# 單 值 化

R. 尼凡林那 著

陆 启 鏗 譯

科 学 出 版 社

R. NEVANLINNA

UNIFORMISIERUNG

Springer, Germany

1953

## 內 容 簡 介

本书是把历史上关于多値的解析函数的丰富的結果，用近代的数学語言整理成严謹的系統，并且包括有近代的几何函数論，特別是开黎曼曲面理論的成就.

全书共分十章，首先討論了黎曼曲面的几何性质，及在解析映照下黎曼曲面的分类問題. 这一問題，涉及在黎曼曲面上的調和函数的边値問題之解的研究，然后解决一般的单値化問題. 最后一章，介紹了开黎曼曲面的理論.

本书可供大学数学系学生，研究生，数学研究工作者作参考之用.

# 单 値 化

R. 尼凡林那 著

陆 启 鏗 譯

※

科学出版社 出版（北京朝阳門大街 117 号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

※

1960 年 7 月第 一 版　书号：2170　字数：331,000

1960 年 7 月第一次印刷　开本：787×1092 1/27

（京）0001—8,800　印张：14 20/27　插页：2

定价：2.20 元

# 目　　录

# 引　　言

1. 单值化理論是研究这样的問題，是否两集合 $R_x$ 与 $R_y$ 之間的一多值关系 $(x, y)$ 能表(单值化)为一单值的关系．在实际意义下，本书中要述及的单值化問題，是了解为較狭窄的与严格限制的、事实上仍然十分普遍的問題，就是把两个复平面的，或更一般地把两个“黎曼曲面”$R_x$ 与 $R_y$ 的点 $x$ 与 $y$ 之間的一多值解析关系 $(x, y)$ 来单值化，即对已与的关系 $(x, y)$ 寻找一个“参数表示”

$$x = x(t); \quad y = y(t), \tag{1}$$

通过它，在第三个黎曼曲面 $R_t$ 的 $t$ 点，单值地并解析地对应于以关系 $(x, y)$ 相联系的点偶 $x, y$ 之全体．我們对这种情形特别感有兴趣，其中 $R_t$ 是“单叶的”，即这曲面能表为复数 $t$ 平面的一子域．此外，若曲面 $R_x$ 与 $R_y$ 是复的 $x$ 平面与 $y$ 平面，則关系 $(x, y)$ 是一个所謂解析图象，并且这图象不但能以两个单值解析函数 $x = x(t)$，$y = y(t)$ 在小范围(局部的)单值化，而且能在大范围(整体的)单值化．

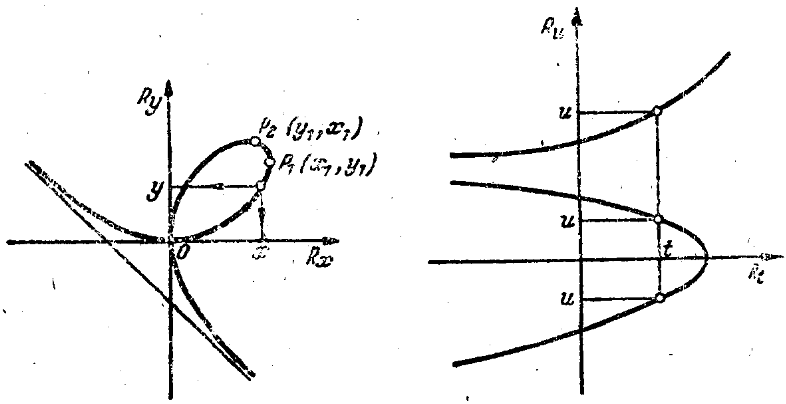
2. 在初等分析中常常遇到这样的問題，当考虑(实的或复的)函数 $y = y(x)$ 时，它及其逆 $x = x(y)$ 常是多值的．如此关系的最簡单类型是代数函数，它們由代数方程

$$f(x, y) = \sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu} = 0 \tag{2}$$

