现代数学丛书

# 无限维空间上测度和积分论

（上册）

夏道行 著

上海科学技术出版社

现代数学丛书

# 无限维空间上测度和积分论

（上　册）

——抽象调和分析——

夏　道　行　著

上海科学技术出版社

现代数学丛书

无限维空間上測度和积分論

（上　册）

——抽象調和分析——

夏　道　行　著

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷四厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32　印張 12 14/32　排版字数 306,000

1965 年 4 月第 1 版　1965 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—4,500（其中精装本 200 册）

統一书号 13119·644　定价（科六）1.90 元

## 內 容 提 要

本书是現代数学丛书中的一种，系統地总結了作者和国內外数学家在无限維空間上测度和积分論研究中所得到的結果，部分尙属初次发表．全书分上、下两册，上册包括六章：測度論的某些补充知識，正泛函与算子环的表示，具拟不变測度的群上調和分析，綫性拓扑空間上的拟不变測度及調和分析，Gauss 測度，Bose-Einstein 場交换关系的表示．另有两个附录，介紹閱讀本书所需的一些知識．本书供高等学校数学系高年級学生、研究生及这方面的数学工作者、理論物理工作者参考．

# 序

无限維空間上測度和积分的研究起源于随机过程理論，特别是 Wiener 过程的理論. 近年来，关于特征泛函，极限定理，样本空間，广义随机过程的研究都和它有密切的联系. 更值得注意的是，最近十多年来在許多学科，如量子力学，量子場論，統計物理学，不可逆热力学，相对論，湍流理論，反应堆計算，編碼問題等中都出現了无限維空間上的积分問題. 然而在这些領域中，无限維空間上积分的进一步应用却遇到了許多深刻的困难，也缺乏处理的方法. 看来似乎值得对这个新的課題作进一步的研究.

过去国内外都还沒有书籍介紹这方面的成果. 据笔者所知，只有 Friedrichs, K. O. 在 1957 年左右写过一本讲义：《希尔伯特空間上的积分》，但未見发行. 并且除 Wiener 积分外，无限維空間上測度和积分的数学理論大部分是在 1956 年后才发展起来的，由于这方面的論文牵涉的知識面較广，初学的人感到困难較大，因而笔者不揣寡陋，写出这本书，为国内同志进行与这方面有关的研究提供"鋪路石子".

在这一册中着重介紹抽象調和分析，大体上分为三部分：一、正泛函和算子环的表示(第二章)，这是抽象調和分析的基础，虽然

21180/13625

不应全部包含在无限維空間測度和积分理論的范圍內，但和它有密切联系．二、关于拟不变測度的抽象調和分析（第三，四章），其中除几个定理外，較多的是国內的成果．这种調和分析可能为进一步研究无限維空間上測度和积分問題提供工具．三、量子場論中的数学問題之一：Bose-Einstein 場交換关系的表示（第六章），其中也包含前面两部分的应用．另外，作为无限維空間測度論中重要例子的 Gauss 測度也列为一章（第五章）．

有关在无限維空間积分問題的应用中大量出現的所謂“連續积分”問題，积分与泛函变分方程的联系以及其他应用等，准备放在下册中討論．

我們假設讀者已經熟习 Halmos «測度論» 一书，或已具备相当于該书的知識，以及泛函分析的基本知識，如一般常見的泛函分析书中的內容．还希望讀者对拓扑空間，拓扑群，綫性拓扑空間的基本概念已有一些了解，例如可查閱关肇直«拓扑空間概論»一书，本书的第一章及附录 I，II 也提供了一些补充的預备知識．

由于笔者水平及表达能力的限制，加以写成本书的时間較短，缺点一定很多，謬誤之处亦属难免，希讀者不吝指正．

本书承中山大学郑曾同教授审讀了部分手稿，提出了一些宝貴的意見．复旦大学数学系函数論教研組泛函分析小組的教师和研究生，特别是严紹宗同志，也对本书提出过一些宝貴的意見．在此一并致謝．

