

結 构 力 学

中 册

湖南工学院結構理論教研組編

高 等 教 育 出 版 社

86.21
4/12
★



結 构 力 学

中 册

湖南工学院結構理論教研組編

高等教育出版社

本書系參照前高等教育部 1955 年批准的高等學校“工業與民用建築結構”、“鐵道橋梁與隧道”及“道路橋梁與隧道”三專業用“結構力學及彈性塑性理論教學大綱”編寫而成的講義，分三冊出版。

上冊為靜定結構部分；中冊介紹超靜定結構的兩類基本分析方法——力法和變位法，並結合我國目前工程界的實際需要適當地介紹了彎矩分配法，以及剛架分析的其他方法；下冊包括極限荷載的計算、結構彈性穩定理論、結構動力學基礎以及彈性塑性理論等內容。

本書可供高等工業學校土建類有關專業採用作教本或參考書，亦可供土建技術人員參考之用。

結 構 力 學

中 冊

湖南工學院結構理論教研組編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺 7 號

(北京市書刊出版業營業許可証出字第 054 號)

京華印書局印裝 新華書店發行

統一書號 15010·795 開本 850×1168¹/₃₂ 印張 14 插頁 1

字數 335,000 印數 0001—4,000 定價 (7) ¥ 2.00

1959 年 8 月第 1 版 1959 年 8 月北京第 1 次印刷

中册目录

第九章 靜定結構變位的計算	203
§ 9-1 概述	203
§ 9-2 外力的功	205
§ 9-3 內力的功(變形位能)	206
§ 9-4 可能功	214
§ 9-5 功的互等定理	215
§ 9-6 變位互等定理	217
§ 9-7 求結構變位的一般公式(馬克斯威爾-摩爾公式)	218
§ 9-8 荷載作用下的變位公式	222
§ 9-9 圖形相乘法(維力沙金法)	227
§ 9-10 由於溫度變化所引起的變位	233
§ 9-11 由於支座位移所引起的變位	236
§ 9-12 彈性荷載法	237
§ 9-13 實心結構的彈性荷載的實用公式	242
§ 9-14 桁架結構的彈性荷載公式	249
§ 9-15 變位影響綫	252
§ 9-16 桁架變位的圖解法	255
第十章 超靜定結構的一般概念	267
§ 10-1 概述	267
§ 10-2 超靜定次數的決定	268
§ 10-3 超靜定結構的特性	274
§ 10-4 超靜定結構的計算方法	276
第十一章 力法原理	277
§ 11-1 力法的典型方程式	277
§ 11-2 溫度變化對超靜定結構的影響	283
§ 11-3 支座位移對超靜定結構的影響	285
§ 11-4 力法計算的校核	288
第十二章 用力法計算複雜剛架的簡化方法	295
§ 12-1 概述	295
§ 12-2 基本結構的合理選擇	297
§ 12-3 剛臂的引用	301
§ 12-4 彈性中心法	303

§ 12-5 未知力分組	308
§ 12-6 組合未知数的应用	315
§ 12-7 复杂刚架的分析实例	321
第十三章 連續梁的計算	331
§ 13-1 連續梁的概念	331
§ 13-2 荷載作用下連續梁的計算, 三弯矩方程式	332
§ 13-3 連續梁在支座位移下的三弯矩方程式	342
§ 13-4 連續梁在溫度变化下的三弯矩方程式	343
§ 13-5 弯矩定点法	343
§ 13-6 連續梁影响綫的繪制	350
§ 13-7 用机动法作連續梁影响綫的概念	360
§ 13-8 最大、最小弯矩圖(弯矩范围圖, 包絡圖)	363
第十四章 超靜定拱的計算	369
§ 14-1 概述	369
§ 14-2 超靜定拱的軸綫選擇	371
§ 14-3 无铰拱截面的变化規律	372
§ 14-4 对称无铰拱的基本結構	374
§ 14-5 无铰拱在恒載作用下的計算	375
§ 14-6 无铰拱的影响綫	388
§ 14-7 溫度改变和混凝土收縮时无铰拱的計算	400
§ 14-8 支座位移影响下的計算	402
§ 14-9 拋物綫无铰拱的解析法	404
§ 14-10 双铰拱的計算	408
第十五章 超靜定桁架和桁梁混合結構	412
§ 15-1 概述	412
§ 15-2 超靜定桁架的計算法則	413
§ 15-3 超靜定桁架在靜荷載作用下的計算实例	417
§ 15-4 超靜定桁架的影响綫	423
§ 15-5 多重腹杆桁架的近似計算	429
§ 15-6 桁梁混合結構	434
第十六章 变位法	438
§ 16-1 單跨超靜定梁的角变位移方程式	438
§ 16-2 变位法的基本未知数	447
§ 16-3 变位法的基本內容	450
§ 16-4 用变位法計算有斜柱的簡單剛架	460
§ 16-5 变截面剛架計算的概念	463
§ 16-6 具有 $EI = \infty$ 的橫梁的剛架計算	470

