〔苏联〕А. Л. 哥尔琴文塞尔著

弹性薄壳理論

薛振东　刘树閫譯

彈性薄壳理論

〔苏联〕A. Л. 哥尔琴文塞尔 著
薛振东 刘树蘭 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是根据苏联国家技术理論书籍出版社(Гостехиздат) 1953 年出版的 А. Л. 哥尔琴文塞尔 (Гольденвейзер) 所著彈性薄壳理論 (Теория упругих тонких оболочек)一书譯出的.

这是一部专門研究彈性薄壳綫性理論的著作,同时又是一本用数学分析方法来探討壳体理論的名著. 书中闡述了近似計算方法的应用范圍并对它們的誤差进行了估計,特别对无力矩理論的广泛应用范圍进行了深入研究.

在书中,壳体理論的基本关系是用矢量分析法来論述的,球壳理論則用复变函数来处理, 特别是, 为了深入論証壳体的近似計算方法,还用了較多的篇幅来闡述漸近积分法,从而来研究具有小参数壳体微分方程系的积分的漸近性质. 本书的內容, 在很大程度上是作者多年研究的成果.

本书可供科学研究工作者以及从事于高等工业院校教学和工程技术的人員参考之用.

ТЕОРИЯ УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

А. Л. Гольденвейзер

Гостехиздат · 1953

彈 性 薄 壳 理 論

薛振东 刘树蘭 譯

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷三厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 787×1092 1/18 印張 29 4/18 排版字数 609,000

1963 年10月第 1 版 1963 年10月第 1 次印刷 印数 1—2,600

統一书号 15119·1436 定价(十四) 4.00 元

序　　言

本书所研究的壳体理論是建立在标准微元不变性的假設上的. 在书中，假定壳体的材料是各向同性的并服从于广义的虎克定律；而变形、位移和旋轉角都小到足以将这些数值的二次幂可以略去不計的程度. 然而，对极其重要的，但目前还研究得不够的壳体塑性变形的問題并沒有涉及. 壳体理論的非綫性問題及平衡狀态的稳定性問題也不在探討范圍之內.

壳体理論是彈性理論中在实用方面最重要的一个部分. 薄壳型結构在各种各样的工业部門中都得到了应用. 根据不完全的統計，这些部門包括飞机制造，工业厂房和住宅建筑，化学机械制造，电动机制造，造船等. 这就是为什么人們对壳体理論的兴趣愈来愈高以及近年来在这一問題上获得了巨大成就的原因. 在壳体計算方面所得到的結果在許多科学論文中都有叙述，在討論其他問題的文献中也有部分地涉及到这个問題的. 但是，如果談到近十年来国内出版的专門討論壳体綫性理論的书籍，当首推下面三部专著：B. З. 符拉索夫的“壳体的一般理論”，B. B. 諾沃日洛夫的“薄壳理論”和 A. И. 魯利叶的“薄壳靜力学”. 在这些书籍中，反映出范圍极广的設想和实际所得結果，但闡述还觉不够詳尽. 本书当然也不可能承担这样的任务，但无可否认的是作者却試用了比上述专著更一般性的观点来叙述壳体理論.

壳体理論是一門具有明显实用性质的科学，在这一理論中，最重要的是建立近似計算法的問題，特別是关于在起始关系中消除某些数值的問題，这些数值不会显著影响到最終結果而只能給計算带来实质上对事无所补益的困难. 为了达到这个目的，可以选擇两条途徑. 一条是广泛利用某些由經驗証明了的关于某一因素的相对作用的假設. 另一条是对壳体理論的起始关系进行数学分析. 因此，近来我們开始区分出壳体的实用理論和数学理論. 顧名思义，这两个术語正确地反映了上述两条途徑的原則性的特点，但如談到結果，則壳体的实用理論和数学理論的划分就失去了意义，因为所有已知的近似方法也都可以借助于数学分析来导出，而通过理論途徑所得到的解也不难予以簡单的物理解釋.