定义，其中 $a_{\mu\nu}$ 是实数或复数的有限矩陣．如此的一个函数 $y = y(x)$，或更一般的一个 $R(x, y)$ 形式的代数函数，其中 $R$ 是受方程(2)限制的变数 $x$ 与 $y$ 之有理函数，关于它們的积分的經典問題，亦即一个所謂属于方程(2)的亚倍尔(Abel)积分

$$\int R(x, y)\,dx$$

之研究，产生了曲綫(2)的单值参数表示(1)的可能性問題．单值化的发展来源于寻求一代数曲綫的最簡单的单值化的努力，由此就能引导出所有其他的发展．由于上世紀下半叶最伟大的数学家們[黎曼(Riemann)，克萊因(Klein)，庞加萊(Poincaré)，許瓦茲(Schwarz)，紐曼(Neumann)等]曾經貢献了巨大发展的結果，单值化問題終于由寇比(Koebe)与庞加萊同时解决(1908)．对代数曲綫这个特殊情形的解决，曾引起了重要的工具拓扑与共形映照理論的結合，据此，单值化不但在非代数的情形，并且在上述一般的情形(特别对一般的解析图象)也有可能．




(a) (b)

图 1

**3.** 試我們以一个完全是初等的例子，更清楚的来説明以上所述．我們取曲綫(2)为"笛卡尔叶"

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0,$$

并且首先只限于考虑实値 $x, y$．如是对应一 $x$ 値有一个、两个或三个値 $y = y(x)$．

这些値能归入函数 $y = y(x)$ 的局部单値的連續分支中，这些分支在每一个属于此分支的单調間隔中是可逆的并連續的．在一个这样的間隔 $\Delta_x$ 中，对应的曲綫元素由变数 $x$ 局部的单値化，使得曲綫元素是 $x$ 在 $\Delta_x$ 的拓扑的(即一一的与可逆連續的)象．

我們可以利用当 $x$ 在 $\Delta_x$ 中連續的并单调的依賴于 $x$ 的任一变数 $t$ 来代替 $x$，以作为局部的与連續的单值化变数. 一个这样的关系 $t=t(x)$, $x=x(t)$ 把 $\Delta_x$ 拓扑地映为一 $t$ 間隔 $\Delta_t$，并且对所考虑的曲綫元素有一在 $\Delta_t$ 的单值的連續的表示

$$x=x(t),\quad y=y(t),$$

以 $t$ 为单值化变数. 特别，我們这里可选择 $x$ 或 $y$ 作为局部单值化变数.

另一情形是在这样的点的邻域；它所考虑的是单调間隔的端点者，此即 $O(0,0)$, $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(y_1,x_1)$ 点，其中 $x_1=\sqrt[3]{4}$, $y_1=\sqrt[3]{2}$. 例如 $P_1$ 点是对于 $x$ 軸 $R_x$ 的曲綫的"支点". 在 $P_1$ 点的曲綫元素不能以 $x$，而能以平方根 $\sqrt{x_1-x}$（經符号的适当选择）局部地单值化. 更一般的，对任一单調的并連續的依賴于 $\sqrt{x_1-x}$ 的变数 $t$ 亦可以；在此情形，$y$ 亦可作为如此的变数（参看图形便立刻知道). 对每一如此的变数 $t$，在 $P_1$ 对应的曲綫元素拓扑地被单值化为(1)式，此处 $x$ 与 $y$ 皆是 $t$ 的、且在某一間隔 $\Delta_t$ 中的单值的并連續的函数.

**4.** 笛卡尔叶的单值化不过是局部的解决，然而問題要求大范围的单值化：单值化理論的观点与困难恰在于从局部到大范围的过渡. 在上面簡单的例子中，能够立刻給与一个大范围的单值化量，即是变数 $t=\frac{y}{x}$，我們以笛卡尔叶的单值参数表示

$$x=\frac{3t}{1+t^3},\quad y=\frac{3t^2}{1+t^3}.$$

除 $t$ 外，作为拓扑的单值化量，我們还能用任一单調的，連續函数 $u=u(t)$, $t=t(u)$，它把 $t$ 軸 $R_t$ 拓扑地映为 $u$ 軸 $R_u$ 者（图 1(b)). 若 $u$ 連續地走过 $R_u$ 軸一次，則点 $x=x(t(u))$, $y=y(t(u))$ 恰画出笛卡尔叶.

