现代物理学丛书

杨—巴克斯特方程和量子包络代数

马中骐 著

科学出版社

现代物理学丛书

杨-巴克斯特方程和量子包络代数

马中骐 著

科学出版社

1993

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书系统介绍杨-巴克斯特方程和物理模型的关系、求解杨-巴克斯特方程的系统方法，以及为寻找杨-巴克斯特方程解而于近年建立起来的量子包络代数的基本理论和具体计算方法．本书是这一领域的一本入门书，尽量自成体系，开始介绍基础数学工具，讨论如何从物理模型中归纳出杨-巴克斯特方程，然后迅速把读者引入这一领域的科研第一线．本书可供理论物理专业大学生、研究生和科研人员参考．

EN100/02

现代物理学丛书

杨-巴克斯特方程和量子包络代数

马 中 骐 著

责任编辑 张邦固

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1993 年 2 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1993 年 2 月第一次印刷 印张：11 1/8

印数：平 1—900 插页：精 2

精 1—300 字数：290 000

ISBN 7-03-003384-1/O·613（平）

ISBN 7-03-003385-X/O·614（精）

定价：平 装 12.50 元

布脊精装 14.00 元

《现代物理学丛书》编委会

主　编　周光召

副主编　朱洪元　汪德昭　谢希德

编　委　于　敏　王之江　王天眷　冯　端

卢鹤绂　吴式枢　汤定元　何祚庥

李整武　张志三　荀清泉　郝柏林

郭贻诚　葛庭燧

前　　言

精确解在物理学发展中占有特殊重要的地位．在量子力学发展初期，尽管对理论的若干基本概念及其解释存在着争论，但氢原子问题和简谐振子问题的精确解与实验极好地吻合，奠定了量子力学的基础．1967 年杨振宁教授得到有排斥 δ 作用势的一维薛定谔多体系统的精确解，和 1972 年巴克斯特（Baxter）教授得到八顶角统计模型的精确解，是多体统计理论近年来的重大进展．在这两个模型精确求解过程中出现一个关键性的非线性方程，后来被称为杨-巴克斯特方程．利用此方程的解，这些模型就可以精确求解．

杨-巴克斯特方程反映了某种有向路径的拓扑平移不变性，这是杨-巴克斯特方程在许多物理和数学领域起重要作用的根本原因．在完全可积统计模型、共形场论、拓扑场论、辫子群理论、环结（link）和纽结（knot）理论等领域中，杨-巴克斯特方程都起关键作用．近 20 年来，理论物理学家和数学家对杨-巴克斯特方程进行了深入的研究，特别在 80 年代中取得了重大的突破．为求解杨-巴克斯特方程建立起来的量子包络代数理论，本身就是数学理论的重大发展．琼斯(Jones)和德林费特（Drinfel'd）因他们在这一领域的突出贡献而荣获 1990 年数学最高奖——费尔兹(Fields)奖．

在这一领域成为理论物理界和数学界研究热点的前夕，1987 年杨振宁教授在南开大学数学所再一次建议中国理论物理工作者和数学工作者关注和投入这一领域的研究，并亲自邀请国际上在这一领域做出重大贡献的专家，如法捷耶夫（Faddeev）、弗里丹(Friedan)、河野（Kohno）、神保（Jimbo）等来中国作系统讲座，使中国人在这一领域迅速跟上国际发展的步伐，并做出自己应有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

的贡献。

众所周知，群论是研究对称性的有力工具，群论方法已在物理中得到广泛的应用。量子包络代数理论是李代数理论的直接推广，它描写的新的对称性也必将在物理上得到广泛的应用。这些研究还刚开始，中国科学家已经做出了有特色的工作，它的进一步发展有着广阔的前景。

本书拟从理论物理工作者的角度介绍这一领域近年来的重要发展。结合作者本人的科研实践和体会，作为一本入门参考书，本书将从基础开始，采用物理工作者易于接受的语言，深入浅出地向读者系统讲述这一领域的基本理论和运算技巧，使读者能够迅速走上科研第一线开展工作。