夏道行
1964 年 11 月于上海，复旦大学

# 目　　录

# 第一章　測度論的某些补充知識

本书中所用到的測度論的一些概念和知識大多采自 Halmos 著《測度論》一书，此后在本书中将直接引用而不加以說明．在第一章中介紹了測度論的一些补充知識，其中有些不包括在 Halmos 书中，这些知識也是后面各章的基础．

本书中有时要討論不是 $\sigma$-有限的測度．然而一般的非 $\sigma$-有限的測度性质不很好，例如 Radon-Nikodym 定理就不成立，因此我們在 §1·2 考察可局部化測度，它不一定是 $\sigma$-有限的，但保留了 $\sigma$-有限測度的某些性质．而且群上常用的測度是可局部化的，因而可局部化測度也是够广泛的一类測度．关于可局部化測度比較深入的性质留到 §2·4 中介紹．

在 §1·3 中我們将介紹 Колмогоров 定理．这是由有限維空間測度构造无限維空間測度的一个基本定理，这里写出比較一般的形式，它和局部凸綫性拓扑空間投影极限概念有一定联系，因而可以用来作为从 Banach 空間上測度构造局部凸綫性拓扑空間上測度的一个工具．

在 §1·4 中介紹 Kakutani 内积，它不仅是研究乘积空間測度等价性的一个量，而且是研究拟不变測度的一个重要的量．

## §1·1 測度論中某些概念

### 1° 測度的一种扩張，測度的限制

本书中把 Halmos[1] 中关于可測集的概念作一些推广.

**定义 1·1·1** 設 $(G, \mathfrak{B})$ 是可測空間. 設 $A\subset G$，且对每个 $B\in\mathfrak{B}$，$A\cap B\in\mathfrak{B}$，則称 $A$ 是关于 $(G, \mathfrak{B})$ 的可測集. 記这种可測集全体为 $\widetilde{\mathfrak{B}}$.

显然 $\mathfrak{B}\subset\widetilde{\mathfrak{B}}$，而且 $\widetilde{\mathfrak{B}}$ 是 $G$ 上的 $\sigma$-代数. 若 $\mathfrak{B}$ 是代数，則 $\mathfrak{B}=\widetilde{\mathfrak{B}}$.

設 $f$ 是 $G$ 上实(复)函数. 如果对于实数直綫(复平面)上每个 Borel 集 $A$，集 $\{g\,|\,f(g)\in A\}\in\widetilde{\mathfrak{B}}$，那末称 $f$ 是 $(G, \mathfrak{B})$ 上的可測函数.

**定义 1·1·2** 設 $(G, \mathfrak{B}, \mu)$ 是測度空間. 作 $(G, \widetilde{\mathfrak{B}})$ 上的集函数 $\tilde{\mu}$ 如下：当 $A\in\widetilde{\mathfrak{B}}$ 时，

$$\tilde{\mu}(A)=\sup_{B\in\mathfrak{B}}\mu(A\cap B).$$

称 $\tilde{\mu}$ 为測度 $\mu$ 的扩張.

容易証明，当 $A\in\mathfrak{B}$ 时，$\tilde{\mu}(A)=\mu(A)$. 因此以后仍記 $\tilde{\mu}$ 为 $\mu$，这不致发生混淆. 今后对于任何測度空間 $(G, \mathfrak{B}, \mu)$，当必要时，总是把它延拓成 $(G, \widetilde{\mathfrak{B}}, \mu)$.

再将 $(G, \widetilde{\mathfrak{B}}, \mu)$ 扩張成完备的測度空間 $(G, \mathfrak{B}^*, \mu^*)$，若 $f$ 关于 $(G, \mathfrak{B}^*)$ 为可測的，則称 $f$ 是 $(G, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的可測函数.

当 $B\in\widetilde{\mathfrak{B}}$，且 $\mu(B)=0$ 时称 $B$ 为 $\mu$-零集或簡称零集.

