結构力学

中册

湖南工学院結构理論教研組編

高等教育出版社

結构力学

中册

湖南工学院結构理論教研組編

高等教育出版社

本書系参照前高等教育部1955年批准的高等学校"工业与民用建筑結构"、"鉄道桥梁与隧道"及"道路桥梁与隧道"三専业用"結构力学及彈性塑性理論教学大綱"編写而成的講义，分三册出版。

上册为靜定結构部分；中册介紹超靜定結构的两类基本分析方法——力法和变位法，并結合我国目前工程界的实际需要适当地介紹了弯矩分配法，以及剛架分析的其他方法；下册包括極限荷載的計算、結构彈性稳定理論、結构动力学基础以及彈性塑性理論等內容。

本書可供高等工业学校土建类有关専业采用作教本或参考書，亦可供土建技术人員参考之用。

結　构　力　学

中　册

湖南工学院結构理論教研組編

高等教育出版社出版北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

京华印書局印裝　新华書店發行

統一書号15010·795　開本850×1168 1/32　印張14　插頁4

字數335,000　印数0001—4,000　定價(7)¥2.00

1959年8月第1版　1959年8月北京第1次印刷

中册目录

第九章　靜定結构变位的計算

§9-1. 概述

一般結构在一系列外在原因，例如荷載作用、溫度变化、材料收縮、制造誤差、支座移动等的影响下，常被引起結构內部分子的变形，并由此产生变位。試看圖 9-1, *a* 所示的桁架 *ABC*, 在荷載作用下，杆件長度發生变更，以致結构改变原形，变到 *AB'C'* 的位置上去。如圖 9-1, *б* 所示。*C* 点的位移 *CC'* 叫做 *C* 点的总变位。若

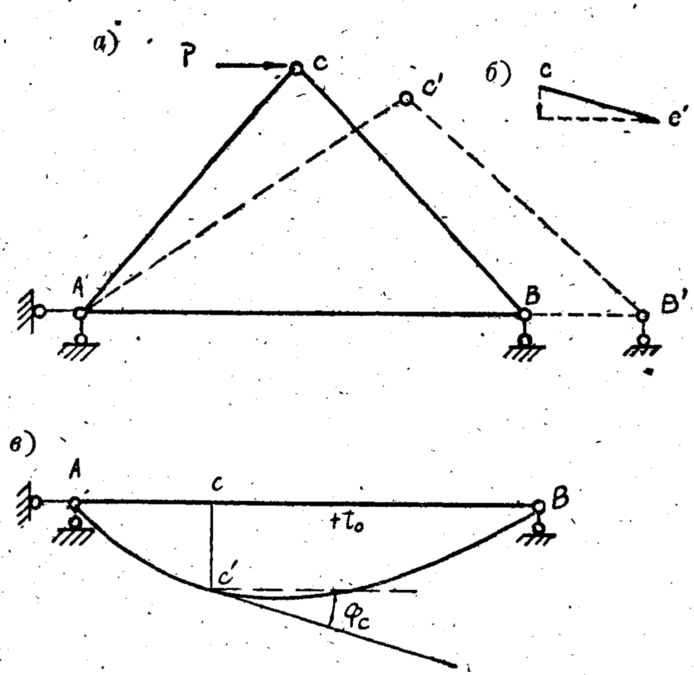

圖 9-1.

将 CC' 沿水平及竖直方向分解，則两分量叫做 C 点沿水平及竖直方向的分变位。同时应注意到杆件 AC 在变形过程中，轉动了一个角度 $\angle CAC'$，这个角度就叫做 AC 杆的角变位。由此可知，結构的变位有两种：一种是結构上各点的直綫移动，叫做綫变位。另一种是結构截面或杆件截面的轉角，叫做角变位。例如圖 9-1，θ 所示之梁，当上下两方的溫度变化不同而引起变形时，任一截面 C 将具有綫变位 CC' 和角变位 φ_C。

可見結构变位的过程一般是：由外因而引起結构內部的变形（指纖維的拉伸、压縮、剪切、扭轉等），因变形而产生变位。不管外因是什么，直接引起变位的因素总是由于变形（静定結构由于支座移动所引起的变位除外）。

变位的研究是很重要的：第一，在彈性范圍內分析超靜定結构，不論用什么方法，都要直接或間接地考慮到結构物的彈性变形，因而都要以計算变位作基础。第二，在結构的制作、施工、架設、养护等过程中，常須預先知道結构变形后的位置，以便作出一定的施工措施。第三，結构物的設計，除了要考慮其强度之外，还得考慮其剛度，因而变位的計算，就成为必要了。