本书的编排如下：第一章介绍这一领域用到的基本数学工具，主要是群论方法，其中与辫子群有关的内容包含了某些最新科研成果。第二章详细推演了杨振宁教授提出的有排斥 δ 作用势的一维薛定谔多体系统精确解的计算，适当讲述巴克斯特教授提出的六顶角模型的计算，使读者了解杨-巴克斯特方程产生的物理背景。本章部分内容参考了赵保恒教授在南开数学所的讲演。杨-巴克斯特方程包含两种参数：量子参数和谱参数。第三章和第六章分别讨论在一个参数取极限的特殊情况下，杨-巴克斯特方程的解及其性质。第六章还讲述了环结和纽结理论的最新发展。第四章介绍量子包络代数理论。这是 80 年代数学上的一个重大突破。要完全讲清它的新发展需要更多的数学工具。本书按照物理工作者的需要，作了深入浅出的介绍。作为角动量理论和李群理论的量子相似，第五章详细讲述了量子包络代数的不可约表示，量子克莱布施-戈登（Clebsch-Gordan）系数和量子拉卡（Racah）系数的计算方法，物理工作者读起来会倍感亲切。第七章系统总结了寻找带谱参数的杨-巴克斯特方程三角解的三种方法，分析它们各自的优缺点，也讨论了由三角解计算有理解的一般方法。第八章讨论量子参数是单位根的情况。这方面的理论目前正在发展之中。本书只作初步介绍。本章还讨论一种具有量子包络代数对称

性的物理模型，为量子包络代数的物理应用开拓一些思路。

本书的主要内容，作者曾在上海交通大学、复旦大学、中国科学院物理研究所、中国高等科技中心、北京大学、兰州大学、厦门大学等单位作过长短不等的讲座，部分内容曾在若干国际会议上作过报告。在此基础上反复修改，形成本书的大纲和初稿。由于这一领域正在迅速发展之中，本书只能围绕作者本人的科研方向，介绍这一领域的某些基本进展。限于作者的水平和能力，错误和遗漏在所难免，敬请读者批评指正。

作者深深感谢杨振宁教授的指引，使作者得以进入这一领域，并开展一些工作。作者感谢赵保恒教授、侯伯宇教授和侯伯元教授在科研上的合作，本书包括了合作科研的成果。

作　者
高能物理研究所
1992年4月

目　　录

第一章　数学准备

§1.1　置换群

一　置换、轮换和对换

N个客体排列次序的变换称为置换．置换

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & N\\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_N\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

是将原来排在第 a 位置的客体变到第 p_a 位置的变换．在(1.1)式中重要的是同一列上下两个数字的对应关系，列之间交换不改变置换变换．两个置换的乘积定义为相继作两次置换，例如

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&2&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3&4&5&2&1\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&2&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.2}$$

在N个客体中，让n个客体顺序替换，其余客体不变，称为轮换．轮换可用一行的矩阵描写：

$$(a_1\ a_2\cdots a_n)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n & b_1 & b_2\cdots\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 & b_1 & b_2\cdots\end{pmatrix} \tag{1.3a}$$

这一行数的排列次序不能颠倒，但可以顺序轮换：

$$(a_1\ a_2\cdots a_{n-1}\ a_n)=(a_2\ a_3\cdots a_n\ a_1) \tag{1.3b}$$

n 称为该轮换的轮换长度．任何置换可以分解为不含公共客体的轮换乘积．显然这些轮换的乘积次序可以交换．例如

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&2&1\end{pmatrix}=(1\ \ 3\ \ 5)\ (2\ \ 4)=(2\ \ 4)\ (1\ \ 3\ \ 5)$$

在这种分解中置换包含的各种长度的轮换数目称为该置换的轮换

结构．例如上式描写的置换包含一个长度为 3 的轮换和一个长度为 2 的轮换，它的轮换结构是 (3,2)。

N 个客体共有 $N!$ 种不同的置换，在(1.2)式给出的乘积规则下，它们构成群，称为 N 次置换群 S_N．在 S_N 中互相共轭的元素有相同的轮换结构，因此，轮换结构可以用来描写置换群的类：

$$(l_1, l_2, \cdots, l_N), \quad \sum_{j=1}^{N} l_j = N$$

长度为 2 的轮换称为对换．任何置换可以分解为若干个对换的乘积．这分解不是唯一的，但在这分解中包含的对换数目的偶奇性保持不变．分解中包含偶(奇)数个对换的置换称为偶(奇)置换．偶置换的集合构成置换群指数为 2 的不变子群，称为交代子群 (alternating group)。

相邻客体的对换

$$P_a = (a \quad a+1) \tag{1.4a}$$

在对换中处于特殊地位．任何对换都可表为相邻客体对换的乘积

$$(d \quad a) = (a \quad d) = P_{a-1}P_{a-2}\cdots P_{d+1}P_dP_{d+1}\cdots P_{a-2}P_{a-1} \tag{1.4b}$$