壳体的实用理論和数学理論（如果继續使用这两个假定的术語）都各有其优点. 关于前一种理論，根据 B. З. 符拉索夫的著作可以得到极明晰的概念. 壳体

实用理論的主要优点是比較簡单，它所应用的概念对設計工程师来說也比較习慣。但是，同时这也就是它的缺点，因为在这些簡单概念的范圍內不可能包括較为复杂的情况。壳体实用理論的弱点是它所推荐的方法的应用范圍的表述方式，这种表述方式不甚具体，因而使我們不能够估計可能的誤差。

壳体的数学理論比較难于掌握，但它的范圍却比較广闊，随着技术的发展計算方式肯定越来越复杂，它将显得特別重要。此外，壳体的数学理論还有如下的优点，卽它使我們能够比較明确地表述近似計算法的应用范圍并对它們的誤差进行估計。B. B. 諾沃日洛夫和 A. И. 魯利叶基本上依靠了壳体理論方程的数学分析，但潜藏在这一分析方法中的各种可能性在他們的著作中闡明得还不够充分，因为这两位作者的闡述局限在問題的一定范圍之內。

本书作者的主要任务是尽可能完整地表述壳体的各种近似計算法，闡明每一种方法的应用范圍，对可能的誤差进行甚至是粗略的估計。基本的研究方法是壳体理論起始关系的数学分析法，而把这些关系考虑为具有小参数的微分方程系。这样就可以从統一的观点出发来考虑所有初看起来在邏輯上互不联系的壳体近似計算法。书中述及的材料可以部分地用 B. З. 符拉索夫，B. B. 諾沃日洛夫和 A. И. 魯利叶的研究結果来加以补充。所以作者认为仅仅从原則性方面来研究一系列在应用上很重要的問題是可能的，因为对这些問題在作者的前輩的专著中曾进行了詳細的研究。这些問題是：旋轉壳体的計算，扁壳的計算和任意外形的圓柱形壳体的某些計算方法。

本书的論述在很大程度上是根据作者多年研究的結果，全书的結构如下。

在第一篇中，根据标准微元保持不变的熟知的假設来推导出壳体理論的一般公式和方程。放弃了通常采用的壳体中間曲面属于曲率綫的假設。壳体一般理論的所有关系都可用以下的两个方案来推导：

(a) 完全是任意的曲綫坐标，以及

(b) 正交的、但一般說来是不共軛的曲綫坐标；同时广泛利用了矢量分析法，而这种方法是讀者充分熟悉的。

在第一篇的第一章中簡短地重述了曲面理論中的某些概念。它們不仅有助于理解本书的本篇，而且对于理解有关建立壳体近似計算法的一系列問題都是必需的。

第二篇討論无力矩理論。在壳体近似計算法中这一应用最广的理論差不多是和比較一般的力矩理論同时产生的；它时常象薄彈性体（在薄彈性体中沿厚度的应力几乎是均布的）理論那样不和力矩理論联系起来叙述。这种观点具有不容怀疑的物理明显性的优点，但却不能使我們理解无力矩理論在其他近似計算方法中所占的地位，也不能够使我們确定无力矩理論的应用范圍。本书正是針对这些問題

予以特殊的注意:在这里把无力矩理論作为力矩理論的特殊情况来闡述,而把无力矩方程作为力矩理論相应方程簡化的結果来闡述.

有关按无力矩理論来計算壳体的文献非常丰富，作者的目的并不是重述在这方面所得到的一切結果. 除了集中在第五章中的一般問題之外，只考慮到与零曲率壳体(包括圓柱形和圓錐形壳体)和球形壳体的計算有关的問題，并在§23中表明球形壳体的計算方法也可以推广到外形为正曲率二次曲面的壳体. 这样来选擇材料的原因是：第一，圓柱形、圓錐形和球形壳体已包括了在实际結构中最常遇到的壳体;第二,对这些壳体能够求得无力矩方程的一般积分并最突出地說明无力矩理論的基本原理.

与无力矩理論有关的問題在本书后几篇中也要涉及. 在这几篇中我們是把无力矩理論和壳体的其他近似計算法联系起来考虑的，所以在第二篇中沒有提出关于确定无力矩理論应用范圍的問題. 此外，有必要涉及无力矩理論与曲面弯曲理論及杆件体系理論的联系的問題. 这样，我們就能在以下几篇中确定壳体的几何形状怎样影响到壳体应力状态的性质,并用工程上所习用的术語来表述某些原理.

第五和第六章中所用的数学方法都是初等的;为了理解第七、第八、第九三章，必須先行熟悉复变函数理論的基本原理.

在第三篇中借助于三角級数研究了圓柱形壳体的計算方法. 把这个比較特殊的問題划分出来专門加以研究,是有两个原因的:第一,圓柱形壳体在現实結构中比其他壳体更为常見; 第二，圓柱形壳体的計算方法比較簡单. 后一种情况使我們能够极为詳尽地研究这种壳体的应力状态的性质并看出任意外形的壳体所具有的性质,而以后在建立一般近似計算法时是要依据这些性质来进行的. 因此,圓柱形壳体可以作为一个特殊的标准，用这个标准可以檢驗以后各篇中所叙述的一般近似方法.