**定义 1·1·3** 設 $(G, \mathfrak{B}, \mu)$ 是測度空間，$A\subset G$，令

$$\mathfrak{B}_A=\{E\cap A\,|\,E\in\mathfrak{B}\},$$

称它是 $\mathfrak{B}$ 在 $A$ 上的限制.

若有 $C\in\mathfrak{B}$ 使 $C\setminus A$ 的內測度

$$\mu_*(C\setminus A)=0, \tag{1·1·1}$$

作 $\mathfrak{B}_A$ 上的集函数 $\mu_A$ 如下：当 $E\in\mathfrak{B}$ 时，

$$\mu_A(A\cap E)=\mu(E\cap C). \tag{1·1·2}$$

称 $\mu_A$ 为測度 $\mu$ 在 $A$ 上的限制.

**引理** 1·1·1[1] 設 $(G, \mathfrak{B}, \mu)$ 是測度空間, $A$ 是 $G$ 的子集适合条件(1·1·1),則 $\mu$ 在 $A$ 上的限制 $\mu_A$ 有确定的意义,而且 $(A, \mathfrak{B}_A, \mu_A)$ 也是測度空間.

【証】 这个引理中要証明的只是 $\mu_A$ 的意义的确定性,其余的部分是显然的.

設 $E, F\in\mathfrak{B}$, 而且 $A\cap E=A\cap F$, 要証明 $\mu_A$ 的确定性也就是要証明

$$\mu(E\cap C)=\mu(F\cap C). \qquad (1\cdot1\cdot3)$$

不妨設 $E\subset F$, 不然的話,換 $F$ 为 $E\cup F$ 好了. 那末由 $A\cap E=A\cap F$, $E\subset F$ 立即可知

$$A\cap(F\setminus E)=0,$$

即 $C\setminus A\supset(C\cap F)\setminus(C\cap E)$, 但 $\mu_*(C\setminus A)=0$, 因此 $\mu((F\cap C)\setminus(E\cap C))=0$, 这就是(1·1·3). 証毕.

## 2° 函数空間 $\mathfrak{L}^2_k(\Omega)$

我們后面要用到取值于 Hilbert 空間中的向量的抽象函数的空間. 先引进如下的概念.

**定义** 1·1·4 設 $H$ 是 Hilbert 空間, $\Omega=(G, \mathfrak{B}, \mu)$ 是一測度空間, 又設 $f$ 是 $\Omega$ 上抽象函数, (i) 对每个 $g\in G$, $f(g)\in H$, (ii) 对每个 $u\in H$, 数值函数 $(f(g), u)$, $g\in G$, 是 $\Omega$ 上可測函数, (iii) 值域 $\{f(g)\mid g\in G\}$ 包含在 $H$ 的一个可析子空間中. 那末称 $f$ 是可測函数,这种函数全体記成 $M(H, \Omega)$.

容易看出, $M(H, \Omega)$ 按函数加法及函数乘法成为綫性空間.

**引理** 1·1·2 設 $\{e_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 是 Hilbert 空間 $H$ 上完备就范直交系,則 $f\in M(H, \Omega)$ 的充分必要条件是存在一列 $\{\lambda_n\}\subset\Lambda$ 以及

1) 参看 Halmos[1].

$\Omega$ 上一列可測函数 $f_{\lambda_n}$，使

$$f(g)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{\lambda_n}(g)e_{\lambda_n}. \tag{1·1·4}$$