P_a 满足如下乘积规则：

$$P_aP_b = P_bP_a, \quad 当 \ |a-b| \geqslant 2 \tag{1.5a}$$

$$P_aP_{a+1}P_a = P_{a+1}P_aP_{a+1} \tag{1.5b}$$

$$P_a^2 = E \tag{1.5c}$$

若引入长度为 N 的轮换

$$W = (1 \quad 2 \cdots N) = P_1P_2\cdots P_{N-1} \tag{1.6a}$$

则

$$P_a = WP_{a-1}W^{-1} = W^{a-1}P_1W^{1-a} \tag{1.6b}$$

注意

$$W^{-1} = W^{N-1} \tag{1.6c}$$

置换群的任何元素都可写为两个生成元 P_1 和 W 的乘积，即置换群的秩为 2。

二　杨图、杨表和杨算符

对于 N 的一组配分数 $[\lambda_1 \ \lambda_2 \cdots \lambda_N]$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N \geqslant 0, \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = N \tag{1.7}$$

可以画出一个共N格的方格图,它的上面和左面对齐,第 j 行的格数为 λ_j, 这样的方格图称为杨图 (Young pattern), 它描写 S_N 群的一个不可约表示,简记作 $[\lambda]$. 一行的杨图对应恒等表示,即所有元素对应数 1; 一列的杨图称为反对称表示,它是交代群商群的表示, 即偶置换对应 1, 奇置换对应 -1. 关于对角线转置的两杨图互称为关连杨图, 其中任一个表示等于另一个表示和反对称表示的乘积.

将数 1,2,…, N 填入给定杨图,每格填一个数, 这样得到的图表称为杨表 (Young tableau). 如果在杨表的每一行左边的数小于右边的数,每一列上边的数小于下边的数,这样的杨表称为正则杨表. 给定杨图 $[\lambda]$ 对应的不同正则杨表的数目为

$$f_{[\lambda]} = N! / \prod_{j=1}^{N} H_j \tag{1.8}$$

其中 H_j 称为杨图各格的钩形 (hook) 数, 它等于该格所在行右边的格数加上该格所在列下边的格数再加 1. $f_{[\lambda]}$ 正是不可约表示 $[\lambda]$ 的维数,而各正则杨表可以用来标记该表示的行(列).

可以规定正则杨表的大小. 对于同一杨图的两个不同正则杨表,自第一行开始, 对每一行自左至右逐格比较它们填充的数字,第一对不相等的数字,较小数对应的杨表称为较小的正则杨表。可以按正则杨表的大小,自小至大排列,用 1,2,…, $f_{[\lambda]}$ 编号.

对于给定杨表, 同一行客体之间的置换及其乘积称为该杨表的横向置换, 记作 p, 同一列客体之间的置换及其乘积称为该杨表的纵向置换,记作 q. 所有可能的横向置换之和记作 P, 所有可能的纵向置换 q 与其置换字称 δ_q 的乘积之和记作 Q:

$$P = \sum p, \quad Q = \sum \delta_q q \tag{1.9}$$

$$\delta_q = \begin{cases} 1 & \text{当 } q \text{ 是偶置换} \\ -1 & \text{当 } q \text{ 是奇置换} \end{cases} \tag{1.10}$$

与给定杨表对应的杨算符（Young operator）Y 定义为

$$Y = PQ \tag{1.11}$$

正则杨表对应的杨算符称为正则杨算符。它们也可与正则杨表一样重新编号，记作 $Y_\mu^{[\lambda]}$，$\mu = 1,2,\cdots,f_{[\lambda]}$。因为杨算符与给定杨图的给定杨表相联系，所以通常也说杨图 Y 或杨表 Y.

杨算符具有下面基本性质：

$$pY = Y = \delta_q Y q \tag{1.12}$$

$$Y t Y = c_t Y \tag{1.13}$$

其中 t 是置换群群代数中任一量，c_t 是依赖于 t 的常数，可为零。特别有

$$Y^{[\lambda]} Y^{[\lambda]} = \frac{N!}{f_{[\lambda]}} Y^{[\lambda]} \tag{1.14}$$