第三篇中的基本內容是建立近似方法(多数是文献中所熟知的). 这些方法是通过研究精确的关系式和去掉这些关系式中的次要各項来推导的. 同时，逐漸連貫全书的基本設想：必須使各种近似方法专門化，使它們适应于一定类型的問題，以便把比較复杂的情况归納为已經研究过的、相应地划分未知应力状态的方法.

第四篇基本上具有数学的特性，它的目的是論証壳体的近似計算法. 在本书的这一部分中，把壳体理論的方程作为含有高阶导数的小参数 h^* (相对半个厚度)的方程来考慮，并研究了这个方程系积分的漸近(当 $h^*\to 0$ 时)性质. 基本的研究方法是漸近积分法. 它在应用于偏微分方程时会遇到一系列的阻碍，所以不可能保持彻底的数学严格性或使所涉及的問題都研究得詳尽无遺. 讀者将会发現，在一系列情况下作者在很大程度上限制了一般性或用假定来代替証明. 漸近过程的收斂性問題在这里完全沒有涉及.

序　言

在第五篇中闡述了以前面所得結果为依据的壳体近似計算法．我們用計算实踐中应用得最广泛的近似方法——无力矩理論作为本篇的出发点．在确定了足够的无力矩理論应用条件之后，我們順次引用这些条件中某一条件遭到破坏的假設，并根据該問題的特性来确定每一种情况的近似方法．如果能够始終按照这种方式来进行，而在全部討論中都能考虑到一般的情况，則利用这种方式就能得到壳体的完全适用的近似計算法．但是，目前我們还不能做到这一点．某些重要的实际問題之所以不能加以考虑，一方面是因为考虑它們就要占用过多的篇幅，另一方面是因为目前还不可能充分詳尽地来进行研究．

对于所提出的近似計算法只能对漸近誤差进行估計，即确定在壳体相对厚度无限制地減小时誤差的減小規律．由于壳体的相对厚度与单位值比較起来通常是很小的，因此利用漸近誤差就有可能判断一般性的誤差．但是，作出这种結論时应該特別小心，特別是在中間曲面的曲率或它的第一二次式的系数在所研究的范圍內发生很大变化的情况下尤須謹愼从事．

本书的叙述方式是这样的：每一篇都可成为一个独立完备的整体．因此，作者并未力求保持文体的統一，有时也有一些重复．

目　　录

第二篇　无力矩理論

第三篇　圓柱形壳体

第四篇　任意壳体的应力状态的分析

第五篇　壳体的近似計算法

第 一 篇

壳体理論的基本关系

第 一 章

曲面理論概要

§1. 曲面上的曲綫坐标及第一二次式

在第一章中我們将簡短地、几乎不加証明地叙述一些曲面理論的概念，而这些概念在后面将予以应用. 这里所涉及的問題在任何一本曲面理論的教程中都有闡述，但这里的叙述与 C. П. 菲尼柯夫的"曲面理論"教程更为相近.

三度量空間的曲綫可以用矢量方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1-1}$$

来給出，式中 $\boldsymbol{r}$——曲綫的矢徑；t——任意参数.

同样，三度量空間的曲面也可以用矢量方程

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}(\alpha,\ \beta) \tag{1-2}$$

来給出，式中 $\boldsymbol{M}$——曲面的矢徑；α, β——任意参数.

用等式(1-2)不仅可以确定曲面的几何性質，而且还可以得到在这一曲面上定点的方法，因为参数 (α, β) 的每一对数值都对应于曲面上一定的点(或許多点). 假設参数 α 保持不变値 $\alpha=\alpha_0$，而 β 发生变化. 这时，用方程(1-2)就可决定位于所考慮的曲面內的空間曲綫. 这样的綫称为 β 綫，因为它們的特点是：在它們上面只有参数 β 才会变化. 一定区間中的所有 α_0 数値的总和将与 β 綫族相对应.

現在还可以引用关于 α 綫族的概念.

在同时給出了两个参数的数値之后，我們就可以在曲面上确定两根曲綫相交处的一点(或几点)，这两根曲綫中的一根属于 β 綫族，另一根則属于 α 綫族. 这样，在用方程(1-2)确定的曲面和与一定的坐标系有关的平面之間就存在着完全类似之处，所以 β 綫和 α 綫通常称为曲面的曲綫坐标.