这一章研究結构的变位，系根据本課程的基本前提，卽：

1）結构的材料具有完全的均勻性和彈性。

2）所有的鉸接点均为理想的，亦卽沒有摩擦。

3）仅限于在彈性变形極限以內来研究变位，且限于討論荷載的增減与变位的增減成直綫关系的情況。

現代決定变位的一般方法，是以能量守恒原理作基础的；因此，在討論如何計算結构变位之前，必需先了解一些功能的概念和基本原理。

在这里，我們只限于研究靜定結构的变位。至于超靜定結构变位的計算，在我們学完超靜定結构的內力分析方法之后，仍可应

用本章的方法进行。

§9-2. 外力的功

首先，我們認定加于結构上的外力为静力荷載；也就是說，外力是匀和地、緩慢地逐漸增大，而不引起加速度地施加于結构上。严格地說，只有当結构的变形經历无限長的时間才达到最后数值时，外力的作用才是靜力的。不过，实际上只要变形物体的慣性力和其他外力相較甚小因而可以略去的情况下，我們就可以把外力当作靜力荷載看待。結构在靜力荷載作用下，外力經常为內力所平衡，結构将不致發生振动。同时，在这里討論的也只限于外力和变形之間保持綫性关系的情况。

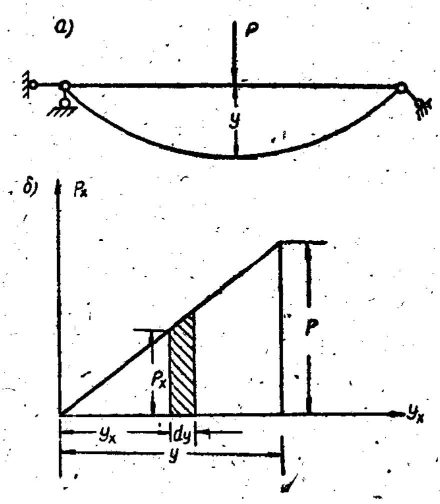

圖 9-2.

根据这些先决条件，讓我們研究外力在彈性变形过程中所作的功。如圖 9-2, a 所示之梁，在靜力荷載 P 作用下發生变形。当荷載由零达到其最后数值时，在 P 的作用点沿 P 力方向上的变位 y 亦由零达到其最后数值而呈彈性平衡。在任一中間位置，变位 y_x 和作用力 P_x 的关系可以表为下式，即：

$$y_x = \alpha P_x,$$

式中 α 表示比例常数，即單位力所引起的变位。为了导出外功的一般公式，設在某一中間位置，变位 y_x 有一微增量 dy_x，則外力 P_x

在此过程中所作之微功为

$$dT=P_x dy_x.$$

全部外功应为

$$T=\int_0^y P_x dy_x.$$

根据 P_x 与 y_x 的关系式，我們有

$$T=\int_0^y P_x dy_x=\int_0^y \frac{y_x}{\alpha}dy_x=\frac{y^2}{2\alpha}=\frac{1}{2}Py. \qquad 9\text{-}1$$

此式右方表示 P_x 的函数圖形在上下限 0 与 y 之間所包含的面积，如圖 9-2,б 所示。

应該注意，这一公式只适用于結构变形与荷載增長成直綫变化的情况。

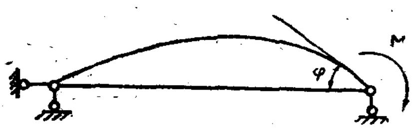

圖 9-3.

如果作用的外力不是集中力而是力偶，如圖 9-3 所示，且結构在力偶作用点的截面轉角为 φ，同样可以証明所作之功为

$$T=\frac{1}{2}M\varphi. \qquad 9\text{-}2$$

为了称呼方便起見，我們把前一項"力"，如集中力 P，力偶 M，以及分布荷重 q 等統称为广义力，而后一項"变位"，如綫变位 y 和角变位 φ 等統称为广义变位。由此可以得出結論：当靜力荷載作用于彈性結构上而不超过彈性限度时，外力的功等于广义力和广义变位的乘积的一半。

§9-3. 內力的功(变形位能)