不同杨图的杨算符互相正交，但同一杨图不同正则杨算符不一定正交：

$$Y_\mu^{[\lambda]} Y_\nu^{[\lambda']} = 0 \quad 当 \quad [\lambda] \neq [\lambda'] \tag{1.15a}$$

$$Y_\mu^{[\lambda]} Y_\nu^{[\lambda]} = 0 \quad 当 \quad \mu > \nu \tag{1.15b}$$

对于给定杨图，为了使正则杨算符正交化，可以引入群代数矢量 $y_\mu^{[\lambda]}$，使

$$(Y_\mu^{[\lambda]} y_\mu^{[\lambda]})(Y_\nu^{[\lambda]} y_\nu^{[\lambda]}) = \frac{N!}{f_{[\lambda]}} \delta_{\mu\nu}(Y_\mu^{[\lambda]} y_\mu^{[\lambda]}) \tag{1.16}$$

$y_\mu^{[\lambda]}$ 可用下法计算。设置换 $R_{\nu\mu}$ 将杨表 $Y_\mu^{[\lambda]}$ 变为杨表 $Y_\nu^{[\lambda]}$：

$$Y_\nu^{[\lambda]} = R_{\nu\mu} Y_\mu^{[\lambda]} R_{\nu\mu}^{-1} \tag{1.17}$$

当 $Y_\nu^{[\lambda]} Y_\mu^{[\lambda]} \neq 0$ 时 $R_{\nu\mu}$ 一定可表为 $p_\mu q_\mu$ 形式，其中 p_μ 和 q_μ 分别为杨表 $Y_\mu^{[\lambda]}$ 的横向和纵向置换。令

$$p_{\nu\mu} = \begin{cases} p_\mu & 当 \quad Y_\nu^{[\lambda]} Y_\mu^{[\lambda]} \neq 0 \\ 0 & 当 \quad Y_\nu^{[\lambda]} Y_\mu^{[\lambda]} = 0 \end{cases} \tag{1.18a}$$

则

$$y_\mu^{[\lambda]} = E - \sum_{\rho=\mu+1}^{f_{[\lambda]}} p_{\mu\rho} y_\rho^{[\lambda]}, \quad y_f^{[\lambda]} = E \tag{1.18b}$$

显然

$$Y_{\mu}^{[\lambda]}y_{\mu}^{[\lambda]}=\sum_{\rho=\mu}^{f_{[\lambda]}}t_{\rho}Y_{\rho}^{[\lambda]} \tag{1.19}$$

其中 t_{ρ} 是群代数的量. 这样我们得到置换群群代数中一组正交完备的幂等元:

$$\begin{aligned} e_{\mu}^{[\lambda]} &= \frac{f_{[\lambda]}}{N!} Y_{\mu}^{[\lambda]} y_{\mu}^{[\lambda]} \\ E &= \frac{1}{N!} \sum_{[\lambda]} f_{[\lambda]} \sum_{\mu} Y_{\mu}^{[\lambda]} y_{\mu}^{[\lambda]} \end{aligned} \tag{1.20}$$

对给定杨图 $[\lambda]$，选择标准基:

$$b_{\nu\mu}=e_{\nu}R_{\nu\mu}e_{\mu}=(f/N!)R_{\nu\mu}Y_{\mu}y_{\mu}=(f/N!)Y_{\nu}R_{\nu\mu}y_{\mu} \tag{1.21}$$

则有

$$\begin{aligned} Sb_{\nu\mu} &= \sum_{\rho} b_{\rho\mu}D_{\rho\nu}^{[\lambda]}(S) \\ b_{\nu\mu}S &= \sum_{\rho} D_{\mu\rho}^{[\lambda]}(S)b_{\nu\rho} \end{aligned} \tag{1.22}$$

这就是说，利用杨算符可以把置换群群空间的矢量组合成置换群不可约表示的函数基. 这样得到的表示一般不是幺正表示，但将这组基再适当组合后,可以得到实正交表示.

三　完备对易算符集和置换群实正交表示

定义

$$\begin{aligned} M_{a} &= \sum_{d=1}^{a-1}(a\ d) \\ &= \sum_{d=1}^{a-1}P_{a-1}P_{a-2}\cdots P_{d+1}P_{d}P_{d+1}\cdots P_{a-2}P_{a-1} \end{aligned} \tag{1.23}$$

由(1.5)式易证

$$P_{a}M_{b}=M_{b}P_{a}，\text{若 } b<a \text{ 或 } b>a+1 \tag{1.24}$$

$$[M_a, M_b] = 0 \tag{1.25}$$

$$M_{a+1} = P_a + P_a M_a P_a \tag{1.26}$$

下面来证明，M_a 在基 $b_{\nu\rho}$（ρ 固定）中的矩阵形式为上三角型矩阵：

$$\begin{aligned} M_a b_{\nu\rho} &= \sum_{\mu} b_{\mu\rho} D_{\mu\nu}(M_a) \\ D_{\mu\nu}(M_a) &= 0 \quad \text{当} \ \mu > \nu \\ D_{\nu\nu}(M_a) &= m_\nu(a) \equiv c_\nu(a) - r_\nu(a) \end{aligned} \tag{1.27}$$