【証】 設 $f$ 滿足引理 1·1·2 的条件，則 $f$ 的值域包含在 $\{e_{\lambda_n}, n=1,2,\cdots\}$ 張成的可析空間之中，而且 $(f(g),u)=\sum f_{\lambda_n}(g)(e_k, u)$ 是可測的．反之，若 $f$ 是可測的，設 $M$ 是包含 $f$ 的值域的可析綫性閉子空間，設 $\{\varphi_k\}$ 是 $M$ 的完备就范直交系，对每个 $k$ 必有一列 $\{\lambda_n^{(k)}\}\subset\Lambda$，使得

$$\varphi_{n_k}=\sum(\varphi_k, e_{\lambda_n^{(k)}})e_{\lambda_n^{(k)}},$$

因此 $f$ 的值域含在 $\{e_{\lambda_n^{(k)}}, k, n=1, 2, \cdots\}$ 張成的可析綫性閉子空間中．由于 $(f, e_{\lambda_n^{(k)}})$ 是 $\Omega$ 上可測函数，而且

$$f(g)=\sum_{n,k=1}^{\infty}(f, e_{\lambda_n^{(k)}})e_{\lambda_n^{(k)}},$$

所以滿足引理中条件．証毕．

**系 1·1·3** 若 $\varphi, f\in M(H, \Omega)$，則 $(f(g), \varphi(g))$ 是 $\Omega$ 上可測函数．特別，$\|f(g)\|^2$ 是 $\Omega$ 上可測函数．

【証】 利用引理 1·1·2，有 $\{e_{\lambda_n}\}$ 使 (1·1·4) 成立，因此

$$(f(g), \varphi(g))=\sum(f(g), e_{\lambda_n})\overline{(\varphi(g), e_{\lambda_n})},$$

立即知道 $(f(g), \varphi(g))$ 是可測函数．証毕．

**定义 1·1·5** 設 $H$ 是 Hilbert 空間，$\Omega=(G, \mathfrak{B}, \mu)$ 是測度空間，令 $\mathfrak{L}^2(H, \Omega)$ 为 $M(H, \Omega)$ 中滿足条件

$$\int_G\|f(g)\|^2d\mu(g)<\infty \tag{1·1·5}$$

的函数全体，按內积

$$(f, \varphi)=\int_G(f(g), \varphi(g))d\mu(g) \tag{1·1·6}$$

所成的內积空間[1)]．

---

1) 由系 1·1·3，$(f(g), \varphi(g))$，$g\in G$，确是 $\Omega$ 上可測函数．又由于条件 (1·1·5)，$\int_G\|f(g)\|\|\varphi(g)\|d\mu(g)<\infty$，則 $\int_G|(f(g), \varphi(g))|d\mu(g)\leqslant\int_G\|f(g)\|\|\varphi(g)\|d\mu(g)<\infty$，卽 $(f, \varphi)$ 有确定意义．容易驗証，$(f, \varphi)$ 确是 $\mathfrak{L}^2(H, \Omega)$ 上內积．

記 $L_2(\Omega)$（或 $L^2(\Omega)$）为通常的可測平方可积函数空間.

**定理** 1·1·4 設 $\{e_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 是 $H$ 中完备就范直交系，$H_\lambda=\{f(g)e_\lambda | f\in L_2(\Omega)\}$. 那末

$$\mathfrak{L}^2(H,\Omega)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus H_\lambda. \qquad (1\cdot1\cdot7)$$

【証】 設 $f\in\mathfrak{L}^2(H,\Omega)$. 由引理 1·1·2，有一列 $\{\lambda_n\}\subset\Lambda$ 使(1·1·4)成立. 又因为 $|f_{\lambda_k}(g)|\leqslant\|f(g)\|$，所以 $f_{\lambda_k}\in L_2(\Omega)$，即 $f_{\lambda_k}(g)e_{\lambda_k}\in H_{\lambda_k}$. 因此 $f\in\sum_{k=1}^{\infty}\oplus H_{\lambda_k}$. 也就是説 $f$ 落在(1·1·7)右边. 証毕.

