现代控制理论专辑

Xiandai kongzhi lilun zhuanji

科学技术文献出版社重庆分社

现代控制理论专辑

中国科学技术情报研究所重庆分所	编	辑
科学技术文献出版社重庆分社 重庆市市中区胜利路91号	出	版
四川省新华书店重庆发行所	发	行
重庆印制第一厂	印	刷

开本：787×1092毫米1/16　印张：10¼　字数：22万
1980年11月第一版　1980年11月第一次印刷
科技新书目：179—145　印数：1—4,200册

书号：13176·85　定价：1.10元

编　者　的　话

现代控制理论是近年来迅速发展的一个重要学科，不仅在空间科学、工业自动化和军事领域有着重要应用，而且在生物科学、经济学、管理科学、甚至石油勘探和环境保护等方面也显示了它的威力。

本专辑着重介绍了这一学科的重要分支之一——分布参数系统的控制理论。工程中的许多问题，如导弹的弹性振动的控制、火箭中液体燃料的晃动的控制、化学反应器和原子核反应堆的控制等等，使我们必须考虑具有无穷自由度的物理系统——即所谓分布参数系统的控制问题。这时要控制的不是有限多个状态的演化，而是一个场的演化，因而系统是用偏微分方程描述的。法国著名数学家 J.L. Lions 领导的学派采用近代数学工具对分布参数系统的控制问题进行了系统的研究，本专辑中收入的“分布系统最优控制理论中的各类论题”一文综述了在分布系统的最优控制理论方面的研究成果和今后的研究课题。他们的研究特点是着重从实际中提出问题。本专辑中的另一篇文章“偏微分方程的可控性和能稳定性理论”，综述了分布系统的可控性和能稳定性方面及其它有关课题的研究成果，指出了有待解决的问题。这篇文章特别注意从数学上提出问题，带有浓厚的数学味道，代表了美国工业与应用数学会出的控制与最优化杂志（SIAM J. Control and Optimazation）上近年来发表的一些论文（姑且称那些作者为SIAM 学派）的观点。

近年来国外很注意研究奇摄动方法在分布参数系统和大系统方面的应用，1978年6月 IFAC（国际自动控制联合会）与法国 IRIA（信息与自动化研究所）还在法国联合召开了奇摄动方面的学术会议。法国的 Lions 学派对奇摄动方法在分布参数系统的应用方面研究得很多。本专辑中的“分布系统最优控制中的渐近法”一文简要介绍了奇摄动方法对分布系统最优控制的应用。

系统辨识也是现代控制理论研究的基本问题之一，在许多情形下都需要通过系统辨识来建立系统的数学模型。“系统辨识综述”一文介绍了系统辨识的主要成果和发展概况。遗憾的是，本专辑没有专门介绍分布参数系统的辨识的文章。

最后一篇文章介绍了把模糊集理论用于过程控制方面的状况，有助于拓广我们的视野。

由于编者能力和水平有限，本专辑不可避免地会有许多缺点和错误之处，恳切希望读者提出宝贵意见。

目　　录

分布系统最优控制理论中的各类论题

J. L. Lions

引　　言

本文九章内容是1973年8月作者在加拿大安大略省伦敦市举行的加拿大数学家大会的第14届（两年一次的）研究班上所作的九个演讲的底稿。口头介绍时，某些熟知的事实比这里说得更仔细些，可是这里我们比较充分细致地介绍了某些新的结果。

这些演讲总的目的是为了介绍分布参数系统最优控制理论的某些论题。许多有趣的论题这里没有考虑，下面列出其中一些，并且列出一些文献书目。

第一章给出分布系统最优控制与自由边界问题间的关系。为了不使讨论过专，我们只限于状态由线性椭圆型方程给出的情形。不过介绍的方法是通用的。在第一章之末，还部分形式地证明了"砰砰"定理。

在第二章和第三章中我们考虑了一些"先验反馈"的问题，这是指这样的情形：在物理的基础上，设计一个应该"接近于"最优策略的策略。这就引导到一般列入变分不等式或拟变分不等式框架内的问题。于是我们必须证明这些问题容许有一个解。

为了解弹性单侧问题，在Stampacchia［1］，Lions-Stampacchia［1］中引入了变分不等式。为了研究力学中提出的许多现象，在Duvaut-Lions［1］中引入了变分不等式的各种变形和新的类型。许多作者研究过解的性质，关于解的正则性我们特别提到H. Brézis［1］(及那里的参考文献)。变分不等式在Lions［1］中被用于分布系统的最优控制问题。这里我们要谈到C. Baiocchi的工作［1］，它用一非常有趣的未知函数变换，把流体动力学中提出的一类自由边界问题化成变分不等式；从这一思想出发，最近Brézis-Stampacchia［1］，Duvaut［1］解决了其它类型的自由边界问题。

我们已经在Bensoussan-Lions［2］中指出，发展变分不等式的方法怎样在停止时间问题中起着本质的作用；对定常情形，这是W. Fleming［1］首先注意到的。

为了研究脉冲控制问题（这一问题在本文第八章中将简要讨论），最近Bensoussan和本作者引入了拟变分不等式（参考Bensoussan-Lions［1］，［3］，［4］，［5］，Bensoussan-Goursat-Lions［1］)，这里是在一种不同的情形中遇到拟变分不等式。Bensoussan-Lions的书［4］中对拟变分不等式及其应用作了系统研究。

对变分不等式和拟变分不等式，我们这里将研究一些允许独立介绍的特殊情形。

第四章研究约束依赖于系统状态的情形。简单回顾了某些熟知的方法之后，我们指出Fenchel和Rockafallar意义下的对偶理论（参考Rockafellar［1］，Ekeland-Teman［1］）如何允许我们排除对状态的约束；这一思想属于Mossino［1］，在那里还考虑了一些异于本文的例子。

第五章简单介绍了状态方程是非线性的一些情形。大多数应用中一般就是这种情形，而且参考文献很多。我们简短说明了热传导理论中的一个例子（见J.P. Yvon［1］）和生物化学中的一些例子（见J.P. Kernevez［1］，Kernevez-Thomas［1］，Brauner-Penel [1], [2])。我们还指出第二章和第三章的思想怎样有助于非线性问题。我们并不企图考察其它例子，而想要谈到在潮汐的研究中（参考D. Duff[1]）和在传输理论中（参考Bamberger-Yvon[1]）提出的非线性双曲型方程。在熔解的控制中也提出了高度非线性方程（参考Mercier-Teman[1]，P.K.C. Wang[1]）。我们还要谈到在应用中提出的这样的问题：其中状态由椭圆问题的第一固有值或第一固有函数给出，使状态对控制来说是非线性的；参考F. Mignot[1]。

第六章讨论了控制是一几何变量的情形。这一问题可以用几种方法提出来。有可能是必须用最优的方法在一给定的区域的内部或其边界上选取某些点或某些曲线（参见Amouroux[4]，Saguez[1]，Van de Wille[1]；也谈到这些问题的数值方面）；还注意"扫描稳定化"的问题，这一问题参见Bamberger[1]，Jaffré[1]，Saint Jean Paulin[1]。也可能是需要选择区域本身；这些是最优设计的问题，关于这一论题有多得令人难以相信的出版物。看来用最优控制的方法思考这些问题是有用的（参见O. Pironneau[1]，[2]）。