其中基 $b_{\nu\rho}$ 的行和列按正则杨表大小排列，$c_\nu(a)$ 和 $r_\nu(a)$ 分别为数 a 在正则杨表 Y_ν 中填充位置的列数和行数，$m_\nu(a)$ 在数学上称为杨表 Y_ν 中 a 所填格子的容度（content）。

证明：重新改写(1.23)式. 设在杨表 Y_ν 中 a 填在 $r_\nu(a)$ 行和 $c_\nu(a)$ 列. 将填在杨表 $r_\nu(a)$ 行 a 左边的数字记作 a_i，将填在杨表前 $c_\nu(a)-1$ 行的数字，小于 a 的记作 b_j，大于 a 的记作 d_k，将填在 $r_\nu(a)$ 行下边的小于 a 的数字记作 c_l，则

$$\begin{aligned} & M_a = M_1(a) + M_2(a) + M_3(a) + M_4(a) \\ & M_1(a) = \sum_i (a\ a_i),\ M_2(a) = \sum_j (a\ b_j) + \sum_k (a\ d_k) \\ & M_3(a) = -\sum_k (a\ d_k),\ M_4(a) = \sum_l (a\ c_l) \end{aligned} \tag{1.28}$$

由(1.12)式和福克（Fock）条件(如见［Ma 1988］238 页)知

$$\begin{aligned} M_1(a) b_{\nu\rho} &= \{c_\nu(a) - 1\} b_{\nu\rho} \\ M_2(a) b_{\nu\rho} &= \{1 - r_\nu(a)\} b_{\nu\rho} \end{aligned} \tag{1.29a}$$

通过与证明（1.15b）类似的方法(如见［Ma 1988］237 页)可证

$$Y_\rho M_3(a) Y_\nu = 0,\ Y_\rho M_4(a) Y_\nu = 0 \ \text{若} \ \rho \geqslant \nu \tag{1.29b}$$

再注意(1.19)式，得(1.27)式。

因为 $D_{\rho\nu}(M_a)$ 是上三角型矩阵，所以对角元正是它的本征值，而且将基作适当组合后可得N个算符 M_a 的共同本征状态：

$$\begin{aligned} \Phi_\nu &= \sum_{\mu=1}^{\nu} b_{\mu\rho} X_{\mu\nu} \\ M_a \Phi_\nu &= m_\nu(a) \Phi_\nu \end{aligned} \tag{1.30}$$

其中我们省略了下标 ρ。可见 M_a 是置换群群代数中的一组完备的对易算符集。证完。

进一步,由(1.5)和(1.26)式可算得对换 P_a 在基 Φ_ν 中的表示矩阵。设在正则杨表 Y_ν 中 a 和 $a+1$ 既不填在同一行，也不填在同一列,则在交换 a 和 $a+1$ 的填充位置后杨表仍是正则的，记作 Y_{ν_a}，即

$$m_\nu(a) = m_{\nu_a}(a+1),\quad m_\nu(a+1) = m_{\nu_a}(a) \tag{1.31}$$

ν 和 ν_a 的关系是相互的。若在正则杨表 Y_ν 中 a 和 $a+1$ 填在同一行或同一列,则在交换 a 和 $a+1$ 的填充位置后,杨表不再是正则的。对这样的正则杨表 Y_ν，我们称 ν_a 不存在。

设在基 Φ_ν 中 P_a 的矩阵形式为 $D_{\mu\nu}(P_a)$:

$$P_a\Phi_\nu = \sum_\mu \Phi_\mu D_{\mu\nu}(P_a) \tag{1.32}$$

则由(1.24)式得

$$D_{\mu\nu}(P_a)\{m_\mu(b) - m_\nu(b)\} = 0 \text{ 若 } b < a \text{ 或 } b > a+1$$