除了这"主要的单值化量" $t$ 外，为了单值化，我們能更一般的应用任一变数 $u$, $t=t(u)$ 是单值地并連續地依賴于 $u$. 图 1(b)，是表示 $u$ 是一个 $t$ 的单調的（但可能是多值的）函数，由此可得出

逆映照的单值性． 在此情形，$x = x(t(u)) = \bar{x}(u)$，$y = y(t(u)) = \bar{y}(u)$ 也給与我們一个曲綫的单值的并連續的表示．

5．上面考慮的重要性与推广的可能性可总結如下：由于曲綫 $f = 0$ 的作法是作为 $t$ 軸 $R_t$（它是主要的单值化量）的一一的并連續的象，$R_t$ 是作为軸 $R_x$ 与軸 $R_y$ 的复盖流形：$R_t$ 的每一点单值地并連續地对应于 $R_x$ 的一迹点 $x$ 与 $R_y$ 的一迹点 $y$，此外，滿足重要的条件，即每两迹点 $x$ 与 $y$ 恆以一已与之关系 $(x, y)$［即以方程 $f(x, y) = 0$］互相对应．在所有的单值化量中，主要的单值化量 $t$ 定义为同时对于 $R_x$ 与 $R_y$ 的"最弱的"复盖 $(R_t)$：即任一其他的单值化量 $u = u(t)$ 代表 $R_t$ 的一复盖 $R_u$．

6． 現在我們把特殊的例子，或更一般的，把由代数方程 $f(x, y) = 0$ 所定义的关系 $(x, y)$，变为对于复数的值 $x$ 与 $y$． 我們現在将 $x$ 軸与 $y$ 軸分別代以两維流形或曲面 $R_x$ 与 $R_y$，它們代表閉的复数的 $x$ 平面与 $y$ 平面． 主要的单值化量同样是一曲面，即 $R_x$ 及 $R_y$ 的一复盖面 $R_t$，迹点 $x$ 与 $y$ 恆依据关系 $(x, y)$ 互相的对应． 若如上面的假定一样，問題只在于連續的单值化，則除 $R_t$ 外作为主要单值化量是可以利用任一曲面 $R_u$，能可逆地一一的并連續的映为 $R_t$ 者，或者如在拓扑学中所說，同胚于 $R_t$ 者；故所有的主要单值化量成一拓扑的等价类(同胚的曲面类)．除了这些最弱的单值化量外，还有一无穷的非等价单值化量 $R_u$ 的集合，即所有复盖主要单值化量 $R_t$ 的曲面[1]． 若已作一如此的复盖面 $R_u$，則迹映照

$$u \longrightarrow t \begin{cases} \nearrow x \\ \searrow y \end{cases}$$

产生所期望的由 $u$ 到 $(x, y)$ 的单值的并連續的过渡，并且得出拓扑的单值化．

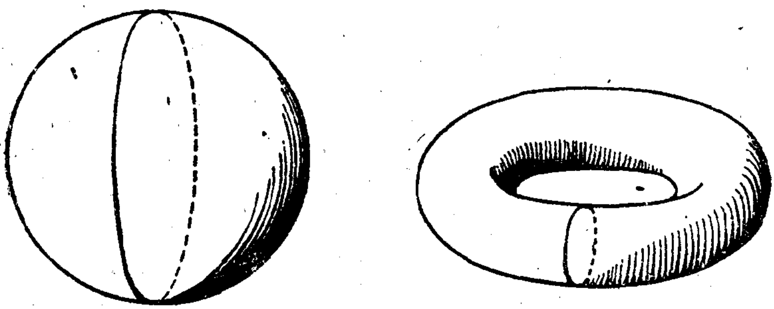
---

1) 在一曲面 $R_t$ 的复蓋面 $R_u$ 中，拓扑学上分为对于 $R_t$ 非分支的，即单值的跡映照 $t \to u$ 是局部一一的，与对于 $R_t$ 是分支的，即容許有孤立的支点(有如一冪映照的同样性質)，在这些点的邻近是失去了局部一一性者．

7. 在我們的例子中，主要单值化量簡单地是（閉的）$t$ 平面 $R_t$，卽亏格为零的曲面（球的拓扑等价类）。但在一般情形，一个代数方程 $f(x, y) = 0$ 的主要单值化量，曲面 $R_t$，并不属于此类：它是閉的，但其亏格一般不为零. 实則上，正如一橢圓的或超橢圓的曲綫

$$f(x, y) = y^2 - (x - a_1)\cdots(x - a_{2p+2})$$

的經典例子所指出，对于不同的值 $p = 0, 1, 2, \cdots$ 产生閉曲面的（定向的）各种可能的类型. 数目 $p$ 等于曲面 $R_t$ 的亏格. 这是确定一閉的（定向的）曲面的同胚类之决定性拓扑不变量. 对于 $p = 0$ 曲面模型为球面，对 $p = 1$ 为环面，对 $p = 2, \cdots$ 为 $p$ 重环面（具有 $p$ 个互不相交的"隧道"的球的上边曲面）.