我們再留意，若 $f_{\lambda_k}(\cdot)e_{\lambda_k}\in H_{\lambda_k}$, $k=1, 2, \cdots$, 而且

$$\sum\|f_{\lambda_k}(\cdot)e_{\lambda_k}\|^2<\infty,$$

那末按(1·1·4)作 $f\in M(H,\Omega)$，这时

$$\int_\Omega\|f(g)\|^2d\mu(g)=\sum\int_\Omega|f_{\lambda_k}(g)|^2d\mu(g)=\sum\|f_{\lambda_k}(\cdot)e_{\lambda_k}\|^2<\infty.$$

因此 $f\in\mathfrak{L}^2(H,\Omega)$. 由此易証

**系** 1·1·5 $\mathfrak{L}^2(H,\Omega)$是 Hilbert 空間.

我們可以看出 $\mathfrak{L}^2(H,\Omega)$ 与 $H$ 的具体形式关系不大，重要的是 $H$ 的維数——即 $H$ 中完备就范直交系的势. 若 $H$ 是 $k$ 維的，則改記 $H$ 为 $H_k$，改記 $\mathfrak{L}^2(H,\Omega)$ 为 $\mathfrak{L}^2_k(\Omega)$. 特别当 $k=1$ 时，$H_1$ 可視为实数直綫（或复数平面），这时 $\mathfrak{L}^2_1(\Omega)$就是 $L^2(\Omega)$.

一般，我們令 $L^p(\Omega)$（或 $L_p(\Omega)$），$p\geqslant1$，表示 $\Omega$ 上 $p$ 方可积的可測函数全体按通常的綫性运算及范数

$$\|f\|_p=\left(\int_G|f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

所成的 Banach 空間. 又令 $L_\infty(\Omega)$（或 $L^\infty(\Omega)$）表示 $\Omega$ 上本性有界可測函数全体按通常运算及范数

$$\|f\|_\infty=\inf_{\mu(E)=0}\sup_{x\in G\setminus E}|f(x)|$$

所成的 Banach 空間.

## 3° 决定集

**定义 1·1·6**　設 $(G, \mathfrak{B})$ 是一可測空間，$\mathfrak{B}$ 是 $\sigma$-代数，又設 $\mathfrak{D}$ 是 $(G, \mathfrak{B})$ 上一族可測函数，而且不存在任何子 $\sigma$-代数 $\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{B}$，$\mathfrak{B}_1\neq\mathfrak{B}$，使 $\mathfrak{D}$ 成为 $(G_1, \mathfrak{B}_1)$ 上的可測函数族．那末称 $\mathfrak{D}$ 是 $(G, \mathfrak{B})$ 上的决定(函数)集，称 $\mathfrak{B}$ 是由 $\mathfrak{D}$ 决定的 $G$ 上 $\sigma$-代数．

容易知道，設 $G$ 为一集，$\mathfrak{D}$ 是 $G$ 上的一族函数，那末唯一地存在着由 $\mathfrak{D}$ 决定的 $\sigma$-代数 $\mathfrak{B}$．事实上，只要令 $\mathfrak{B}$ 是包含形如

$$\{g\,|\,f(g)\leqslant C,\ g\in G\},\quad f\in\mathfrak{D},$$

($C$ 是实数)的一切集的最小 $\sigma$-代数好了．

**定义 1·1·7**　設 $\Omega=(G, \mathfrak{B}, \mu)$ 是一測度空間，$\mathfrak{D}$ 是 $\Omega$ 上的一族可測函数，如果对于 $\Omega$ 的任一 $\sigma$-有限集 $A$，当記 $\mathfrak{B}_A$ 是由 $\mathfrak{D}$ 决定的 $A$ 上的 $\sigma$-代数时，$\Omega$ 的每个含在 $A$ 中的可測子集必和 $\mathfrak{B}_A$ 中某一集相差一 $\mu$-零集，那末称 $\mathfrak{D}$ 是 $\Omega$ 上的决定(函数)集．

显然，若 $\mathfrak{D}$ 是 $(G, \mathfrak{B})$ 上决定集，則 $\mathfrak{D}$ 必是 $(G, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的决定集．

**引理 1·1·6**　設 $\mathfrak{D}$ 是測度空間 $\Omega$ 上的一族有界可測函数，而且 $\mathfrak{D}$ 按通常的运算成为含单位元 1 的代数，同时 $\mathfrak{D}$ 又是 $\Omega$ 上的决定集．