§ 16-7 温度影响的計算	474
§ 16-8 对称性的利用	477
§ 16-9 弯矩分配的概念	481
§ 16-10 二次力矩分配法——变位法的簡化	485
§ 16-11 以旋轉力矩为未知数的变位法典型方程式	490
§ 16-12 变矩分配法	498
§ 16-13 有綫变位的剛架的計算	496
§ 16-14 联合法	509
§ 16-15 混合法	511
§ 16-16 用变位法計算剛架的影响綫	515
§ 16-17 計算剛接金屬桁架的概念	524
第十七章 剛架分析的其他方法	527
§ 17-1 概述	527
§ 17-2 力矩一次分配法(弯矩定点法)	528
§ 17-3 角变定点法(角变傳播法或形变分配法)	545
§ 17-4 旋轉力矩傳播法	551
§ 17-5 不均衡力矩傳播法	555
§ 17-6 集体分配法	567
§ 17-7 逐次互联法	580
第十八章 用近似法計算剛架	592
§ 18-1 概述	592
§ 18-2 單層剛架在豎向荷載作用下的近似計算	593
§ 18-3 多層剛架在豎向荷載作用下的近似計算	598
§ 18-4 多層剛架在豎向荷載作用下較為精確的計算法	601
§ 18-5 剛架在水平荷載作用下的近似計算法	608
§ 18-6 剛架計算的一般程序	610
第十九章 按極限荷載計算結構的概念	613
§ 19-1 概述	613
§ 19-2 超靜定桁架的計算·确定極限荷載的两种方法	614
§ 19-3 在一次加荷下靜定梁的計算	618
§ 19-4 在一次加荷下超靜定梁的計算	620
§ 19-5 按極限荷載計算剛架的概念	925
附录 I 用高斯法解典型方程式	629
附录 II 解算一次联立方程式的連續代入法和逐漸加值法	636

第九章 靜定結構變位的計算

§ 9-1. 概述

一般結構在一系列外在原因,例如荷載作用、溫度變化、材料收縮、製造誤差、支座移動等的影響下,常被引起結構內部分子的變形,並由此產生變位。試看圖 9-1, *a* 所示的桁架 ABC , 在荷載作用下,杆件長度發生變更,以致結構改變原形,變到 $AB'C'$ 的位置上去。如圖 9-1, *b* 所示。 C 點的位移 CC' 叫做 C 點的總變位。若