$p=0$ $p=1$

图 2

8. 由以上得出一个关于亏格 $p \geqslant 1$ 的代数方程 $f(x, y) = 0$ 的拓扑单值化的值得注意的推論. 在此情形，曲面 $R_t$ 非单叶的，卽它不与复数 $u$ 平面的一子域同胚[1]. 对于任一相对地分支的或非分支的复盖面 $R_u$（这也是作为单值化量）如果是閉的也是非单

1) 直覺上这是显然的；一个严格的証明是借助于下面单叶曲面的性質，甚至可以用作单叶性的定义：这就是在曲面上若当曲綫定理成立，因此，曲面被在其上的任一簡单閉曲綫分为两个分离的部分. 这条件对于此曲面同胚于数值球的一子域是充分的，而且能以拓扑的方法証明；这条件的必須性是由于若当曲綫定理对于数值球的子域成立并由于此定理的成立显然是拓扑不变的. ——因为任一閉的 $p$ 重（$p \geqslant 1$）环面不被一子午綫所分开，故如此的曲面非单叶的.

叶的. 实則上,所有这些曲面同样有亏格 $p \geqslant 1$; 这是与尤拉多边形公式有关的所謂黎曼-何尔維兹(Riemann-Hurwitz)关系式的一个簡单推論. 为了得到一个单叶的复盖面 $R_u$, 必須引进主要单值化量 $R_t$ 的无穷多叶的开复蓋面. 在它們之中存在有单叶的,其中的一个就是 $R_t$ 的最高复盖面 $\hat{R}_u$. 它就是 $R_t$ 的所有的非分支复盖面中"最強的"一个,即它不仅复盖 $R_t$,而且复盖所有 $R_t$ 的非分支复蓋面;它不止是单叶的,并且甚至是单連通的. 一曲面在其上任一閉曲綫可連續地变形为一点(同伦于零)者称为单連通;如此的曲面或者同胚于整个数值球,或者同胚于除去一点的数值球. 这是一个曲面拓扑学的重要的問題,即証明任一閉的或开的曲面 $R$,有一确定的单連通最高复盖面 $\hat{R}$. 它通常是(对于一閉的亏格 $p \geqslant 1$ 的基曲面 $R$ 則必定是)在 $R$ 之上无穷多叶的; 唯一的例外是开的单連通曲面及亏格为零的閉曲面 $R$:对于这些曲面,$\hat{R}$ 与基曲面 $R$ 重合.

除了这最強的单值化量 $\hat{R}_u$ 外,对任一多連通的曲面 $R_t$ 有一些較弱的、单叶的、但是多連通的、$R_t$ 的复盖面 $R_u$.

**9.** 单叶的复蓋面对于解析的或保角的单值化特別重要. 一代数曲綫 $f(x, y) = 0$, 此处 $x$ 与 $y$ 分别为数值平面 $R_x$ 与 $R_y$ 的点时,在 $R_x$ 与 $R_y$ 之間定义了一个不只是連續而且是解析的映照,它除了在孤立的、有限級的支点外是保角的. 相应地,单值化問題要求建立一个单值的并解析的表示 $x = x(t)$, $y = y(t)$, 即此处迹映照 $R_t \to R_x$, $R_t \to R_y$, 除了在孤立的支点外是保角的. 当不仅在 $R_x$ 与 $R_y$,而且在单值化曲面 $R_t$ 定义了保角性时,这个問題才有意义的. 如此的一个曲面称为黎曼曲面. 一拓扑曲面是"連續地联結的",而一黎曼曲面不只連續地,而且是"保角地联結的". 对于一拓扑曲面,在每一点 $P$ 有一类局部单值化复参数,把 $P$ 的邻域 $U_P$ 映为 $z$ 平面的一单叶域,使得两不同的复参数 $z$ 与 $z'$ 拓扑地互相依賴(对于数值平面的初等的連續概念而言). 对于一黎曼曲面要在局部参数加上重要的限制的度量性条件,即对应于 $U_P$ 的可容許参数要互相(直接地)保角地依賴(此处保角性的概念也是初等

的，对复数平面定义的）.