任取 $\rho\in L^1(\Omega)$，$\rho\geqslant 0$，令 $L^2(\Omega, \rho)$ 是 $\Omega$ 上适合条件

$$\|f\|=\left(\int_G|f(g)|^2\rho(g)d\mu(g)\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$$

的可測函数 $f$ 全体按范数 $\|f\|$ 所成的賦范空間，那末 $\mathfrak{D}$ 是在 $L^2(\Omega, \rho)$ 中稠密的．

【証】　令 $\mathfrak{S}$ 是形如

$$\prod_{j=1}^{n}\{x\,|\,f_j(x)\in(a_j, b_j]\}^{1)},\quad f_j\in\mathfrak{D}\tag{1·1·8}$$

1) 这里 $a_j<b_j$．而当 $b_j=\infty$ 时，$(a_j, b_j]$ 表示大于 $a_j$ 的实数全体．

的集全体，$\mathfrak{F}$ 是 $\mathfrak{S}$ 中有限个集的和集全体所成的集族，那末 $\mathfrak{F}$ 是代数。事实上，$G\in\mathfrak{F}$ 是显然的. $\mathfrak{F}$ 中的任意有限个集的和集或通集也显然属于 $\mathfrak{F}$. 只要証明 $\mathfrak{F}$ 中集的余集属于 $\mathfrak{F}$，就知道 $\mathfrak{F}$ 是代数. 容易看出，只要証明 $\mathfrak{S}$ 中集的余集属于 $\mathfrak{F}$ 好了，而这一点可由下式立即得到：

$$G\setminus\bigcap_{j=1}^{n}\{x\,|\,f_j(x)\in(a_j,\ b_j]\}$$

$$=\bigcup_{j=1}^{n}\{x\,|\,f_j(x)\in(-\infty,\ a_j]\}\bigcup_{j=1}^{n}\{x\,|\,f_j(x)\in(b_j,\ \infty)\},$$

因此 $\mathfrak{F}$ 是代数.

令 $\mathfrak{D}^\circ$ 是 $\mathfrak{D}$ 在 $L^2(\Omega,\ \rho)$ 中的包，那末由于 $\mathfrak{D}$ 是綫性的，$\mathfrak{D}^\circ$ 是綫性閉子空間.現在来証明对一切 $E\in\mathfrak{F}$，$E$ 的特征函数 $C_E\in\mathfrak{D}^\circ$. 設 $f_1,\ \cdots,\ f_n\in\mathfrak{D}$，那末必有正数 $\xi$ 使得对一切 $g\in G$，$|f_j(g)|\leqslant\xi$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 作区間 $[-\xi,\ \xi]$ 上的函数

$$\psi_j(x)=\begin{cases}1, & x\in(a_j,\ b_j]\cap[-\xi,\ \xi],\\ 0, & x\in[-\xi,\ \xi]\setminus(a_j,\ b_j].\end{cases}$$

容易証明，存在多項式序列 $\{p_{mj};\ j=1,\ \cdots,\ n;\ m=1,\ 2,\ \cdots\}$，使得

$$\max_{|x|\leqslant\xi}|p_{mj}(x)|\leqslant 2, \tag{1·1·9}$$

而且，对每个 $j$，当 $x\in[-\xi,\ \xi]$ 时，

$$\lim_{m\to\infty}p_{mj}(x)=\psi_j(x). \tag{1·1·10}$$

若記 (1·1·8) 中的集为 $E$，那末由 (1·1·10) 容易看出

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{n}p_{mj}(f_j(g))=\prod_{j=1}^{n}\psi_j(f_j(g))=C_E(g). \tag{1·1·11}$$