当彈性結构受到外荷載作用时，其內部将伴随着产生內力和

变形，因而內力将在其相应的变形上面作功。現在，我們根据应力与变形成綫性关系这一先决条件来研究內力作功的情况。

当結构上受到荷載作用时，各截面上的內力一般是不同的，因此，在計算內力的功时，我們应取微段逐杆进行积分。

以圖 9-4, *a* 所示之梁为例，我們先取任一微段 ds 来加以研究。当取出这一微段 ds 时，相邻部分对于它的作用，在一般情况下，可以归納为軸力、弯矩及切力三种力。設 ds 左端截面上的軸力、弯矩及切力为 N、M 和 Q、則其右端截面上之各力一般均有一改变量而为 $N+dN$、$M+dM$、和 $Q+dQ$。不过，由于在研究这些力作功的时候，它們的改变量所作之功系一高級微量，可被略去，故在圖 9-4, *б* 中我們沒有标出这种改变量。

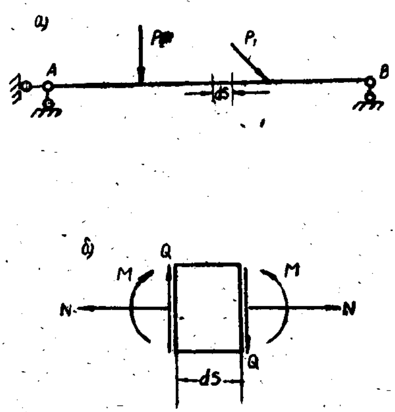

圖 9-4.

微段 ds 受着 N、M 和 Q 的作用順着它們的作用方向發生变形，因此，在發生变形的过程中，N、M、Q 所作之功恒为正。

不过，圖 9-4, *б* 中所示之 N、M 和 Q 对于所取微段 ds 而言，乃是外力。在这些力使微段發生变形的同时，根据作用与反作用的恒等定律，在 ds 两端截面上必定产生大小相等而方向相反的內力（如圖 9-5 中虛綫所示之各力）。显然，这些內力所作之功应与 N、M、Q 諸力所作的功数值相等但为負值。因此，我們可先算出微段上的外力 N、M、Q 所作之功，再給以負号，即得微段上內力所作

之功。

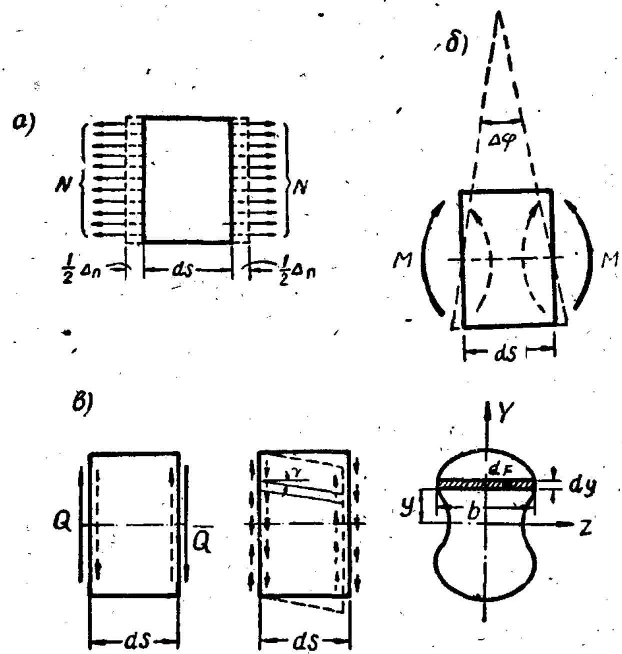

圖 9-5.

現在我們分开来研究微段上的外力 N, M, Q 所作之功，并分别用 dU_N, dU_M, dU_Q 来表示。

首先，計算軸力 N 所作之功。如圖 9-5, a 所示，在 N 的作用下，微段的軸向变形(伸長或縮短) Δn 将等于

$$\Delta n=\frac{N}{EF}ds.$$

式中 F 表示微段横截面的面积。因为 N 也是由零逐漸增大到它的最后数値的，故 N 所作之功为

$$dU_N=\frac{1}{2}N\cdot\Delta n=\frac{N^2ds}{2EF}.$$

其次，計算弯矩 M 所作之功。如圖 9-5, $б$ 所示，在 M 作用下，

微段两端截面将發生一相对轉角 $\Delta\varphi=\frac{Mds}{EJ}$。其中 EJ 表示微段的剛度，故 M 所作之功为

$$dU_M=\frac{1}{2}M\cdot\Delta\varphi=\frac{M^2ds}{2EJ}.$$

最后，計算切力 Q 所作之功。从材料力学得知，切应力 τ 按照下列規律沿截面变化：

$$\tau=\frac{QS}{Jb}.$$

因此，如圖 9-5, $\mathit{в}$，若在短段 ds 两端截面上距主軸为 y 处平行于 z 軸分别取一面积为 dF 的两狹条，則每一 dF 上所受到的力为