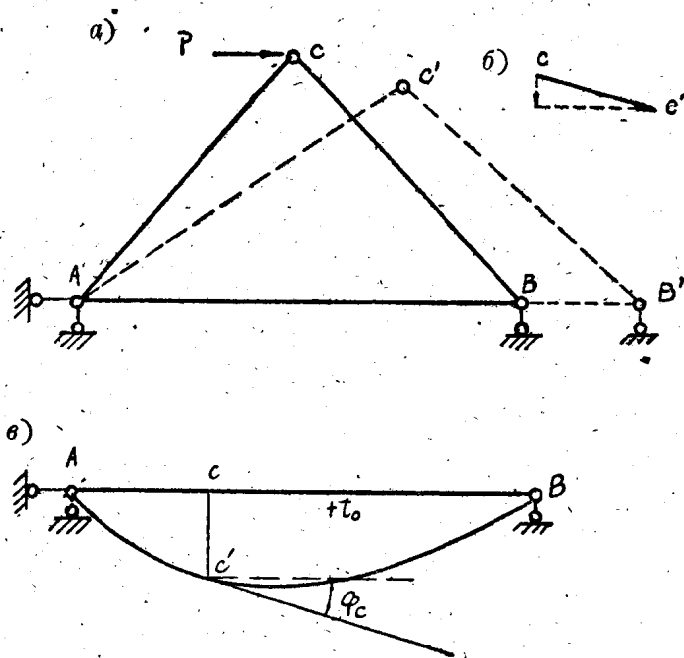


圖 9-1.

将 CC' 沿水平及豎直方向分解，則两分量叫做 C 点沿水平及豎直方向的分变位。同时应注意到杆件 AC 在变形过程中，轉动了一个角度 $\angle CAC'$ ，这个角度就叫做 AC 杆的角变位。由此可知，结构的变位有两种：一种是结构上各点的直綫移动，叫做綫变位。另一种是结构截面或杆件截面的轉角，叫做角变位。例如圖 9-1, θ 所示之梁，当上下两方的溫度变化不同而引起变形时，任一截面 C 将具有綫变位 CC' 和角变位 φ_0 。

可見结构变位的过程一般是：由外因而引起结构内部的变形（指纖維的拉伸、压缩、剪切、扭轉等），因变形而产生变位。不管外因是什么，直接引起变位的因素总是由于变形（靜定结构由于支座移动所引起的变位除外）。

变位的研究是很重要的：第一，在彈性范围内分析超靜定结构，不論用什么方法，都要直接或间接地考虑到结构物的彈性变形，因而都要以計算变位作基础。第二，在结构的制作、施工、架設、养护等过程中，常須預先知道结构变形后的位置，以便作出一定的施工措施。第三，结构物的設計，除了要考慮其强度之外，还得考慮其剛度，因而变位的計算，就成为必要了。

这一章研究结构的变位，系根据本課程的基本前提，即：

- 1) 结构的材料具有完全的均匀性和彈性。
- 2) 所有的鉸接点均为理想的，亦即沒有摩擦。
- 3) 仅限于在彈性变形極限以內来研究变位，且限于討論荷載的增减与变位的增减成直綫关系的情况。

現代决定变位的一般方法，是以能量守恒原理作基础的；因此，在討論如何計算结构变位之前，必需先了解一些功能的概念和基本原理。

在这里，我們只限于研究靜定结构的变位。至于超靜定结构变位的計算，在我們学完超靜定结构的內力分析方法之后，仍可应

用本章的方法进行。

§ 9-2. 外力的功

首先，我們認定加于結構上的外力為靜力荷載；也就是說，外力是勻和地、緩慢地逐漸增大，而不引起加速度地施加于結構上。嚴格地說，只有當結構的變形經歷無限長的時間才達到最後數值時，外力的作用才是靜力的。不過，實際上只要變形物體的慣性力和其他外力相較甚小因而可以略去的情況下，我們就可以把外力當作靜力荷載看待。結構在靜力荷載作用下，外力經常為內力所平衡，結構將不致發生振動。同時，在這裡討論的也只限于外力和變形之間保持線性關係的情況。

根據這些先決條件，讓我們研究外力在彈性變形過程中所作的功。如圖 9-2, a 所示之梁，在靜力荷載 P 作用下發生變形。當荷載由零達到其最後數值時，在 P 的作用點沿 P 力方向上的變位 y 亦由零達到其最後數值而呈彈性

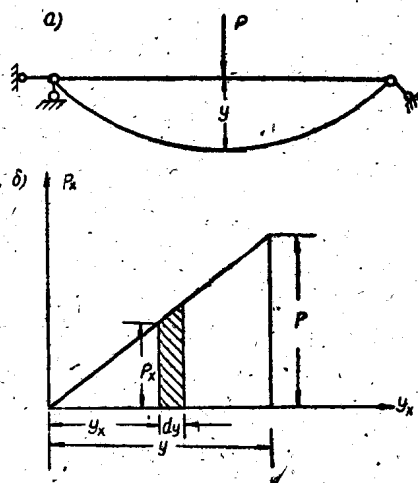


圖 9-2.