**10.** 相应地，为了一解析的或保角的多値关系 $(x, y)$ 的单值化，要在两黎曼曲面 $R_x$ 与 $R_y$ 之間作单値化曲面（$R_t$，$R_u$ 等），它同样是黎曼曲面者．因此問題的解决分为两部分：

1° 拓扑部分　$R_x$ 与 $R_y$ 的单值化复蓋面 $R_t$（或 $R_u$ 等）的构造；

2° 保角部分　証明 $R_t$ 的同胚类能以一黎曼曲面 $R_t$（或 $R_u$ 等）來代表.

**11.** 第 1 节中一般形式的解析的单值化問題，原则上由如此的曲面 $R_t$（或 $R_u$ 等）的构造解决了．若我們还要求（特别对于代数曲綫和解析图象）单値化量 $R_u$ 是复 $u$ 平面的一子域，則根据上面所述，如果主要单値化量 $R_t$ 不是单叶的（这是很少发生的），还要作对于 $R_t$ 的单叶复蓋面 $\hat{R}$．这个作法只是可抽象地得到：首先由已与的关系 $(x, y)$ 出发作 $R_t$，然后单叶黎曼曲面 $R_u$ 是作为两維的，局部保角地联結的流形．但我們希望这抽象地定义的黎曼曲面 $R_u$ 特别地能以复数平面 $(u)$ 的子域来代表．这样就导致保角映照理論的大問題：

3° 保角映照論的主要問題　証明任一单叶的黎曼曲面保角等价于 $z$ 复平面的一域 $G_z$，即它能一一的并保角的映为此域.

**12.** 这个証明包含于保角映照理論的中心定理，此定理的严格的基础，使得一代数曲綫或最一般的解析图象，以一复参数 $u$ 的单値化成为可能．对于单連通的曲面 $R$（因此，特别对于最高复蓋面 $\hat{R}$）問題就关系到所謂黎曼映照定理，据此，如此的一个曲面拓扑地并保角地等价于下面三个域 $G_z$ 的标准形式之一：

1）整个平面　$|z| \leqslant \infty$；

2）除去一点的平面　$|z| < \infty$；

3）单位圓　$|z| < 1$.

对于单叶的，多連通的黎曼曲面 $R$，恆可找到一保角等价的 $z$ 平面的子域 $G_z$，例如全以平行綫段（或者点）为边界的域（平行割裂定理）.

步驟 1°，2°，3° 的联合，能使两黎曼曲面 $R_x$ 与 $R_y$ 的点之間

的任一多值解析关系 $(x, y)$ 解析地单值化之，使得单值化参数 $u$ 在复数平面的一子域 $R_u$ 中变化[1]。

**13.** 黎曼在他的关于代数函数及其积分理論的奠基性研究中，黎曼曲面思想的引进，标志了几何函数論、解析映照及拓扑学的巨大发展的开始。黎曼的概念，与解析函数論联系的几何方法的強調，特别是黎曼曲面的拓扑性質与度量保角的性質的清楚分开，使得解析函数論不平常地进展，并且它們的效果远远地扩大到这个特殊数学部門的領域之外。关于黎曼之后几何函数論的发展，重要的是黎曼曲面的概念，从开始时假定为对于另一流形的嵌入或另一流形的复盖的想法中逐漸解放出来。关于完全在普通黎曼微分几何意义下的黎曼曲面的抽象概念之形成，克莱因的貢献是重要的。近代的发展給这个概念带来了最后的明确。首先要提及的是这个在很多方面显著的工作，維尔 (Hermann Weyl) 的"黎曼曲面的思想"(1913)，稍后，关于此概念的基础性的研究，我要特别強調拉多 (Tibor Radó) 与史台路 (S. Stoilow) 的貢献。

**14.** 四十年后的今天，維尔的黎曼曲面論的体系仍然适合于作为标准的。因此在本书的工作中，对我关系重要的是，以一个尽可能完备的单值化主要性質的描述，来特别詳細地叙述，关于自維尔的工作出現后这理論的发展所得到的重要进步。一方面，这是关于理論的概念基础。另一方面，开黎曼曲面理論的、特别是近年来得到的进展似乎要适当的注意。恰在这个較少研究的、广闊的方向中，函数論似乎保留了一个十分有希望的前途。反之，我只在最重要的性質方面处理那些經典的、普遍地熟知的并以很多著名的方法而易于了解的閉曲面之亚倍尔积分論。