因为 $\mathfrak{D}$ 是具有单位元 1 的代数，因此 $\varphi_m(g)=\prod\limits_{j=1}^{n}p_{mj}(f_j(g))\in\mathfrak{D}$. 由 (1·1·9)，$|\varphi_m(g)|\leqslant 2^n$。再根据 Lebesgue 控制收斂定理，得到

$$\lim_{m\to\infty}\|\varphi_m-C_E\|=0.$$

因此，当 $E\in\mathfrak{S}$ 时 $C_E\in\mathfrak{D}^\circ$. 若 $E_1,\ E_2\in\mathfrak{S}$，則 $E_1\cap E_2\in\mathfrak{S}$. 又由

$$C_{E_1\cup E_2}=C_{E_1}+C_{E_2}-C_{E_1\cap E_2}$$

和 $\mathfrak{D}^\circ$ 的綫性，得知 $C_{E_1\cup E_2}\in\mathfrak{S}$. 因此对一切 $E\in\mathfrak{F}$, $C_E\in\mathfrak{D}^\circ$.

若 $\mathfrak{D}^\circ\neq L^2(\Omega,\rho)$，必有非零的向量 $\varphi\in L^2(\Omega,\rho)$，使得 $\varphi\perp\mathfrak{D}^\circ$. 因此对一切 $E\in\mathfrak{F}$,

$$\int_E\bar{\varphi}\rho d\mu=\int C_E\bar{\varphi}\rho d\mu=0. \tag{1.1.12}$$

利用积分的可列可加性得知，对于包含 $\mathfrak{F}$ 的最小 $\sigma$-代数 $\mathfrak{F}_1$ 中的集 $E$, (1.1.12) 也成立. 令 $A=\{g\mid\rho(g)>0\}$，那末 $A$ 是 $\Omega$ 的 $\sigma$-有限集. 由 $\mathfrak{D}$ 的决定性，对于 $A$ 的每个可测子集 $F$，必有 $E\in\mathfrak{F}_1$，使 $E\cap A$ 与 $F$ 只差一 $\mu$-零集. 因此由(1.1.12)得到

$$\int_F\varphi\rho d\mu=\int_{E\cap A}\varphi\rho d\mu=\int_E\varphi\rho d\mu=0.$$

所以对几乎一切 $g\in A$, $\varphi(g)=0$. 这就是說，$\varphi$ 为 $L^2(\Omega,\rho)$ 中的零向量，这是矛盾，因此 $\mathfrak{D}^\circ=L^2(\Omega,\rho)$. 証毕.

### 4° 乘积空間上的測度

我們注意，虽然 Halmos[1] 中只考察过可列个測度空間的乘积，事实上那些处理方法也可用来定义任意个測度空間的乘积，这里不准备詳細叙述. 今后記測度空間族 $\{\Omega_\alpha=(G_\alpha,\mathfrak{B}_\alpha,\mu_\alpha),\alpha\in\mathfrak{A}\}$ 的乘积空間为 $\underset{\alpha\in\mathfrak{A}}{\times}\Omega_\alpha$ 或 $(\underset{\alpha\in\mathfrak{A}}{\times}G_\alpha,\underset{\alpha\in\mathfrak{A}}{\times}\mathfrak{B}_\alpha,\underset{\alpha\in\mathfrak{A}}{\times}\mu_\alpha)$. 我們再写出下面一些明显的事实.

設 $(G,\mathfrak{B},\mu_k),k=1,2$ 是两个測度空間，$(H,\mathfrak{F},\nu_k),k=1,2$ 是另外两測度空間，那末 $(G\times H,\mathfrak{B}\times\mathfrak{F})$ 上的測度 $\mu_1\times\nu_1$ 对于 $\mu_2\times\nu_2$ 絕对連續的充要条件是 $\mu_1\ll\mu_2$, $\nu_1\ll\nu_2$. 这时有

$$\frac{d\mu_1\times\nu_1(g,h)}{d\mu_2\times\nu_2(g,h)}=\frac{d\mu_1(g)}{d\mu_2(g)}\frac{d\nu_1(h)}{d\nu_2(h)}. \tag{1.1.13}$$