平衡。在任一中間位置，變位 y_x 和作用力 P_x 的關係可以表為下式，即：

$$y_x = \alpha P_x,$$

式中 α 表示比例常數，即單位力所引起的變位。為了導出外功的一般公式，設在某一中間位置，變位 y_x 有一微增量 dy_x ，則外力 P_x

在此过程中所作之微功为

$$dT = P_x dy_x.$$

全部外功应为

$$T = \int_0^y P_x dy_x.$$

根据 P_x 与 y_x 的关系式, 我們有

$$T = \int_0^y P_x dy_x = \int_0^y \frac{y_x}{\alpha} dy_x = \frac{y^2}{2\alpha} = \frac{1}{2} Py. \quad 9-1$$

此式右方表示 P_x 的函数圖形在上下限 0 与 y 之間所包含的面积, 如圖 9-2, 6 所示。

應該注意, 这一公式只适用于結構变形与荷載增長成直綫变化的情况。

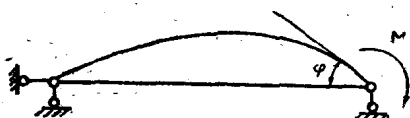


圖 9-3.

如果作用的外力不是集中力而是力偶, 如圖 9-3 所示, 且結構在力偶作用点的截面轉角为 φ , 同样可以証明所作之功为

$$T = \frac{1}{2} M \varphi. \quad 9-2$$

为了称呼方便起見, 我們把前一项“力”, 如集中力 P , 力偶 M , 以及分布荷重 q 等統称为广义力, 而后一项“变位”, 如綫变位 y 和角变位 φ 等統称为广义变位。由此可以得出結論: 当靜力荷載作用于彈性結構上而不超过彈性限度时, 外力的功等于广义力和广义变位的乘积的一半。

§ 9-3. 內力的功(变形位能)

当彈性結構受到外荷載作用时, 其内部将伴随着产生內力和

變形，因而內力將在其相應的變形上面做功。現在，我們根據應力與變形成線性關係這一先決條件來研究內力做功的情況。

當結構上受到荷載作用時，各截面上的內力一般是不同的，因此，在計算內力的功時，我們應取微段逐杆進行積分。

以圖 9-4, a 所示之梁為例，我們先取任一微段 ds 來加以研究。當取出這一微段 ds 時，相鄰部分對於它的作用，在一般情況下，可以歸納為軸力、彎矩及切力三種力。設 ds 左端截面上的軸力、彎矩及切力為 N 、 M 和 Q ，則其右端截面上之各力一般均有一改變量而為 $N+dN$ 、 $M+dM$ 和 $Q+dQ$ 。

不過，由於在研究這些力作功的時候，它們的改變量所

作之功係一高級微量，可被略去，故在圖 9-4, b 中我們沒有標出這種改變量。

微段 ds 受着 N 、 M 和 Q 的作用順着它們的作用方向發生變形，因此，在發生變形的過程中， N 、 M 、 Q 所作之功恒為正。

不過，圖 9-4, b 中所示之 N 、 M 和 Q 對於所取微段 ds 而言，乃是外力。在這些力使微段發生變形的同時，根據作用與反作用的恒等定律，在 ds 兩端截面上必定產生大小相等而方向相反的內力（如圖 9-5 中虛線所示之各力）。顯然，這些內力所作之功應與 N 、 M 、 Q 諸力所作的功數值相等但為負值。因此，我們可先算出微段上的外力 N 、 M 、 Q 所作之功，再給以負號，即得微段上內力所作

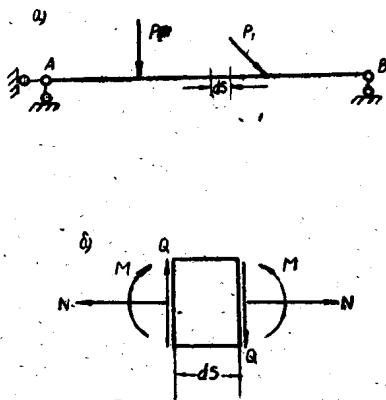


圖 9-4.