第七章研究控制的性能指标"小"的情形。我们指出如何把这些问题"化为"一般是非经典型的奇摄动问题：尤其是，它们常常与流形上拟微分算子奇异边界问题的解的渐近展开理论有关(参见Lions[4]，[6])。

奇（或正则）摄动自然地出现于"弱耦合的""大"系统的最优控制中，参见O'Malley[1]，Lions[1]及其文献目录。

第八章考察由Bensoussan-Lions[1]引入的脉冲控制问题。引起这一问题的动机包括（例如）管理中的最优动态策略问题。关于这一问题的经典文献（见第二章末）与这里所介绍的课题间的关系的完整研究将在Bensoussan-Lions的书[4]中加以介绍。这里只给出简短的说明。我们指出如何把这些问题化为拟变分不等式。

第九章通过介绍D·Leroy[1]对冷却问题所作的某些数值计算，对数值方法作了一些说明。

如前所述，有许多论题我们完全没有考虑，特别是：

1）一般的存在性定理，建议参考Bidaut[1]，Berkowitz[1]，Baranger[1]，Murat[1]；

2）反馈的研究和黎卡提型非线性方程的研究，建议参考Lions[1]，[2]；对这些方程的一种直接研究参见L. Tartar[1]；

3）双曲系统，这里只作了简短的叙述；特别对可观测性和可控性，建议参考Lions[1]，Russell[1]；

4）具延滞的系统，请参考Delfour-Mitter[1]，Oguztorelli[1] [2]；

5）分解方法，请参考Bensoussan-Lions-Teman的报告[1]及其文献目录；

6）多准则问题也在上述一文中和J.P. Yvon即将发表的一文中加以考虑；

7）灵敏度分析，参考Pritchard[1]；

8）分布系统的辨识问题，可化为控制在系数中的最优控制问题；关于这一方法请参考G. Chavent[1]。

第一章　最优控制和自由曲面

§1. 椭圆型状态方程

1.1. 最优性系统

设Ω是R^n中具光滑边界Γ的有界开集。

在Ω中我们考察一椭圆型线性二阶偏微分算子A. 为了使讨论的问题尽可能简单，我们将取

$$(1.1)\quad A=-\Delta+I,\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2},\quad I=\text{单位算子。}$$

系统的状态由Neumann问题，

$$(1.2)\qquad Ay=f,\ \text{在}\ \Omega\text{中},$$

(1.3) $\dfrac{\partial y}{\partial \nu}=v$，在 Γ 上

的解给出。(1.2)中 f 是 $L^2(\Omega)$中给定的函数，(1.3)中v是$L^2(\Gamma)$中给定的函数。$\left(\dfrac{\partial}{\partial \nu}\right.$表$y$的朝$\Omega$外部的法向导数。)

方程 (1.2)，(1.3) 在Sobolev空间$H^1(\Omega)$[1]中有唯一解，它可以由"变分公式"

$$(1.4)\quad a(y,\varphi)=(f,\varphi)+\int_\Gamma v\varphi d\Gamma \quad \forall \varphi\in H^1(\Omega)$$

确定，这里

$$a(\varphi,\psi)=\sum_{i=1}^n\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx+\int_\Omega\varphi\psi dx,$$

$$(f,\varphi)=\int_\Omega f\varphi dx.$$

我们将用$y(v)$表示 y. 映象

$$(1.5)\quad v\to y(v)$$

由 $L^2(\Gamma)\to H^1(\Omega)$ 是仿射连续的。

我们考虑的性能指标函数定义为：

$$(1.6)\quad J(v)=\int_\Gamma|y(v)-z_d|^2d\Gamma+N\int_\Gamma v^2d\Gamma,$$

这里 z_d给定在 $L^2(\Gamma)$ 中，N是一给定的正数[2]。

控制问题如下：设 U_{ad}是 $U=L^2(\Gamma)$的一个非空闭凸集；我们要在 U_{ad} 上使 J 极小：

$$(1.7)\quad \inf J(v),\ v\in U_{ad}.$$

注1.1. 第四章中将考虑 U_{ad}由对 v 和 $y(v)$的约束来定义的情形，本章中 U_{ad}仅由对 v 的约束定义。

问题(1.7)的解法是简单明了的。

定理1.1. 问题(1.7)有唯一解$u\in U_{ad}$，它由如下最优性条件表征：

$$(1.8)\quad \int_\Gamma(y-z_d)(y(v)-y)d\Gamma+N\int_\Gamma u(v-u)d\Gamma\geqslant 0\quad \forall v\in U_{ad},$$

这里

$$y(u)=y.$$

证明. 1) 函数$v\to J(v)$由 $U\to R$ 是连续的，严格凸的，而且满足

$$J(v)\geqslant N\|v\|_U^2,$$

因此，u的存在性和唯一性是众所周知的。

2) 函数 J可微，而且有

$$(1.9)\quad \frac{1}{2}(J'(u),v-u)=\int_\Gamma(y(u)-z_d)(y(v)-y(u))d\Gamma+N\int_\Gamma u(v-u)d\Gamma.$$

最优控制 u 由变分不等式

$$(1.10)\quad (J'(u),v-u)\geqslant 0,\forall v\in U_{ad},\ u\in U_{ad}$$

表征，故得(1.8).

下步要通过引入伴随状态 p，把 (1.8) 变换为更为方便的形式，伴随状态 p 按如下方式定义：

$$(1.11)\quad \begin{cases} Ap=0^{(3)}, & \text{在 } \Omega \text{ 中}\\ \dfrac{\partial p}{\partial\nu}=y-z_d, & \text{在 } \Gamma \text{ 上}. \end{cases}$$

如果用$y(v)-y(u)=y(v)-y$ 乘(1.11)，并应用格林公式，即得

$$0=-\int_\Gamma(y-z_d)(y(v)-y)d\Gamma+\int_\Gamma p\left(\frac{\partial y(v)}{\partial\nu}-\frac{\partial y(u)}{\partial\nu}\right)d\Gamma$$

$$=-\int_\Gamma(y-z_d)(y(v)-y)d\Gamma+\int_\Gamma p(v-u)d\Gamma\quad (\text{由}(1.3)),$$

因此，(1.8)变成

$$(1.12)\quad \int_\Gamma(p+Nu)(v-u)d\Gamma\geqslant 0\quad \forall v\in U_{ad},\ u\in U_{ad}.$$

概括起来，有

定理1.2. 问题(1.7)的唯一解u由如下

---

(1) $H^1(\Omega)=\left\{\varphi\mid\varphi,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1},\cdots\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\in L^2(\Omega)\right\}$. 我们考虑的一切函数都假定是实值的。

(2) 下节将考虑 $N=0$ 的情形。

(3) 一般来说，这里应使用A的伴随算子A^*；在我们现在考虑的特殊情形里，$A^*=A$。

系统表征：

$$(1.13)\quad \begin{cases} Ay=f, Ap=0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu}=u, \quad \dfrac{\partial p}{\partial \nu}=y-z_d, \\ \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上,} \\ \displaystyle\int_\Gamma (p+Nu)(v-u)d\Gamma \geqslant 0, \\ \quad \forall v \in U_{ad}, u \in U_{ad}. \end{cases}$$