最后說几句关于方法的話。在这单值化教本中沒有以不同方

---

1) 从单值化問題的一般形式的观点 (参閱第 1 节)，这个条件实际上是 $R_u$"嵌入"于数值平面 $(u)$ 中，作为一个特别的限制。我們能更一般的問，是否关系 $(x,y)$ 的单值化能如此进行，使得单值化曲面 $R_u$ 非保角等价于 $u$ 平面的一子域 $G_u$，而等价于一任意已与的黎曼曲面 $R_v$ 的一 (单叶的) 子域 $G_v$。这引导到保角映照論的問題，还很少有研究的。

法的缺点．我以經典的許瓦茲与紐曼的交錯法引进基本的存在証明．对于此理論的建立，这个方法似乎比較其他方法［狄里希勒(Dirichlet)原理，庞加莱的扫除法，比龙(Perron)的上調和与下調和迫近法等］有某些原則上的优点，这在下面将更清楚地加以說明．选择原理的应用在可能范围内尽量避免．收斂的証明依賴于普通的单調原理［特别重要的是哈拿(Harnack)原理］及位函数論极大值原理的系統应用．

# 第一章　代数函数

为着得到黎曼曲面一般理論的直覚基础，在这一章中将研究一个复变数代数函数的重要性质．一般的单値化問題，历史上起源于寻找一代数曲綫的单値参数表示这个經典問題．代数函数的研究，自然而然地引渡到一般的概念与黎曼曲面論的建立問題，这是构成我們研究的目的．本章是关于这些問題的一个启发性的准备工作，这些問題将在以后各章中出現，并且以一般的观点来研究．

## §1．代数函数元素

**1.1. 定义**　設

$$F(z,w)=z^nP_0(w)+z^{n-1}P_1(w)+\cdots+zP_{n-1}(w)+P_n(w)=$$
$$=w^mQ_0(z)+w^{m-1}Q_1(z)+\cdots+wQ_{m-1}(z)+Q_m(z) \tag{1.1}$$

是在复数域上的 $z$ 与 $w$ 的多項式，而对 $z$ 为 $n$ 次、对 $w$ 为 $m$ 次．这多項式假定是**不可約的**：沒有一种分解 $F\equiv F_1F_2$，其中 $F_1$ 与 $F_2$ 皆非常数．我們提出研究属于方程

$$F(z,w)=0$$

的函数元素的問題．

在这里，关于一**正則函数元素** $w=w(z)$，我們了解为一函数，它是定义在 $z$ 平面的一个圓域 $C$ 的单値正則解析函数．一**分数解析函数元素** $w=w(z)$ 表示一函数，它定义在 $z$ 平面的一圓域 $C$ 的除了一个极点以外是正則的单値解析函数．

我們称：在圓域 $C$ 定义的**函数元素** $w=w(z)$ **属于方程** $F(z,w)=0$，如果在 $C$ 中恆等式 $F(z,w(z))=0$ 成立．

**1.2. 存在定理**　下面的存在定理对于以后的研究是基本的：

**定理 1.** 設 $a, b$ 是两有限复数，使得 $F(a, b)=0$ 与 $F_w(a, b)\neq 0$[1]，則有一以 $a$ 为中心的圓邻域，在其中存在一而只一正則函数元素 $w=w(z)$ 属于方程 $F(z, w)=0$，并且 $b=w(a)$.

这定理能使回忆起关于实的隐函数的可解性定理，并且能够应用此定理，把函数 $F(z, w)$ 分为实的与虚的部分証明之. 然而在这里給以一个純粹函数論的証明.