之功。

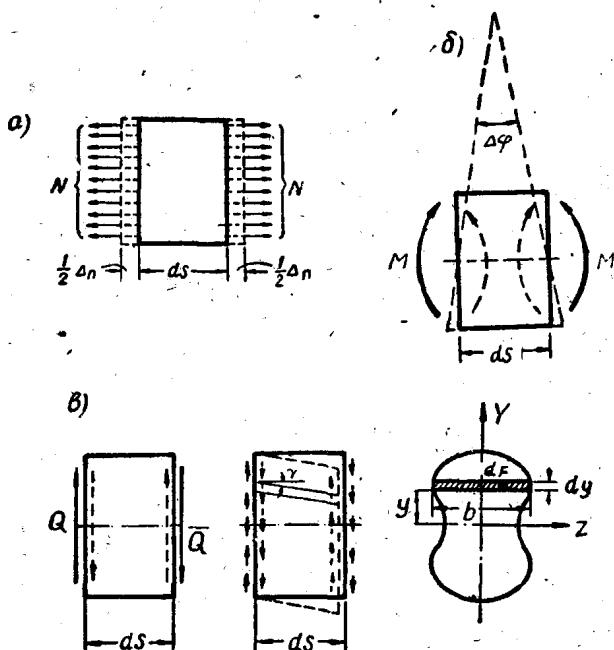


圖 9-5.

現在我們分開來研究微段上的外力 N , M , Q 所作之功, 並分別用 dU_N , dU_M , dU_Q 來表示。

首先, 計算軸力 N 所作之功。如圖 9-5, a 所示, 在 N 的作用下, 微段的軸向變形(伸長或縮短) Δn 將等於

$$\Delta n = \frac{N}{EF} ds.$$

式中 F 表示微段橫截面的面積。因為 N 也是由零逐漸增大到它的最後數值的, 故 N 所作之功為

$$dU_N = \frac{1}{2} N \cdot \Delta n = \frac{N^2 ds}{2EF}.$$

其次, 計算彎矩 M 所作之功。如圖 9-5, c 所示, 在 M 作用下,

微段兩端截面將發生一相對轉角 $\Delta\varphi = \frac{Mds}{EJ}$ 。其中 EJ 表示微段的剛度，故 M 所作之功為

$$dU_M = \frac{1}{2} M \cdot \Delta\varphi = \frac{M^2 ds}{2EJ}.$$

最后，計算切力 Q 所作之功。從材料力學得知，切應力 τ 按照下列規律沿截面變化：

$$\tau = \frac{QS}{Jb}.$$

因此，如圖 9-5, c，若在短段 ds 兩端截面上距主軸為 y 處平行於 z 軸分別取一面積為 dF 的兩狹條，則每一 dF 上所受到的力為

$$\tau dF = \frac{QS}{Jb} dF.$$

式中 S 為狹條對主軸的靜矩。設用 γ 表示 dF 的剪切角，則兩 dF 的相對位移應等於 $\gamma ds = \frac{\tau ds}{G}$ ，因此，作用於微分面積 dF 上的切力 τdF 在這個位移 γds 上所作之功等於

$$\frac{1}{2} \tau dF \cdot \gamma ds.$$

將上式在整個截面內進行積分，則可得切力 Q 在微段 ds 上所作之功

$$\begin{aligned} dU_Q &= \int_F \frac{1}{2} \tau dF \cdot \gamma ds = \int_F \frac{\tau^2 ds dF}{2G} = \int_F \frac{Q^2 S^2}{J^2 b^2} \cdot \frac{ds}{2G} dF = \\ &= \frac{Q^2 ds}{2GJ^2} \int_F \frac{S^2}{b^2} dF = \mu \frac{Q^2 ds}{2GF}. \end{aligned}$$