系统(1.13)称为最优性系统。

注1.2. 因求解(1.13)等价于求解最优控制问题，故(1.13)有唯一解。

为了研究(1.13)的结构，我们考虑某些特殊情形。

1.2. *无约束情形*

当 $U_{ad}=U$ （“无约束”的情形），则

(1.13) 中的不等式等价于

(1.14) $p+Nu=0.$

最优性系统等价于线性边值问题

$$(1.15)\quad \begin{cases} Ay=f, \quad Ap=0, \text{ 在 } \Omega \text{ 中} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu}+\dfrac{1}{N}p=0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial \nu}=y-z_d \text{ 在 } \Gamma \text{ 上,} \end{cases}$$

于是u就由(1.14)给出。

1.3. *一种有约束情形．交换线．*

现在我们考察U_{ad}由下式给出的情形：

(1.16) $U_{ad}=\{v \mid v \in L^2(\Gamma),$
$0 \leqslant v \leqslant M\}.$

于是容易验核(1.13)中的不等式等价于

$$(1.17)\quad \begin{cases} 0<u<M \Rightarrow p+Nu=0, \\ u=0 \Rightarrow p \geqslant 0, \\ u=M \Rightarrow p+NM \leqslant 0. \end{cases}$$

因此我们得出Γ上的三个区域：

$$(1.18)\quad \begin{aligned} &\Gamma_0=\{x \mid u(x)=0\}, \\ &\Gamma_M=\{x \mid u(x)=M\}, \\ &S=\{x \mid 0<u(x)<M\}, \end{aligned}$$

这些区域直到Γ上之一零测度的集合外，在Γ上被定义。这些区域的边界是交换线。

注1.3. 这里我们看出这一问题与自由曲面（或自由边界）问题（当其在经典物理中出现时）之间的类似。我们以后将多次提到这一注释。

§2. N=0 的无约束情形

2.1. *方 向*

在许多应用中遇到在(1.6)中$N=0$的情形，也遇到N “小” (1) 的情形。

在本节中，我们考虑问题（1.7)，其中

(2.1) $U_{ad}=U, \ N=0.$

2.2. *一“无存在性”结果*

我们将要证明：

(2.2) “一般来说”(2) 具(2.1)的问题(1.7)不容许有一解。

首先我们验核

(2.3) $\inf J(v)=0.$

考虑Γ上使得

(2.4) 在 $L^2(\Gamma)$中 $z_{dj} \to z_d$

的光滑函数的序列z_{dj}.

设φ_j是

(2.5) $A\varphi_j=f, \ \varphi_j=z_{dj}$ 在Γ上

的（光滑）解（实际上$\varphi_j \in H^2(\Omega), H^2(\Omega)$是2阶 Sobolev空间）。

我们定义

$$(2.6)\quad v_j=\frac{\partial \varphi_j}{\partial \nu},$$

因此$v_j \in L^2(\Gamma)$(实际上$v_j \in H^{1/2}(\Gamma)$).故有

$$(2.7)\quad J(v_j)=\int_\Gamma |z_{dj}-z_d|^2 d\Gamma$$

且 $J(v_j) \to 0$. 得到(2.3).

我们暂且容许存在一个u使得

(2.8) $J(u)=0.$

于是 $y(u)=y$ 满足

(2.9) $Ay=f$ 在Ω中，$y=z_d$ 在Γ上，

于是u形式上被定义为

$$(2.10)\quad u=\frac{\partial y}{\partial \nu}.$$

可是通常如$z_d \in L^2(\Gamma)$，则(2.10)定义

（1）其对应于“廉价（Cheap）”控制。我们还将谈到这一问题。

（2）下面对这一提法还要精确化。

的 u 不属于 $L^2(\Gamma)$. 不过可以证明 $\frac{\partial y}{\partial \nu}\in H^{-1}(\Gamma)$[1]，(参考Lions-Magenes[1])如 $z_d\in H^1(\Gamma)$ 我们也可证明 $\frac{\partial y}{\partial \nu}\in L^2(\Gamma)$.

概括起来，我们得出

定理2.1. 在条件(2.1)下，问题(1.7)满足(2.3).如 z_d 满足补充条件：$z_d\in H^1(\Gamma)$，则存在一最优控制，由(2.10)给出。如 $z_d\in L^2(\Gamma)$，$z_d\notin H^1(\Gamma)$，则在 $L^2(\Gamma)$ 中不存在一最优控制，但是我们可以在 $H^{-1}(\Gamma)$ 中定义一个“松弛”最优控制，仍由(2.10)给出。

注2.1. u 通常在比 $L^2(\Gamma)$ 更大的空间中存在这一事实（这里当 $N>0$ 时有最优控制）是典型的奇摄动。这一点以后还要作出精确的说明。

§3. N=0 的有约束情形

3.1. 存在性和唯一性结果

现在我们考虑 $N=0$ 且

(3.1) $U_{ad}=\{v\mid 0\leqslant v\leqslant M\}$

的情形。

因 U_{ad} 在 $L^2(\Gamma)$ 中是有界的，故 U_{ad} 中使

(3.2) $J(v)=\int_\Gamma |y(v)-z_d|^2 d\Gamma$

极小的 u 的存在性立即可得。

我们验证函数 $v\to J(v)$ 是严格凸的，故在 U_{ad} 中存在唯一的 u（由(3.1)定义）使得

(3.3) $J(u)=\inf J(v)$.

而且定理1.2的结论在 $N=0$ 时仍然成立，因此 u 由下面的系统表征：

$$(3.4)\begin{cases} Ay=f,\ Ap=0 \ \text{在}\Omega\text{中}, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu}=u,\ \frac{\partial p}{\partial \nu}=y-z_d \ \text{在}\Gamma\text{上}, \\ \int_\Gamma p(v-u)d\Gamma\geqslant 0, \\ \forall v\in U_{ad} u\in U_{ad}. \end{cases}$$

3.2. “砰砰”结果

设 Φ 是

(3.5) $A\Phi=f$ 在 Ω 中，$\Phi=z_d$ 在 Γ 上

的解。在

(3.6) $0\leqslant\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\leqslant M$ 在 Γ 上

的特殊情形下，最优解由

(3.7) $u=\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$

给出。

现在我们研究(3.6)不成立时的情形。

(3.4)中不等式的说明由(1.17)给出，这里 $N=0$.

我们要证明（多少有点形式上的）

(3.8) S 是空的，

这里 $S=\Gamma$ 中当 $0<u<M, p=0$ 时的集合。因此 $\Gamma=\Gamma_0\cup\Gamma_M$，在 Γ_0 上 $u=0$，在 Γ_M 上 $u=M$，这就是一个砰砰型的结果。

我们先证 $S=\Gamma$ 是不可能的。设 $S=\Gamma$，则在 Γ 上 $p=0$，于是在 Ω 中 $p=0$，而且在 Γ 上 $\frac{\partial p}{\partial \nu}=y-z_d=0$，即 $y=\Phi$（参见(3.5)），这是我们已经排除的情形。

现在我们证明不存在满足 $S_1\subset S$，meas.$(S_1)>0$ 的集合 S_1，使得在 S_1 上 $y=z_d$. 事实上，如这样的 S_1 存在，则

$$p=0 \text{ 且 } \frac{\partial p}{\partial \nu}=0 \quad \text{在} S_1\text{上},$$

故由柯西问题解的唯一性得出：在 Ω 中 $p=0$ 而且仍有 $y=\Phi$，这与我们的假设矛盾。

因此，或者 S 为零测集（证明即完成），或者存在测度为正的 $S_+\subset S$（或 $S_-\subset S$）使得

$y>z_d$ 在 S_+ 上（或 $y<z_d$ 在 S_- 上）.