設 $\{\Omega_n=(G_n,\mathfrak{B}_n,\mu_n),\ n=1,2,\cdots\}$ 是一列概率測度空間 $\Omega=(G,\mathfrak{B},\mu)=\underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}}\Omega_n$. 記 $\Omega^{(n)}=\underset{\nu=1}{\overset{n}{\times}}\Omega_\nu=(G^{(n)},\mathfrak{B}^{(n)},\mu^{(n)})$. 对于每个

$f\in L^2(\Omega^{(n)})$，作 $\Omega$ 上的函数 $g\to f(g^{(n)})$，这里 $g=\{g_1, g_2, \cdots, g_n, \cdots\}\in G$ 而 $g^{(n)}=\{g_1,\cdots,g_n\}\in G^{(n)}$. 显然这个函数属于 $L^2(\Omega)$. 这样把 $L^2(\Omega^{(n)})$ 嵌入 $L^2(\Omega)$ 成为 $L^2(\Omega)$ 的閉綫性子空間. 令 $P_n$ 是 $L^2(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega^{(n)})$ 的投影算子. 今証

**引理** 1·1·7 $\{P_n\}$ 强收斂于恒等算子 $I$.

【証】 显然有 $P_1\leqslant P_2\leqslant\cdots\leqslant P_n\leqslant\cdots$，我們只要証明 $Q=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}L^2(\Omega^{(n)})$ 在 $L^2(\Omega)$ 中稠密好了. 令 $\mathfrak{D}$ 是 $Q$ 中有界可测函数全体，显然 $\mathfrak{D}$ 是含有单位元 1 的代数. 然而对任何 $n$ 及 $n$ 維空間的 Borel 集 $E$,

$$\widetilde{E}=\{g\,|\,g=\{g_1, g_2, \cdots\}\in G, \{g_1, \cdots, g_n\}\in E\}$$

的特征函数 $C_{\widetilde{E}}\in L^2(\Omega^{(n)})$. 因此 $C_{\widetilde{E}}\in\mathfrak{D}$. 又形如 $\widetilde{E}$ 的集全体張成 $\mathfrak{B}$. 因此 $\mathfrak{D}$ 是 $\Omega$ 的决定集. 根据引理 1·1·7, $\mathfrak{D}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中稠密子集. 証毕.

## 5° 直接和測度

**定义** 1·1·8 設 $\Omega_\alpha=(G_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha, \mu_\alpha)$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, 是一族測度空間, 其中 $\{G_\alpha, \alpha\in\mathfrak{A}\}$ 是一族互不相交的集. 記 $G=\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}}G_\alpha$. 令 $\mathfrak{B}$ 是下面形式的集:

$$A=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}A_{\alpha_\nu},\quad A_{\alpha_\nu}\in\mathfrak{B}_{\alpha_\nu},\ \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots\}\subset\mathfrak{A}\qquad(1\cdot1\cdot14)$$

的全体. $\mu$ 是 $(G, \mathfrak{B})$ 上的如下的集函数: 当 $A$ 形如 (1·1·14) 时,

$$\mu(A)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_{\alpha_\nu}(A_{\alpha_\nu}).$$

那末称 $\Omega=(G, \mathfrak{B}, \mu)$ 为測度空間 $\{\Omega_\alpha, \alpha\in\mathfrak{A}\}$ 的直接和. 又当 $\mu_\alpha(G_\alpha)<\infty$, $\alpha\in\mathfrak{A}$ 时, 我們称 $\{G_\alpha, \alpha\in\mathfrak{A}\}$ 是 $\Omega$ 的一个剖分.

显然, 定义 1·1·8 中的 $\Omega$ 确是測度空間.

**引理** 1·1·8 設 $\Omega=(G, \mathfrak{B}, \mu)$ 是一族測度空間 $\{(G_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha, \mu_\alpha), \alpha\in\mathfrak{A}\}$ 的直接和. 那末 $B\in\widetilde{\mathfrak{B}}$ 的充要条件是对每个 $\alpha\in\mathfrak{A}$,