我們把多项式 $F(z, w)$ 安排为对 $w-b$ 的幂是递增的

$$F(z, w)=H_0(z)+H_1(z)(w-b)+\cdots+H_m(z)(w-b)^m. \tag{1.2}$$

由假設

$$F(a, b)=H_0(a)=0, \quad F_w(a, b)=H_1(a)\neq 0. \tag{1.3}$$

在 $z=a$ 与 $w=b$ 点附近，我們取两个如此的小的圓 $|z-a|\leqslant R_0$, $|w-b|\leqslant \rho_0$, 使得 $z$ 与 $w$ 属于这两圓中的任一对值 $(z, w)$ 满足：

$1^\circ$. $F_w(z, w)\neq 0$,

$2^\circ$. $|H_1(z)|>\dfrac{|H_1(a)|}{2}$,

$3^\circ$. $|H_2(z)(w-b)+\cdots+H_m(z)(w-b)^{m-1}|<\dfrac{|H_1(a)|}{4}$.

这是可能的，由于假設(1.3)与 $1^\circ$, $2^\circ$, $3^\circ$ 所考虑的多項式的連續性. 我們把正数 $R_0, \rho_0$ 取定之后，选择一数 $0<r_0\leqslant R_0$，使在 $|z-a|\leqslant r_0$ 满足

$4^\circ$. $|H_0(z)|<\dfrac{|H_1(a)|}{4}\rho_0$.

如此的数 $r_0$ 的存在也是由于 (1.3). 現在对于圓 $|z-a|\leqslant r_0$, $|w-b|\leqslant \rho_0$ 的任一对值 $(z, w)$，条件 $1^\circ$ 至 $4^\circ$ 是满足的.

在这些准备工作之后，我們証明对任一 $z$ 在 $|z-a|\leqslant r_0$ 有一而只有一 $w$ 在 $|w-b|\leqslant \rho_0$, 使 $F(z, w)=0$. 換言之，如 $z_0$ 为圓 $|z-a|\leqslant r_0$ 的任一点，多項式 $F(z_0, w)$ 在圓 $|w-b|\leqslant \rho_0$

1) $F_w(z, w)$ 代表 $F(z, w)$ 对 $w$ 的偏微分.

中具有唯一的单重零点.

为着証明，我們利用关于輻角变化的定理[1]. 多項式 $F(z_0, w)$ 在圓周 $|w-b| = \rho_0$ 是异于零的. 由(1.2),

$$F(z_0, w) = (w-b)\Big\{H_1(z_0) + [H_2(z_0)(w-b) + \cdots + H_m(z_0)(w-b)^{m-1}] + \frac{H_0(z_0)}{w-b}\Big\}.$$

由 3° 与 4°, 当 $|w-b| = \rho_0$,

$$H_2(z_0)(w-b) + \cdots + H_m(z_0)(w-b)^{m-1}$$

与

$$\frac{H_0(z_0)}{w-b}$$

之絕对值皆是小于 $\frac{|H_1(a)|}{4}$. 因而此两式的和之絕对值小于 $\frac{|H_1(a)|}{2}$. 所以当 $|w-b| = \rho_0$,

$$F(z_0, w) = (w-b)\left\{H_1(z_0) + \left\langle \frac{|H_1(a)|}{2} \right\rangle\right\}, \qquad (1.4)$$

在这里对于一正数 $M$, 我們以 $\langle M \rangle$ 表一复数其絕对值小于 $M$ 者. 根据 2°, (1.4) 中大括号以內的式异于零, 因为第一項的絕对值大于第二項的絕对值. 因此 $F(z_0, w) \neq 0$, 当 $|w-b| = \rho_0$.

多項式在圓 $|w-b| < \rho_0$ 的零点数目 $\mu$ 由輻角原理得之. 命 $c$ 表圓 $|w-b| \leqslant \rho_0$ 的圓周, 由(1.4)得

$$2\pi\mu = \Delta_c \arg F(z_0, w) = \Delta_c \arg(w-b) + \Delta_c \arg\{\ \},$$

其中符号 $\Delta_c$ 表 $w$ 点沿 $c$ 以正向繞一周时所考慮的函数的輻角之增加. 由于 $\Delta_c \arg(w-b) = 2\pi$, 要証明 $\mu = 1$, 必須証明 $\Delta_c \arg\{\ \}$ 为零. 这是由于下面熟知的結果[路契(Rouché)定理], 其中 $\xi = \{\ \}$ 之値表为另一 $\xi$ 平面的点. 在

$$\xi = H_1(z_0) + \left\langle \frac{1}{2}|H_1(a)| \right\rangle$$

1) 这定理将在第三章中就一般的, 黎曼曲面函数論所必須的形式来精確的討論之.