我们证明这样的 S_+（或 S_-）的存在是不可能的。我们对 S_+ 证明之。事实上，在 S_+ 上（我们假定一切都是“正则的”，这就是这一“证明”的形式的方面）：

---

(1) $H^{-1}(\Gamma)=H^1(\Gamma)$ 的对偶空间$=\Gamma$上-1阶的分布.

$p=0$(因$S_+\subset S$)，$\dfrac{\partial p}{\partial \nu}>0$

$$\left(\text{因}\frac{\partial p}{\partial \nu}=y-z_d\right),$$

故在S_+之一邻域σ内$p<0$，在σ中 $\Delta p=p$就意指在σ中$\Delta p<0$.但是在σ中$\Delta p<0$和在 S_+上$p=0$意味着在S_+上$\dfrac{\partial p}{\partial \nu}\leqslant 0$,得出矛盾。

第二章　先验反馈和变分不等式

§1.　定常问题

1.1.　问题的表述

我们又考虑第一章第三节中的问题：当 $v=\dfrac{\partial y(v)}{\partial \nu}$满足$0\leqslant v\leqslant M$时，我们希望使

$$J(v)=\int_\Gamma |y(v)-z_d|^2 d\Gamma \tag{1.1}$$

极小。

我们可以按一种形式方式讨论如下：

我们希望保持 $y(v)$"尽可能接近"z_d，因此，如果$y(v)$"变得"$>z_d$，则我们取v的极小值，即$v=0$；如果$y(v)$"变得"$<z_d$，则取v的极大值，即$v=M$.因此最优解就应"靠近"一个满足

$$A\Phi=f\quad\text{在}\Omega\text{中} \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} 0\leqslant\dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu}\leqslant M, \\ \Phi>z_d\Rightarrow\dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu}=0, \\ \Phi<z_d\Rightarrow\dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu}=M \end{cases} \tag{1.3}$$

的函数Φ，如果这样一函数存在的话。

注1.1.　同样的推理适用于其他的泛函，例如象

$$J_1(v)=\int_\Gamma |y(v)-z_d|d\Gamma. \tag{1.4}$$

注1.2.　下面我们证明(1.2)，(1.3)有唯一解。然后用

$$w=\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \tag{1.5}$$

定义一个次优控制。

未决问题1.1. 得出$J(w)-J(u)$的估计量，这里u是最优控制。

未决问题1.2. 是否存在一性能指标函数$G(v)$使得

$$G(w)=\inf G(v),0\leqslant v\leqslant M?$$

注1.3.　在上面的考虑中，我们借助状态选取一个"接近最优的策略"。这有点证明了"先验反馈"这一术语是正确的，这一术语在下节考虑的发展问题中将更为适合。

1.2.　表述为变分不等式

让我们定义

$$j(\varphi)=M\int_\Gamma (\varphi-z_d)^- d\Gamma,\quad \varphi\in H^1(\Omega)^{(1)}. \tag{1.6}$$

函数$\varphi\to j(\varphi)$由$H^1(\Omega)\to R$是连续的和凸的，而且不可微。我们将证明，(1.2)，(1.3)等价于如下变分不等式：

$$a(\Phi,\ \varphi-\Phi)+j(\varphi)-j(\Phi)\geqslant(f,\ \varphi-\Phi),\forall\varphi\in H^1(\Omega), \tag{1.7}$$

这里$a(y,\varphi)$由第一章的(1.4)定义。

证明. 我们先取$\varphi=\Phi\pm\psi$，$\psi\in D(\Omega)^{(2)}$.则$j(\varphi)=j(\Phi)$且(1.7)化为

$$a(\Phi,\ \psi)=(f,\ \psi),\forall\varphi\in D(\Omega), \tag{1.8}$$

$$A\Phi=f. \tag{1.9}$$

现用$\varphi-\Phi$乘(1.9)，并应用格林公式得

$$-\int_\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\varphi-\Phi)d\Gamma+a(\Phi,\varphi-\Phi)$$

$$=(f,\varphi-\Phi)\leqslant a(\Phi,\ \varphi-\Phi)+j(\varphi)-j(\Phi),\ (\text{利用}(1.7)).$$

故

$$\int_\Gamma\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\varphi-\Phi)+M(\varphi-z_d)^- -M(\Phi-z_d)^-\right)d\Gamma\geqslant 0\quad \forall\varphi\in H^1(\Omega). \tag{1.10}$$

现取(3)

---

(1) $\lambda^+=\mathrm{Sup}(\lambda,\ 0)$，$\lambda^-=\mathrm{Sup}(-\lambda,\ 0)$，

(2) Ω中C^∞函数的空间，有紧支集。

(3) 我们把(1.10)扩张为仅仅定义在Γ上的函数，且属于$L^2(\Gamma)$.于是(1.11)是有效的。

(1.11) $\varphi = z_d + \lambda\psi$，$\psi \geqslant 0$ 在 Γ 上，$\lambda \geqslant 0$；

(1.10)变成

(1.12) $$\lambda\int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\psi d\Gamma + X \geqslant 0,$$

这里

(1.13) $$X = \int_\Gamma \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(z_d - \Phi) - M(\Phi - z_d)^-\right) d\Gamma.$$

在(1.12)中令 $\lambda \to +\infty$，我们看到

(1.14) $$\int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\psi d\Gamma \geqslant 0, \ \forall\psi \geqslant 0, \text{即}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \geqslant 0 \qquad \text{在}\Gamma\text{上。}$$

其次，(1.12)给出

(1.15) $X \geqslant 0$.

现于(1.10)中取 φ 为：

(1.16) $\varphi = z_d - \lambda\psi$，$\psi \geqslant 0$ 在 Γ 上，$\lambda \geqslant 0$.

于是有

$$\lambda\int_\Gamma \left(M - \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)\psi d\Gamma + X \geqslant 0,$$

从而

(1.17) $$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \leqslant M \qquad \text{在}\Gamma\text{上.}$$

可是，（引用(1.16)，(1.17)）

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(z_d - \Phi) - M(\Phi - z_d)^- = -\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\Phi - z_d)^+ - \left(M - \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)(\Phi - z_d)^- \leqslant 0,$$

因此 $X \leqslant 0$．这一事实与(1.15)一起指出

(1.18) $$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\Phi - z_d)^+ + \left(M - \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)\cdot(\Phi - z_d)^- = 0.$$

上面的计算可以反过来，故(1.7)等价于(1.9)，(1.14)，(1.17)，(1.18)。但容易验证(1.3)等价于(1.14)，(1.17)，(1.18).