式中

$$\mu = \frac{F}{J^2} \int_F \frac{S^2}{b^2} dF.$$

不难看出, μ 是一个无名数, 它与外荷载无关, 而只取决于截面的形状。例如梁的截面是一个 $b \times h$ 的矩形, 则有

$$F = b \times h, \quad J = \frac{bh^3}{12}, \quad S = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

代入上式并进行积分, 则得 $\mu = 1.2$; 同理, 对圆形截面, 可得 $\mu = \frac{32}{27}$ 。

如果我们考虑的梁具有直线轴, 则因 N, M, Q 三力中任何一个力都不在其他两个力的方向上引起变位, 故 N, M, Q 三个力作功的时候, 彼此互不影响, 故微段 ds 上外力所作的总功为

$$dU = dU_N + dU_M + dU_Q = \frac{N^2 ds}{2EF} + \frac{M^2 ds}{2EJ} + \mu \frac{Q^2 ds}{2GF}.$$

而微段上内功为:

$$dW = (dW_N + dW_M + dW_Q) = -\frac{N^2 ds}{2EF} - \frac{M^2 ds}{2EJ} - \mu \frac{Q^2 ds}{2GF}.$$

为了求出整个结构的内力的功, 我们应将每一杆件积分, 并把各杆之功加起来; 故整个结构的内力的功为

$$W = -\sum \int_0^s \frac{N^2 ds}{2EF} - \sum \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EJ} - \sum \mu \int_0^s \frac{Q^2 ds}{2GF}.$$

而整个的结构所有微段上外力所作之功的总和为:

$$U = -W = \sum \int_0^s \frac{N^2 ds}{2EF} + \sum \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EJ} + \sum \mu \int_0^s \frac{Q^2 ds}{2GF}. \quad 9-3$$

现在, 让我们来考察 U 所表示的功的物理意义。作为 N, M, Q

作用在微段 ds 的結果，微段順着它們的方向發生變形，因而改變了內部的分子狀態。由於這種分子狀態的改變，彈性結構在荷載移去後得以恢復其原來狀態。在整個結構恢復原狀的過程中，對於荷載所作的功，完全是由於彈性體分子狀態改變而儲藏有能量。（例如，圖 9-6 所示之梁上放有幾個砝碼，當我們從梁上移去一個砝碼時，梁便變直了

一些，並且其餘的砝碼稍微升高了一些，此時對其餘的砝碼作了功，當將砝碼——

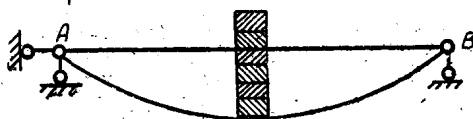


圖 9-6.

移去時，最後梁便恢復原狀了）。彈性體這種由於分子狀態改變所具有的作功的能力，我們稱為變形位能。顯然，這種變形位能的量值係由 U 來衡量。

當彈性體發生變形時，用以克服內部的摩擦力。形成與散失熱量，以及改變物體的電磁的作用和其他性質所消耗的功均可略去不計；因此，根據能量守恒原理，我們可以認為外力所作之功 T 全部轉化為變形位能 U 而儲存於彈性體內，因而得出如下的關係式

$$T = U.$$

9-4

把位能的公式研究一下，我們得到下述結論：

- 1) 位能總是正值，因為它是內力 N , M , Q 的二次函數。
- 2) 位能的總值，與荷載施放的次序無關，只取決於彈性體的最後變形狀態。

3) 幾個力同時作用所儲存的位能不等於各個力分開單獨作用時所儲位能之和；也就是說，位能的計算，不能運用力的獨立性原理。這是因為位能是內力 N , Q , M 的二次函數，而內力之和的平方並不等於它們每個力的平方之和。

例 9-1. 圖 9-7 所示之懸臂梁, 截面為一 $b \times h$ 的矩形, 試求荷載作用下所儲存的位能。

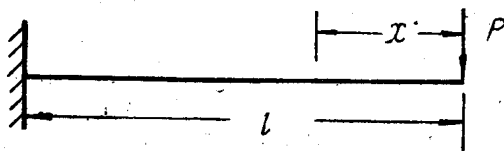


圖 9-7.