$$\tau dF=\frac{QS}{Jb}dF.$$

式中 S 为狹条对主軸的靜矩。設用 γ 表示 dF 的剪切角，則两 dF 的相对位移应等于 $\gamma ds=\frac{\tau ds}{G}$，因此，作用于微分面积 dF 上的切力 τdF 在这个位移 γds 上所作之功等于

$$\frac{1}{2}\tau dF\cdot\gamma ds.$$

将上式在整个截面內进行积分，則可得切力 Q 在微段 ds 上所作之功

$$dU_Q=\int_F\frac{1}{2}\tau dF\cdot\gamma ds=\int_F\frac{\tau^2dsdF}{2G}=\int_F\frac{Q^2S^2}{J^2b^2}\cdot\frac{ds}{2G}dF=$$

$$=\frac{Q^2ds}{2GJ^2}\int_F\frac{S^2}{b^2}dF=\mu\frac{Q^2ds}{2GF}.$$

式中

$$\mu=\frac{F}{J^2}\int_F\frac{S^2}{b^2}dF.$$

不难看出，μ 是一个无名数，它与外荷載无关，而只取决于截面的形状。例如梁的截面是一个 $b\times h$ 的矩形，則有

$$F=b\times h,\quad J=\frac{bh^3}{12},\quad S=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right).$$

代入上式并进行积分，則得 $\mu=1.2$；同理，对圓形截面，可得 $\mu=\frac{32}{27}$。

如果我們考虑的梁具有直綫軸，則因 M, N, Q 三力中任何一个力都不在其他两个力的方向上引起变位，故 N, M, Q 三个力作功的时候，彼此互不影响，故微段 ds 上外力所作的总功为

$$dU=dU_N+dU_M+dU_Q=\frac{N^2ds}{2EF}+\frac{M^2ds}{2EJ}+\mu\frac{Q^2ds}{2GF}.$$

而微段上內功为：

$$dW=(dW_N+dW_M+dW_Q)=-\frac{N^2ds}{2EF}-\frac{M^2ds}{2EJ}-\mu\frac{Q^2ds}{2GF}.$$

为了求出整个結构的內力的功，我們应将每一杆件积分，并把各杆之功加起来；故整个結构的內力的功为

$$W=-\Sigma\int_0^s\frac{N^2ds}{2EF}-\Sigma\int_0^s\frac{M^2ds}{2EJ}-\Sigma\mu\int_0^s\frac{Q^2ds}{2GF}.$$

而整个的結构所有微段上外力所作之功的总和为：

$$U=-W=\Sigma\int_0^s\frac{N^2ds}{2EF}+\Sigma\int_0^s\frac{M^2ds}{2EJ}+\Sigma\mu\int_0^s\frac{Q^2ds}{2GF}. \qquad 9\text{-}3$$

現在，讓我們来考察 U 所表示的功的物理意义。作为 N、M、Q

作用在微段 ds 的結果，微段順着它們的方向發生变形，因而改变了內部的分子状态。由于这种分子状态的改变，彈性結构在荷載移去后得以恢复其原来状态。在整个結构恢复原状的过程中，对于荷載所作的功，完全是由于彈性体分子状态改变而儲藏有能量。(例如，圖 9-6 所示之梁上放有几个砝碼，当我們从梁上移去一个砝碼时，梁便变直了一些，并且其余的砝碼稍微升高了一些，此时对其余的砝碼作了功，当将砝碼一一移去时，最后梁便恢复原状了)。彈性体这种由于分子状态改变所具有的作功的能力，我們称为变形位能。显然，这种变形位能的量值系由 U 来衡量。

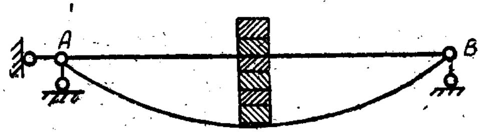

圖 9-6.