注1.4. 如 j 可微，则(1.7)就等价于非线性边值问题：

(1.19) $$a(\Phi,\varphi) + (j'(\Phi), \varphi) = (f,\varphi) \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega).$$

事实上，j 不可微，因此 j' 实际上是一多值算子，故(1.7)可以考虑为一多值方程。

注1.5. 因 $a(y, \varphi)$ 是对称的，故(1.7)等价于使

(1.20) $$K(\varphi) = \tfrac{1}{2}a(\varphi,\varphi) + j(\varphi) - (f,\varphi) \quad \text{在}H^1(\Omega)\text{上}$$

极小。但(1.7)在非对称情形也有意义。在任何情形下，我们现在正在考虑的对称情形里，由(1.20)即得

定理1.1. 问题(1.7)有唯一解。

注1.6. 在非对称情形里，在

(1.21) $$a(\varphi,\varphi) \geqslant \alpha\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)}, \ \alpha > 0, \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega)$$

这一假定下，可以证明(1.7)的解的存在性和唯一性（参考J. L. Lions和G. Stampacchia[1]）。

注1.7. Duvaut-Lions[1]中在一种不同的意义下对力学问题引入了上面那种形式的变分不等式。

§2. 发展问题

2.1. 问题的表述

我们假定状态由：

(2.1) $$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f \quad \text{在}Q = \Omega \times (0,T)\text{中,}$$

(2.2) $$y(x,0) = y_0(x) \quad \text{在}\Omega\text{中,}$$

(2.3) $$\frac{\partial y}{\partial\nu} = v \quad \text{在}\Sigma = \Gamma \times (0,T)\text{上}$$

的解给定。假定 f 和 y_0 分别给定在 $L^2(Q)$ 和 $L^2(\Omega)$ 中，设 $v \in U = L^2(\Sigma)$.

问题(2.1)，(2.2)，(2.3)有唯一解 $y = y(v)$，这一解（特别）使得

(2.4) $y(v) \in L^2(0,T;\ H^1(\Gamma))$，

映象 $v \to y(v)$ 由 $L^2(\Sigma)$ 到 $L^2(0,T;\ H^1(\Gamma))$ 是仿射连续的。

问题的变分表述法是：

(2.5) $$\left(\frac{\partial y}{\partial t}, \varphi\right) + a(y,\varphi) = (f,\varphi) + \int_\Gamma v\varphi d\Gamma, \ \forall\varphi \in H^1(\Gamma),$$

这里

(2.6) $a(y,\varphi)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx.$

性能指标函数为

(2.7) $J(v)=\int_{\Sigma}|y(v)-z_d|^2d\Sigma,$

这里z_d被给定在$L^2(\Sigma)$中。

约束：我们假定$v\in U_{ad}$，这里

(2.8) $U_{ad}=\{v|v\in L^2(\Sigma),0\leqslant v\leqslant M\}.$

问题是

(2.9) $\inf J(v),\ v\in U_{ad}.$

这一问题有唯一解u.

沿与第一章中类似的路线，可以导出一最优性系统。现在我们企图给出一个"次优"解，它基于"先验反馈"。

2.2. 先验反馈

我们仿效§1.1中同样的讨论方法。

如$y(v)$"变得"$>z_d$，我们用v的极小值，即$u=0$，如$y(v)$"变得"$<z_d$，我们取$u=M$. 于是，我们引导到找寻——如可能的话——一函数Φ，其满足

(2.10) $\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\Delta\Phi=f$ 在Q中，

(2.11) $\Phi(x,0)=y_0(x)$ 在Ω中，

而且在Σ上满足条件（类似于(1.3)）：

(2.12) $$\begin{cases}0\leqslant\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\leqslant M,\\ \Phi>z_d\Rightarrow\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}=0,\\ \Phi<z_d\Rightarrow\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}=M.\end{cases}$$

我们有完全类似于注1.1，1.2的注释，和类似于§1，1.1，1.2的未解决的问题。

2.3. 发展变分不等式

我们用(1.6)定义j. 与§1.2中一样，我们证明问题(2.10)，(2.11)，(2.12)等价于

(2.13) $$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t},\varphi-\Phi\right)+a(\Phi,\varphi-\Phi)+j(\varphi)-j(\Phi)\geqslant(f,\varphi-\Phi)\quad\forall\varphi\in H^1(\Omega)$$

和条件(2.11).

这是一个发展的变分不等式（参见 Lions-Stampacchia[1]，Duvaut-Lions[1]).

可以证明(2.13)的（弱）解的存在性和唯一性。这一结果的证明参考本文末的书目中的有关文献。最初等的证明方法是利用有限差分法。

我们引进一网格Δt，并定义Φ^n为$\Phi(n\Delta t)$的"近似"。从

(2.14) $\Phi^0=y_0$

开始，并由下式归纳地定义Φ^n，$n\geqslant1$：

(2.15) $$\left(\frac{\Phi^n-\Phi^{n-1}}{\Delta t},\ \varphi-\Phi^n\right)+a(\Phi^n,\varphi-\Phi^n)+j(\varphi)-j(\Phi^n)\geqslant(f^n,\varphi-\Phi^n)$$

这里，比如

$$f^n=\frac{1}{\Delta t}\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t}f(\sigma)d\sigma.$$

因a是对称的，故求解(2.15)等价于在$H^1(\Omega)$上使

(2.16) $$\frac{1}{2}a(\varphi,\varphi)+\frac{1}{2\Delta t}(\varphi,\varphi)+j(\varphi)-(f,\varphi)-\frac{1}{\Delta t}(\Phi^{n-1},\ \varphi)$$

极小，从而唯一地定义Φ^n.

其次，可以证明（参见 Glowinski, Lions, Trémolieres[1]）阶梯函数$\Phi_{\Delta t}$（它在$[n\Delta t,(n+1)\Delta t]$上等于$\Phi^n$）在$L^2(0,T;\ H^1(\Omega))$中当$\Delta t\to0$时收敛于$\Phi$.

§3. 发展变分不等式的另一类型

3.1. 强迫问题（参见 Duvaut-Lions[1]）

假定我们考虑这样一个系统：其状态由(2.1)给出并满足(2.2)，而且假定$\frac{\partial y}{\partial t}$在$\Sigma$上要$\geqslant0$，且$\frac{\partial y}{\partial\nu}$具"极小"的支出。于是如果$\frac{\partial y}{\partial t}>0$，我们取$\frac{\partial y}{\partial\nu}=0$，如$\frac{\partial y}{\partial t}$

$=0$，则取$\dfrac{\partial y}{\partial \nu}>0$.

概括起来：

(3.1) $\quad \dfrac{\partial y}{\partial t}\geqslant 0,\dfrac{\partial y}{\partial \nu}\geqslant 0,\dfrac{\partial y}{\partial t}\;\dfrac{\partial y}{\partial \nu}=0$

在Σ上。

我们找到满足(2.1)，(2.2)，和(3.1)的一个函数y.

3.2. 发展变分不等式

可以验证上述问题等价于找出y，使得

(3.2) $\quad \left(\dfrac{\partial y}{\partial t},\ \varphi-\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)+a\left(y,\ \varphi-\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)\geqslant\left(f,\varphi-\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)$

$\forall\varphi\in K$,

(3.3) $\quad \dfrac{\partial y}{\partial t}\in K$,

(3.4) $\quad y(x,\ 0)=y_0(x)$,

这里K是$H^1(\Omega)$的非空闭凸子集，定义为：

(3.5) $\quad K=\{\varphi|\varphi\in H^1(\Omega)$,

$\varphi\geqslant 0$ 在Γ上$\}$.

我们可以证明（参见Duvaut-Lions [1]）(3.2),(3.3),(3.4)有唯一解。

注3.1. 问题(3.2),(3.3)，(3.4)是与§2中考虑的类型不同的发展变分不等式。

第三章 先验反馈和拟变分不等式

§1. 定常问题

1.1. 问题的表述

我们再来考察由下面的方程给出的状态

(1.1) $\quad Ay(v)=f,\ A=-\Delta+I$,

(1.2) $\quad \dfrac{\partial}{\partial \nu}y(v)=v \quad$ 在Γ上.