[解] 因荷載與梁軸垂直, 故梁內無軸力。對於距自由端

為 x 的任一截面, 我們有

$$M_x = -Px, \quad Q_x = P, \quad \text{且} \quad \mu = 1.2.$$

將它們代入位能公式, 則得:

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2EJ} + \mu \int_0^l \frac{Q_x^2 dx}{2GF} = \frac{P^2 l^3}{6EJ} + \frac{\mu}{2} \times \frac{P^2 l}{GF} = \frac{P^2 l^3}{6EJ} + \frac{3P^2 l}{5GF}.$$

因

$$G \approx 0.4E, \quad F = bh, \quad J = \frac{bh^3}{12},$$

代入上式, 得

$$U = \frac{2P^2}{E} \cdot \frac{l^3}{bh^3} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right].$$

式中括弧內的第二項表示切力的影響。設 $\frac{h}{l} = \frac{1}{5}$ (實際上很少遇到比這更大的高度), 則

$$U = \frac{2P^2 l^3}{Ebh^3} [1 + 0.03].$$

由此可見, 在這種少見的情況下, 切力對位能的影響還只有彎矩影響的 3%; 對於一般的尺寸來說, 切力的影響還要小些。因此, 通常都略去切力的影響不計。

例 9-2. 試計算圖 9-8 所示梁在荷載 P 及 M_a 作用下所儲存的位能。

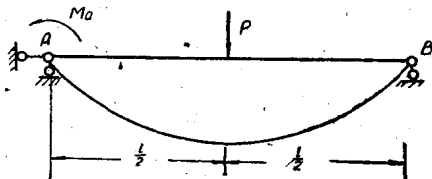


圖 9-8.

[解] 以 A 為原點, 則

$$\text{當 } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \text{ 時, } M = \left(\frac{P}{2} + \frac{M_a}{l} \right) x - M_a;$$

$$\text{當 } \frac{l}{2} \leq x \leq l \text{ 時, } M = \left(\frac{P}{2} - \frac{M_a}{l} \right) (l - x).$$

若略去切力的影響, 將有

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{\frac{l}{2}} \left[\left(\frac{P}{2} + \frac{M_a}{l} \right)^2 x^2 - 2M_a \left(\frac{P}{2} + \frac{M_a}{l} \right) x + M_a^2 \right] \frac{dx}{2EJ} + \\ &+ \int_{\frac{l}{2}}^l \left(\frac{P}{2} - \frac{M_a}{l} \right)^2 (l-x)^2 \frac{dx}{2EJ} = \frac{1}{96EJ} [P^2 l^3 - 6M_a P l^2 + 16M_a^2 l]. \end{aligned}$$

此外, 我們可利用 $T=U$ 的關係來計算位能, 有時頗為方便。根據材料力學所給數據, 荷載 P 及 M_a 所引起的變位:

在荷載 P 的作用點上的撓度

$$\Delta_P = \frac{Pl^3}{48EJ},$$

$$\Delta_M = -\frac{M_a l^2}{16EJ};$$

在 A 點的角變位

$$\varphi_P = -\frac{Pl^2}{16EJ},$$

$$\varphi_M = \frac{M_a l}{3EJ}.$$

故

$$\begin{aligned} U = T &= \frac{P}{2} \left(\frac{Pl^3}{48EJ} - \frac{M_a l^2}{16EJ} \right) + \frac{M_a}{2} \left(\frac{M_a l}{3EJ} - \frac{Pl^2}{16EJ} \right) = \\ &= \frac{1}{96EJ} [P^2 l^3 - 6M_a P l^2 + 16M_a^2 l]. \end{aligned}$$