加到 85 卡时，温度始终保持在 0℃，在完全溶解成水后，温度 T 又继续上升，Q 与 T 之间的关系变为

$$Q=T+85$$

所以在 T 从 -10℃ 到 $+10$℃ 的整个变化过程中，由解析式表出，所吸收的热量 Q 是温度 T 的这样一个函数：

$$Q=\begin{cases}0.5T+5, & -10\leqslant T<0\\ T+85, & 0<T\leqslant 10\end{cases}$$

当 $T=0$ 时，Q 可取从 5 到 85 之间的任何值。

上述函数，在两个不同的区间内，对应法则由两个不同的式子表出，这样的函数称为**分段函数**，分段函数在工程技术中是经常遇到的。

应当注意：不要因为分段函数在不同的区间内由不同的式子来表达而误认它为几个函数。对分段函数来说，不论分段的多少它总是一个函数；在计算分段函数的函数值时，必须要从自变量值所在区间的表达式中去计算。

例 2 设有分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0\leqslant x<1\\ x, & 1\leqslant x<2\\ x^2-6x+\frac{19}{2}, & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

试求：(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$，(2) $f(1)$，(3) $f(3)$，(4) $f(4)$的值。

［**解**］ (1)因为$x=\frac{1}{2}$属于区间$0\leqslant x<1$，所以$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}x\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$；(2)$x=1$属于区间$1\leqslant x<2$，所以$f(1)=x|_{x=1}=1$；(3)$x=3$属于区间$2\leqslant x\leqslant 4$，所以$f(3)=x^2-6x+\frac{19}{2}\Big|_{x=3}=9-18+\frac{19}{2}=\frac{1}{2}$；(4)$x=4$属于区间$2\leqslant x\leqslant 4$，所以$f(4)=1\frac{1}{2}$。

解析法是最重要的一种函数表示法，因为一个函数，如果能够由解析式表出，就最便于研究。我们在微积分学中所要涉及的函数绝大多数都是由解析式表出的。

2)**图示法** 把自变量x与因变量y当作直角坐标平面内点的坐标，y与x之间的某一函数关系就可以由这平面内的曲线表出。这就是函数的图示法，在自然科学与工程技术中是屡见不鲜的。例如，自动记录温度计与气压计等就是利用曲线来表示温度、气压等与时间的函数关系。又如，由实验可知物体与物体之间的摩擦系数μ与物体运动的速度v有关。当物体静止时，μ较大；开始运动后，μ将减小；而当v不太大时，μ往往保持定值；但当v过大时，μ又将随v的增大而增大。其间的函数关系有如图1.3。

图 1.3

函数的图示使变量之间的函数关系具有明显的直观性，这是图示法的最大优点。因此，今后我们虽然着重在用解析的方法研讨由解析式表出的函数，但是还往往把这些函数用图形来表示，以便直观地了解其变化过程。

例1与例2中的函数图形分别如图1.4与1.5所示。

我们也应当知道，并不是任何函数都能够图示的。著名的**狄里希莱**① 函数：

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

就是一个例子。

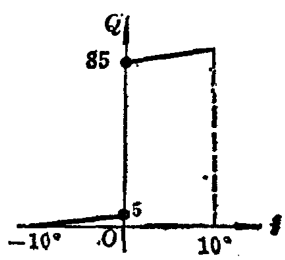


图 1.4

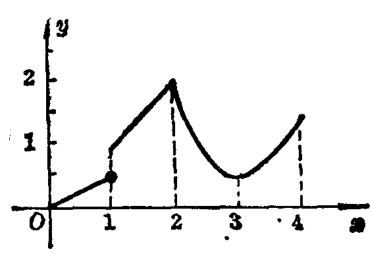


图 1.5

3)**列表法** 把自变量与因变量的一些对应值用表格列出，就是函数的列表法。由测量所得到的函数关系往往只能列表，下面是一台发电机启动后1小时内转速的记录：

① 狄里希莱(Peter G. Leieune Dirichlet, (1805—1859)，德国数学家。

t (分)	1	2	3	4	…	60
n (转/分)	2011	2981	2998	3001	…	3002

这张表格反映出转速n与时间t的函数关系．当自变量t在从1到60的自然数内取值时，因变量n有唯一的值与之对应，从这些n的值可以看出电机的运行是否稳定．

另一方面，为了实际需要，很久以来，就已经把一些常用的函数制成详明的表，以备查用．例如，三角函数表、对数表等都是大家所熟知的．列表法的缺点在于不便对函数进行理论的研究，而且不能查出函数的任意值．虽然这样，但一般说来象三角函数表、对数表等查阅起来还是比较方便的．

综上所述，可见函数的这三种表示法各有其实际来源与用途．对于函数的研究，三种方法也各有短长．在微积分学中，我们以解析法表出的函数为主，再辅以图示法，而列表法就用得很少了．

除上述三种函数的表示法以外，有的函数还可以用话来说明．例如，在科学技术中经常使用的**整函数**就是这样一种函数，它的涵义是：因变量y是不超过自变量x的最大整数．显然，x取定后，y的对应值就唯一确定．例如，当$x=7.56$时，$y=7$；$x=-2.75$，$y=-3$；$x=\pi$，$y=3$等等．这种函数通常记作

$$y=[x]$$

整函数有时也叫"取整函数"，它的图形如图1.6所示．

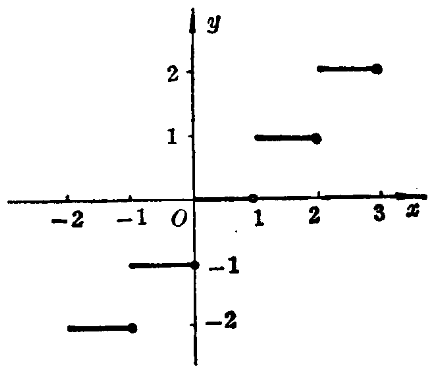


图 1.6

习　题　1—2

1．指出下列各函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{5-2x}+\dfrac{1}{x}$；　(2) $y=\sqrt{1-|x|}$；　(3) $y=\dfrac{1}{x^2-x}$；

(4) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$；　(5) $y=\lg x+\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$；　(6) $y=[x]$．

2．已知

$$f(x)=\begin{cases} x, & -4\leqslant x<0 \\ 2, & 0\leqslant x<2 \\ 4-x, & 2\leqslant x\leqslant 4 \end{cases}$$

作出这函数的图形，并求$f(-2)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(3.95)$的值．

3．**符号函数** $\operatorname{sgn}(x)$①定义为

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

① 读作"赛英"，与正弦函数符号"sin"的读音相同．