对于$\varphi\in H^1(\Omega)$，令

(1.3) $\quad m(\varphi)=\varphi$在Γ上的均值

$$=\frac{1}{\text{meas.}(\Gamma)}\int_\Gamma\varphi d\Gamma,$$

并考虑性能指标函数

(1.4) $\quad J(v)=\int_\Gamma |y(v)-my(v)|^2 d\Gamma$

问题是在U_{ad}上使J极小：

(1.5) $\quad U_{ad}=\{v|0\leqslant v\leqslant M\}$.

容易验证存在$u\in U_{ad}$使得

(1.6) $\quad J(u)=\inf J(v),\ v\in U_{ad}$.

u的唯一性一般不成立。事实上，考虑

(1.7) $\quad \begin{cases}A\varphi=f\\ \varphi=\text{常数} \quad \text{在}\ \Gamma\ \text{上}\end{cases}$

的所有解。如我们由

(1.8) $\quad \begin{cases}A\Phi=f\ \text{在}\ \Omega\ \text{中},\ \Phi=0\ \text{在}\ \Gamma\ \text{上},\\ A\psi=0\ \text{在}\ \Omega\ \text{中},\ \psi=1\ \text{在}\ \Gamma\ \text{上}\end{cases}$

定义Φ和ψ，则

(1.9) $\quad \varphi=\Phi+\lambda\psi,\ \lambda\in R$

满足(1.7)，如我们定义

(1.10) $\quad v=\dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu}+\lambda\dfrac{\partial\psi}{\partial\nu}$

则$J(v)=0$，且v是一最优控制当且仅当它属于U_{ad}.

总括起来：如存在常数λ使得

(1.11) $\quad 0\leqslant\dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu}+\lambda\dfrac{\partial\psi}{\partial\nu}\leqslant M$ 在Γ上，

则所有的最优控制由(1.10)给出。

我们可以写出最优性系统如下：设u是一最优控制，并令$y(u)=y$. 由下式引入伴随状态p：

(1.12) $\quad \begin{cases}Ap=0 \quad \text{在}\ \Omega\ \text{中}\\ \dfrac{\partial p}{\partial\nu}=y-m(y) \quad \text{在}\ \Gamma\ \text{上}.\end{cases}$

而最优性条件是

(1.13) $\quad \int_\Gamma p(v-u)d\Gamma\geqslant 0\ \ \forall v\in U_{ad}$.

事实上，条件$\frac{1}{2}(J'(u),v-u)\geqslant 0$,

$\forall v\in U_{ad}$变成

$$\int_\Gamma(y-m(y))(y(v)-y-m(y(v)-y))d\Gamma\geqslant 0$$

即

$$\int_\Gamma(y-m(y))(y(v)-y)d\Gamma\geqslant 0;$$

用$y(v)-y$乘(1.12)，应用Green公式给出(1.13)。

现在我们基于类似于第二章§1中的直

接的考虑，给出一个解。

1.2. **先验反馈**

如y"变得"小于其均值$M(y)$，我们就采用v的极大值，即$\frac{\partial y}{\partial \nu}=M$；如$y$"变得"大于$M(y)$，我们就采用$v$的极小值，即$\frac{\partial y}{\partial \nu}=0$.

于是我们就引导到解——如可能的话——如下问题：

(1.14) $A\Phi=f$ 在Ω中，

$$(1.15)\quad \begin{cases} 0\leqslant\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\leqslant M, \\ \Phi<m(\Phi)\Rightarrow\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}=M, \\ \Phi>m(\Phi)\Rightarrow\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}=0. \end{cases}$$

注1.1. 如果我们找出(1.14)，(1.15)的一个解Φ，则可以取次优控制为

$$(1.16)\quad w=\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}.$$

注1.2. （类似于第二章§1注1.1）。同样的推理也适用于其他泛函，比如：

$$(1.17)\quad J_1(v)=\int_\Gamma |y-m(y)|d\Gamma、$$

未决问题：类似于第二章§1.1的问题1.1和1.2.

现在我们要证明，在

(1.18) $f\geqslant 0$

这一假设下，(1.16)，(1.15)的解的存在性。

1.3. *表述为拟变分不等式*

对于$\varphi,\psi\in H^1(\Omega)$，我们定义

$$(1.19)\quad j(\varphi,\psi)=M\int_\Gamma(\varphi-m(\psi))^-d\Gamma.$$

我们将验证(1.14)，(1.15)等价于

$$(1.20)\quad a(\Phi,\varphi-\Phi)+j(\varphi,\Phi)-j(\Phi,\Phi)\geqslant(f,\varphi-\Phi)\quad \forall\varphi\in H^1(\Omega).$$

注1.3. 不等式(1.20)是一拟变分不等式。(1.20)的结构显然是变分不等式结构的一种扩充。

注1.4. 拟变分不等式由Bensoussan和本作者引入(参见Bensoussan-Lions[1]，[3]，Bensoussan-Goursat-Lions[1]）用于脉冲控制问题（见第八章）。(1.20)型的拟变分不等式稍稍不同于前面所引入的拟变分不等式。Bensoussan-Lions[4]中含有完整的报告。

(1.14)，(1.15)与(1.20)间等价性的证明. 在(1.20)中首先取$\varphi=\Phi\pm\psi,\psi\in D(\Omega)$，就表明$\Phi$满足(1.16)。用$\varphi-\Phi$乘(1.16)，并应用格林公式给出

$$(1.21)\quad \int_\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\varphi-\Phi)d\Gamma+j(\varphi,\Phi)-j(\Phi,\Phi)\geqslant 0\quad\forall\varphi.$$

其次，在(1.21)中取

(1.22) $\varphi=m(\Phi)\pm\lambda\psi$，$\lambda\in R_+$，$\psi\geqslant 0$ 在Γ上.

我们得出两个条件

$$(1.23)\quad \begin{cases} \lambda\int_\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\psi d\Gamma+X\geqslant 0, \\ \lambda\int_\Gamma\psi\left(M-\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)d\Gamma+X\geqslant 0, \end{cases}$$

这里

$$(1.24)\quad X=\int_\Gamma\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(m(\Phi)-\Phi)-M(\Phi-m(\Phi))^-\right]d\Gamma.$$

故知(1.15)成立（如第二章§1.2）。

注1.5. 看来不可能把问题(1.14)，(1.15)表述为变分不等式。

1.4. *拟变分不等式的解的存在性*(Ⅰ)

现在我们利用一迭代过程证明(1.20)的极大解的存在性。

我们从Neumann问题

$$(1.25)\quad A\Phi^0=f \text{ 在}\Omega\text{中}, \frac{\partial\Phi^0}{\partial\nu}=M$$

的解Φ^0开始。然后定义Φ^1为变分不等式

$$(1.26)\quad a(\Phi^1,\varphi-\Phi^1)+j(\varphi,\Phi^0)-j(\Phi^1,\Phi^0)\geqslant(f,\varphi-\Phi^1),\quad\forall\varphi$$

的解。（注意，求解(1.26)等价于在 $H^1(\Omega)$ 上使

$$\frac{1}{2}a(\varphi,\varphi)+j(\varphi,\Phi^0)-(f,\varphi)$$

极小。）然后，我们归纳地定义

(1.27) $a(\Phi^n,\varphi-\Phi^n)+j(\varphi,\Phi^{n-1})-j(\Phi^n,\Phi^{n-1})\geqslant(f,\varphi-\Phi^n)\quad\forall\varphi.$