即

$$D_{\mu\nu}(P_a) = 0 \text{ 当 } \mu \neq \nu \text{ 或 } \nu_a \tag{1.33a}$$

当 ν_a 不存在时,由 (1.5c) 和 (1.33a) 式得

$$D_{\nu\nu}(P_a)^2 = 1$$

再由(1.26)式得

$$D_{\nu\nu}(P_a) = \{m_\nu(a+1) - m_\nu(a)\}$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{在杨表 } Y_\nu \text{ 中 } a \text{ 和 } a+1 \text{ 填在同一行} \\ -1 & \text{在杨表 } Y_\nu \text{ 中 } a \text{ 和 } a+1 \text{ 填在同一列} \end{cases} \tag{1.33b}$$

当 ν_a 存在时,选择 Φ_{ν_a} 的系数,使 $D(P_a)$ 对称.由(1.5c)、(1.26)和(1.31)式得

$$m_\nu(a+1) = D_{\nu\nu}(P_a) + m_\nu(a)D_{\nu\nu}(P_a)^2 + m_\nu(a+1)D_{\nu\nu_a}(P_a)^2 \tag{1.34a}$$

$$0 = D_{\nu\nu_a}(P_a) + D_{\nu\nu}(P_a)m_\nu(a)D_{\nu\nu_a}(P_a) + D_{\nu\nu_a}(P_a)m_\nu(a+1)D_{\nu_a\nu_a}(P_a) \tag{1.34b}$$

$$1 = D_{\nu\nu}(P_a)^2 + D_{\nu\nu_a}(P_a)^2 \tag{1.34c}$$

$$0 = D_{\nu\nu_a}(P_a)\{D_{\nu\nu}(P_a) + D_{\nu_a\nu_a}(P_a)\} \tag{1.34d}$$

$D_{\nu\nu}(P_a) \neq 0$，若不然，则由 (1.34c) 式得 $D_{\nu\nu_a}(P_a) \neq 0$，由 (1.34d) 式得 $D_{\nu_a\nu_a}(P_a) = 0$，从而与 (1.34b) 式矛盾。同理，$D_{\nu_a\nu_a}(P_a) \neq 0$。联立 (1.34a) 和 (1.34c) 式，得

$$\begin{aligned} D_{\nu\nu}(P_a) &= \{m_\nu(a+1) - m_\nu(a)\}^{-1} \\ D_{\nu\nu_a}(P_a) &= \{1 - (m_\nu(a+1) - m_\nu(a))^{-2}\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{1.35}$$

(1.35) 式包括了 ν_a 不存在情况的 (1.33) 式。(1.35) 式指出，$D(P_a)$ 分解为若干 1×1 和 2×2 子矩阵的直和。按(1.33b)式，1×1 子矩阵分别为 1 或 -1，2×2 子矩阵取 (1.35) 形式。若规定 $\nu_a > \nu$，即 $m_\nu(a+1) < m_\nu(a)$，则 2×2 子矩阵可明显表为

$$\frac{1}{m}\begin{pmatrix} -1 & (m^2-1)^{\frac{1}{2}} \\ (m^2-1)^{\frac{1}{2}} & 1 \end{pmatrix}, \quad m = m_\nu(a) - m_\nu(a+1) \tag{1.36}$$

其中行(列)指标为 ν 和 ν_a。因此，在基 Φ_ν 中的置换群表示是实正交表示。

四　张量空间的分解

为明确起见，我们讨论 $SU(n)$ 群张量 $T_{\mu_1\cdots\mu_N}$，它在 $SU(n)$ 变换 u 中按下式变换：

$$T_{\mu_1\cdots\mu_N} \to O_u T_{\mu_1\cdots\mu_N} = \sum_{\nu_1\cdots\nu_N} u_{\mu_1\nu_1}\cdots u_{\mu_N\nu_N} T_{\nu_1\cdots\nu_N} \tag{1.37}$$

其中 O_u 是 $SU(n)$ 变换算符。张量指标之间的置换变换用算符 P 标记(见(1.1)式)，P 把第 a 个指标移到第 p_a 位置上去，反之，P^{-1} 把第 p_a 个指标移到第 a 位置上去：

$$P^{-1}T_{\mu_1\cdots\mu_N} = T_{\mu_{p_1}\cdots\mu_{p_N}} \tag{1.38}$$

易证 $SU(n)$ 变换和张量指标间的置换变换可以对易：

$$O_u P = P O_u \tag{1.39}$$

这性质称为韦尔互反性 (Weyl reciprocity)。因此，张量指标之间的对称性质在 $SU(n)$ 变换中保持不变，利用此对称性质可以将张量空间分解为 $SU(n)$ 群不可约表示空间的直和。具体地说，置换对称性用杨算符描写，把给定杨算符 $Y_\nu^{[\lambda]}$ 作用到张量上，将

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com