当彈性体發生变形时，用以克服內部的摩擦力。形成与散失热量，以及改变物体的电磁的作用和其他性質所消耗的功均可略去不計；因此，根据能量守恒原理，我們可以認为外力所作之功 T 全部轉化为变形位能 U 而儲存于彈性体內，因而得出如下的关系式

$$T=U. \qquad 9\text{-}4$$

把位能的公式研究一下，我們得到下述結論：

1) 位能总是正值，因为它是內力 N, M, Q 的二次函数。

2) 位能的总值，与荷載施放的次序无关，只取决于彈性体的最后变形状态。

3) 几个力同时作用所儲存的位能不等于各个力分开單独作用时所儲位能之和；也就是說，位能的計算，不能运用力的独立性原理。这是因为位能是內力 N, Q, M 的二次函数，而內力之和的平方并不等于它們每个力的平方之和。

例 9-1. 圖 9-7 所示之悬臂梁，截面为一 $b\times h$ 的矩形，試求荷載作用下所儲存的位能。

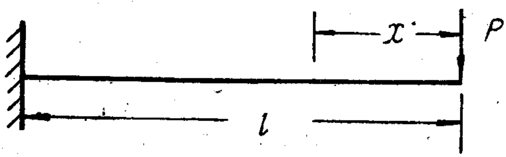

圖 9-7.

［解］ 因荷載与梁軸垂直，故梁內无軸力。对于距自由端为 x 的任一截面，我們有

$$M_x=-Px,\ Q_x=P,\ \text{且}\ \mu=1.2.$$

将它們代入位能公式，則得：

$$U=\int_0^l\frac{M_x^2dx}{2EJ}+\mu\int_0^l\frac{Q_x^2dx}{2GF}=\frac{P^2l^3}{6EJ}+\frac{\mu}{2}\times\frac{P^2l}{GF}=\frac{P^2l^3}{6EJ}+\frac{3P^2l}{5GF}.$$

因

$$G\approx0.4E,\quad F=bh,\quad J=\frac{bh^3}{12},$$

代入上式，得
$$U=\frac{2P^2}{E}\cdot\frac{l^3}{bh^3}\left[1+\frac{3}{4}\left(\frac{h}{l}\right)^2\right].$$

式中括弧內的第二項表示切力的影响。設 $\frac{h}{l}=\frac{1}{5}$（实际上很少遇到比这更大的高度），則

$$U=\frac{2P^2l^3}{Ebh^3}[1+0.03].$$

由此可見，在这种少見的情况下，切力对位能的影响还只有弯矩影响的 3%；对于一般的尺寸来說，切力的影响还要小些。因此，通常都略去切力的影响不計。

例 9-2. 試計算圖 9-8 所示梁在荷載 P 及 M_a 作用下所儲存的位能。

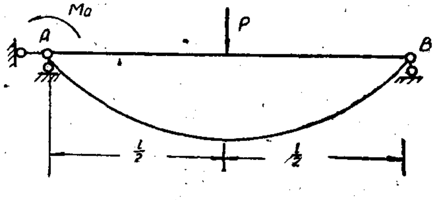

圖 9-8.

［解］ 以 A 为原点，則

当 $0\leqslant x\leqslant \frac{l}{2}$ 时，$M=\left(\frac{P}{2}+\frac{M_a}{l}\right)x-M_a$;

当 $\frac{l}{2}\leqslant x\leqslant l$ 时，$M=\left(\frac{P}{2}-\frac{M_a}{l}\right)(l-x)$.

若略去切力的影响，将有

$$U=\int_0^{\frac{l}{2}}\left[\left(\frac{P}{2}+\frac{M_a}{l}\right)^2x^2-2M_a\left(\frac{P}{2}+\frac{M_a}{l}\right)x+M_a^2\right]\frac{dx}{2EJ}+$$

$$+\int_{\frac{l}{2}}^{l}\left(\frac{P}{2}-\frac{M_a}{l}\right)^2(l-x)^2\frac{dx}{2EJ}=\frac{1}{96EJ}\left[P^2l^3-6M_aPl^2+16M_a^2l\right].$$

此外，我們可利用 $T=U$ 的关系来計算位能，有时頗为方便。根据材料力学所給数据，荷載 P 及 M_a 所引起的变位：

在荷載 P 的作用点上的撓度

$$\Delta_P=\frac{Pl^3}{48EJ},$$

$$\Delta_M=-\frac{M_al^2}{16EJ};$$

在 A 点的角变位

$$\varphi_P=-\frac{Pl^2}{16EJ},$$

$$\varphi_M=\frac{M_al}{3EJ}.$$

故

$$U=T=\frac{P}{2}\left(\frac{Pl^3}{48EJ}-\frac{M_al^2}{16EJ}\right)+\frac{M_a}{2}\left(\frac{M_al}{3EJ}-\frac{Pl^2}{16EJ}\right)=$$

$$=\frac{1}{96EJ}\left[P^2l^3-6M_aPl^2+16M_a^2l\right].$$