我们现在证明

(1.28) $\Phi^0\geqslant\Phi^1\geqslant\cdots\geqslant\Phi^{n-1}\geqslant\Phi^n\geqslant\cdots\geqslant 0.$

注意到(1.25)等价于

(1.29) $a(\Phi^0,\varphi)=(f,\varphi)+\int_\Gamma M\varphi d\Gamma.$

在(1.26)中取，

(1.30) $\varphi=\Phi^1=-(\Phi^0-\Phi^1)^-$，

即 $\varphi=\inf(\Phi^0,\Phi^1)$，

又在(1.29)中取$\varphi=(\Phi^0-\Phi^1)^-$.我们得出

(1.31) $a(\Phi^0-\Phi^1,(\Phi^0-\Phi^1)^-)-Y\geqslant 0,$

这里

(1.32) $Y=M\int_\Gamma(\Phi^0-\Phi^1)^-d\Gamma+j(\Phi^1,\Phi^0)-j(\inf(\Phi^0,\Phi^1),\Phi^0).$

容易验证

(1.33) $Y\geqslant 0,$

又因$a(\psi,\psi^-)=-a(\psi^-,\psi^-)$，故(1.31)给出

(1.34) $a((\Phi^0-\Phi^1)^-,(\Phi^0-\Phi^1)^-)+Y\leqslant 0.$

但是(1.33)，(1.34) 意指 $(\Phi^0-\Phi^1)^-=0$，即$\Phi^0\geqslant\Phi^1$.

设我们递归地容许有 $\Phi^1\geqslant\Phi^2\geqslant\cdots\geqslant\Phi^{n-1}$，我们现在证明

(1.35) $\Phi^{n-1}\geqslant\Phi^n.$

令 $m(\Phi^j)=m^j$，并注意到 $\Phi^{n-2}\geqslant\Phi^{n-1}$ 意味着

(1.36) $m^{n-2}\geqslant m^{n-1}.$

在(1.27)中用 $\varphi-\Phi^n=-(\Phi^{n-1}-\Phi^n)^-$ 来选取φ，即 $\varphi=\inf(\Phi^{n-1},\Phi^n)=\inf$，而且在类似的关于 Φ^{n-1} 的变分不等式中取 $\varphi-\Phi^{n-1}=(\Phi^{n-1}-\Phi^n)^-$，即

$$\varphi=\sup(\Phi^{n-1},\Phi^n)=\sup.$$

把这些结果加起来，得

(1.37) $a((\Phi^{n-1}-\Phi^n)^-,(\Phi^{n-1}-\Phi^n)^-)+Z\leqslant 0$

这里

$$Z=j(\Phi^{n-1},\Phi^{n-2})+j(\Phi^n,\Phi^{n-1})-j(\inf,\Phi^{n-1})-j(\sup,\Phi^{n-2}).$$

因而 $Z=M\int_\Gamma zd\Gamma$，这里

$$z=(\Phi^{n-1}-m^{n-2})^-+(\Phi^n-m^{n-1})^--(\inf-m^{n-1})^--(\sup-m^{n-2})^-.$$

我们来考察各种可能的情形。

如 $\Phi^{n-1}\geqslant m^{n-2}$且 $\Phi^n\geqslant m^{n-1}$，则 $z=0$.

如 $\Phi^{n-1}<m^{n-2}$ 且 $\Phi^n<m^{n-1}$，则仍有 $z=0$.

如 $\Phi^{n-1}\geqslant m^{n-2}$ 且 $\Phi^n<m^{n-1}$，则 $z=m^{n-1}-\Phi^n-m^{n-1}+\inf(\Phi^n,\ \Phi^{n-1})=0$，因$m^{n-1}\leqslant m^{n-2}$，故 $\Phi^n<\Phi^{n-1}$.

考虑最后一种情形 $\Phi^{n-1}<m^{n-2}$，$\Phi^n\geqslant m^{n-1}$。

因 $\Phi^n\geqslant m^{n-1}$，故有 $\inf\geqslant m^{n-1}$，且

$$z=m^{n-2}-\Phi^{n-1}-(\sup-m^{n-2})^-.$$

如 $\sup\geqslant m^{n-2}$，则 $z\geqslant 0$.

如$\sup<m^{n-2}$，则 $z=\sup-\Phi^{n-1}\geqslant 0$.

故在一切可能情形里 $z\geqslant 0$，因此 $z\geqslant 0$，且(1.37)意指$(\Phi^n-\Phi^{n-1})^-=0$，故得(1.35).

现在根据

$$\varphi-\Phi^n=(\Phi^n)^-，\text{即}\varphi=(\Phi^n)^+$$

来选取(1.27)中的φ.我们得到

(1.38) $a((\Phi^n)^-,(\Phi^n)^-)+j(\Phi^n,\Phi^{n-1})-j((\Phi^n)^+,\Phi^{n-1})+(f,(\Phi^n)^+)\leqslant 0.$

但是 $j(\Phi^n,\Phi^{n-1})-j((\Phi^n)^+,\Phi^{n-1})\geqslant 0$，由于我们假定 $f\geqslant 0$，$(f,(\Phi^n)^+)\geqslant 0$，故(1.38)意指$(\Phi^n)^-=0$，即$\Phi^n\geqslant 0$，这就完成了(1.28)的证明。

我们现在证明

定理1.1. 当$n\to\infty$时，序列 Φ^n 在 $H^1(\Omega)$中弱收敛于拟变分不等式(1.20)的一个解Φ，且对一切有限的 p 在 $L^p(\Omega)$中强收敛

于Φ. 这个解Φ在(1.20)的满足$0\leqslant\psi\leqslant\Phi^0$的所有可能的解$\psi$中是极大的。

证明. 在(1.27)中取$\varphi=0$，这就给出(因$j(0,\Phi^{n-1})=0$)

$$a(\Phi^n, \Phi^n)+j(\Phi^n,\Phi^{n-1})\leqslant(f,\Phi^n);$$

故得

$$\|\Phi^n\|_{H^1(\Omega)}\leqslant c. \tag{1.39}$$

由(1.28)和(1.39)知$\Phi^n\to\Phi$（在定理给定的意义下），如果Φ^n在$H^1(\Omega)$中弱收敛于Φ，则Φ^n在$L^2(\Gamma)$中强收敛于Φ（参见Lions-Magenes[1]）。故

$$j(\varphi,\Phi^{n-1})\to j(\varphi,\Phi)$$
$$j(\Phi^n,\Phi^{n-1})\to j(\Phi,\Phi),$$

而且(1.27)给出

$$a(\Phi,\varphi)+j(\varphi,\Phi)-j(\Phi,\Phi)-(f,\varphi-\Phi)\geqslant\underline{\lim}\, a(\Phi^n,\Phi^n)\geqslant a(\Phi,\Phi).$$

现在设ψ是(1.20)的一个使得$\Phi^0\geqslant\psi$的解。于是用归纳法可证$\Phi^n\geqslant\psi,\forall n$，故$\Phi\geqslant\psi$. 证毕。

1.5. 拟变分不等式的解的存在性(Ⅱ)

我们由(1.25)的“上解”开始归纳。可以从由

$$A\psi^0=f\text{在}\Omega\text{中}，\frac{\partial\psi^0}{\partial\nu}=0\text{在}\Gamma\text{上} \tag{1.40}$$

定义的一个“下解”ψ^0开始。

于是我们用

$$a(\psi^n,\varphi-\psi^n)+j(\varphi,\psi^{n-1})-j(\psi^n,\psi^{n-1})\geqslant(f,\varphi-\psi^n),\ \forall\varphi \tag{1.41}$$

定义ψ^1，$\psi^2,\cdots$，并证明有

$$0\leqslant\psi^0\leqslant\psi^1\leqslant\cdots\leqslant\psi^{n-1}\leqslant\psi^n\leqslant\cdots\leqslant\Phi^0. \tag{1.42}$$

于是ψ^n（在$H^1(\Omega)$中弱而在$L^p(\Omega)$中强）收敛于(1.20)的一个极小解。

注1.6. §1.1中的讨论指出，一般说来不存在拟变分不等式解的唯一性。我们猜测，如果不存在满足(1.11)的常数λ，拟变分不等式(1.20)就有唯一解。

注1.7. 在Γ上有三个区域

$$\Gamma_0=\{x|\Phi>m(\Phi)\},$$
$$\Gamma_M=\{x|\Phi<m(\Phi)\},$$
$$S=\{x|\Phi=m(\Phi)\}.$$

我们再次看出这一问题是自由边界型问题。

§2. 发展问题

2.1. 问题的表述

假定系统的状态由下面的方程给出：

$$\frac{\partial y}{\partial t}-\Delta y=f\quad\text{在}Q=\Omega\times(0,T)\text{中} \tag{2.1}$$

$$y(x,0)=y_0(x)\quad\text{在}\Omega\text{中}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial\nu}=v\quad\text{在}\Sigma=\Gamma\times(0,T)\text{上}. \tag{2.3}$$

我们定义

$$my(t)=my=\frac{1}{\text{meas.}\Gamma}\int_\Gamma y(\cdot,t)\,d\Gamma \tag{2.4}$$

并考虑性能指标函数

$$J(v)=\int_\Sigma|y(v)-my(v)|^2d\Gamma, \tag{2.5}$$

这个函数是我们要在U_{ad}上使之极小化的。这里U_{ad}定义为

$$U_{ad}=\{v|0\leqslant v\leqslant M\}. \tag{2.6}$$

一个“先验反馈”解——如其可能的话——由如下微分方程的解给出：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\Delta\Phi=f\quad\text{在}Q\text{中}, \tag{2.7}$$

$$\Phi(x,0)=y_0(x)\quad\text{在}\Omega\text{中}, \tag{2.8}$$

边界条件为

$$\begin{cases} 0\leqslant\dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu}\leqslant M,\\ \Phi<m(\Phi)\Rightarrow\dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu}=M,\\ \Phi>m(\Phi)\Rightarrow\dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu}=0. \end{cases} \tag{2.9}$$

2.2. 表述为发展的拟变分不等式

用类似于§1中的论证，可以证明问题(2.7)，(2.8)，(2.9)等价于

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t},\varphi-\Phi\right)+a(\Phi,\varphi-\Phi)+j(\varphi,\Phi)-j(\Phi,\Phi)\geqslant(f,\varphi-\Phi)\ \forall\varphi\in H^1(\Omega) \tag{2.10}$$

和(2.8)，这里$j(\varphi,\psi)$如(1.19)中定义。不

科技文献 白

等式(2.10)称为发展的拟变分不等式。

可以证明（证明参考 Bensoussan-Lions[4]），假定$f\geqslant 0, y_0\geqslant 0$,就存在(2.10)的极大和极小解。

第四章　对状态的约束

§1.　一例的直接研究

1.1.　问题的表述

设Ω是R^n中具光滑边界Γ的一有界开集，设$\mathscr{L}$是一包含在Γ中的$(n-2)$维光滑簇。在物理的情况中，$n=3$，$\mathscr{L}$就是Γ上的一条曲线（见图1）

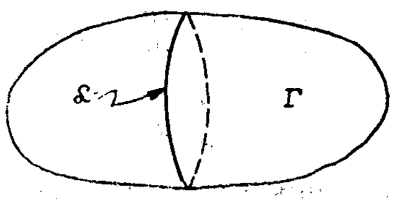

图1

状态$y(v)$由下面的方程给出：

(1.1)　　$Ay(v)=f$　在Ω中(1)

(1.2)　　$\dfrac{\partial y(v)}{\partial\nu}=v$　在Γ上.

设U_1是$U=L^2(\Gamma)$的一个闭凸子集，设g是$\mathscr{L}$上一给定函数。我们定义

(1.3)　$U_{ad}=\{v|v\in U_1, y(v)=g$ 在$\mathscr{L}$上$\}$.

假设U_{ad}非空（参见下面的一个例子）。我们验证定义（1.3）有意义；事实上，对$f\in L^2(\Omega), v\in L^2(\Gamma)$，就有$y(v)\in H^1(\Gamma)$，故$y(v)|_{\mathscr{L}}$是有意义的。我们还得出$U_{ad}$是非空的必要条件：

(1.4)　　　$g\in H^{1/2}(\mathscr{L})$.

这可由一般的迹定理得出（参见Lions-Magenes[1]）.

例1.1.　如$U_1=L^2(\Gamma)$，则条件(1.4)是U_{ad}为非空的充分条件。事实上，我们定义$G\in H^1(\Gamma)$，使得$G|_{\mathscr{L}}=g$并解

(1.5)　$A\Phi=f$　在Ω中，$\Phi|_\Gamma=G$.

于是$\dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu}\in L^2(\Gamma)$，并且若选取$v=\dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu}$，就看出$v\in U_{ad}$.

集U_{ad}是闭凸的。

考虑性能指标函数

(1.6)

$$J(v)=\int_\Gamma|y(v)-z_d|^2d\Gamma+N\int_\Gamma v^2d\Gamma.$$

正像在第一章里那样，我们看出在U_{ad}中存在唯一u使得

(1.7)　$J(u)=\inf J(v)$,　$v\in U_{ad}$.

如果令$y(u)=y$，则u由下式表征，

$$\frac{1}{2}(J'(u), v-u)\geqslant 0\quad\forall v\in U_{ad},\text{ 即}$$

(1.8)　$$\int_\Gamma(y-z_d)(y(v)-y)d\Gamma+N\int_\Gamma u(v-u)d\Gamma\geqslant 0\quad\forall v\in U_{ad}.$$

1.2.　最优性系统

如第一章那样，由

(1.9)　$Ap=0$，$\dfrac{\partial p}{\partial\nu}=y-z_d$　在Γ上

引入伴随状态p.我们看出(1.8)等价于

(1.10)　$$\int_\Gamma(p+Nu)(v-u)d\Gamma\geqslant 0\quad\forall v\in U_{ad}.$$

当U_{ad}由不仅用v而且也用$y(v)$表达的约束定义时，困难就在于解释(1.10).

下面我们给出某些有可能排除这一困难的方法。

§2.　用Γ上的拟微分算子重新表述问题

2.1.　算子$\mathscr{A}$

设Φ是

(2.1)　$A\Phi=0$，$\Phi=\varphi$　在Γ上

的解，这里φ（比如说）是给定在$H^1(\Gamma)$中。于是定义

(2.2)　$\mathscr{A}\varphi=\dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu}$.

我们看出

(1)为叙述简单起见，我们总假定$A=-\Delta+I$.