如果在方程(1-2)中以形式为

$$\alpha'=\alpha'(\alpha,\ \beta) \qquad \beta'=\beta'(\alpha,\ \beta) \tag{1-3}$$

的公式代替独立参数，則可得到方程：

$$\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{M}'(\alpha',\ \beta')$$

用这个方程当然也可以确定方程(1-2)所确定的曲面,但与这个曲面相关联的曲綫坐标是在变化着的. 然而,在特殊情况下,卽当公式(1-3)的形式为

$$\alpha' = \alpha'(\alpha) \qquad \beta' = \beta'(\beta)$$

时,坐标綫的几何外形仍然同前一样,因为在这种情况下不变值 α 和 β 相当于不变值 α' 和 β'.

以后如果沒有提出异議,我們总是假定参数(α, β)具有一定的变化区域 S,同时在 S 点和我們所感兴趣的一部分曲面的点之間存在着相关的单値对应的情况.

現在我們引进符号:

$$\boldsymbol{M}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \alpha} \qquad \boldsymbol{M}_\beta = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \beta}$$

并来研究矢量 $\boldsymbol{M}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{M}_\beta$. 众所周知,$\boldsymbol{M}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{M}_\beta$ 在 α 綫和 β 綫的切綫方向是重合的. 我們用 A 和 B 来表示这两个矢量的长度;于是,

$$\boldsymbol{M}_\alpha^2 = A^2 \qquad \boldsymbol{M}_\beta^2 = B^2 \tag{1-4}$$

(在这里和以后各处,矢量的平方都是指矢量本身的标量积而言).

这样,$\dfrac{1}{A}\boldsymbol{M}_\alpha$ 和 $\dfrac{1}{B}\boldsymbol{M}_\beta$ 是切于坐标綫的单位矢量. 因而,

$$\frac{\boldsymbol{M}_\alpha}{A} \cdot \frac{\boldsymbol{M}_\beta}{B} = \cos\chi \tag{1-5}$$

式中 χ——坐标綫之間的夹角.

也象在曲面理論中經常所发生的那样,假定在我們所感兴趣的区域中,处处都是:

$$\sin\chi \neq 0 \tag{1-6}$$

卽 α 綫和 β 綫在任何地方也互不相关.

我們在曲面上指出两个任意近的点(α, β) 和 $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$,它們决定着对坐标綫来說是任意指向的某一方向. 这时,矢量 $\boldsymbol{M}$ 在由第一点过渡到第二点时所得到的增量,其主要部分将为:

$$d\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_\alpha d\alpha + \boldsymbol{M}_\beta d\beta$$

由此,利用关系式(1-4)和(1-5),便可得到曲面上任意曲綫弧长微分平方的公式:

$$d\boldsymbol{M}^2 = ds^2 = A^2 d\alpha^2 + 2AB\cos\chi\, d\alpha\, d\beta + B^2 d\beta^2 \tag{1-7}$$

这个等式的右边部分称为曲面的第一二次式。它完全借助于給出的三个数值 A, B, χ 来决定,这三个数值我們称为**第一二次式的系数**[1]. 經証明,用第一二次式完全可以决定曲面的几何形式. 这就是說,知道了 A, B 和 χ 并借助于 $\beta = \beta(\alpha)$ 形式的方程在曲面上确定了曲綫之后,我們就可以計算这些綫的长度以及它們相

[1] 严格地說,数值 A^2, B^2 和 $AB\cos\chi$ 才能称为第一二次式的系数,但在壳体理論中数值 A, B 和 χ 运用起来比較方便.

交的夹角，甚至在我們还不知道曲面方程的情况下也可以进行計算．此外，用第一二次式不能决定曲面本身．我們可以建立与参数 a 有关的曲面族：

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}(\alpha,\ \beta;\ a) \tag{1-8}$$

而数值

$$\boldsymbol{M}_\alpha^2=A^2 \qquad \boldsymbol{M}_\beta^2=B^2 \qquad \boldsymbol{M}_\alpha\cdot\boldsymbol{M}_\beta=AB\cos\chi$$

在 a 为任何数值时都将保留自己的数值．

参数 a 的連續变化对应于曲面(1-8)的某种連續变形，在发生这种变形时，曲面上所形成的曲綫的弧长以及曲綫之間的夹角都将保持不变．这种变形称为曲面的弯曲．这一概念在薄壳理論中起着重要的作用．

§ 2. 曲面的基本三面形和輔助三面形 沿基本三面形和輔助三面形的軸的任意矢量的展开

現在我們引进曲面法綫的单位矢量并用 $\boldsymbol{n}$ 来表示它．它与矢量 $\boldsymbol{M}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{M}_\beta$ 正交并由下面的关系式来联系：

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{AB\sin\chi}[\boldsymbol{M}_\alpha\times\boldsymbol{M}_\beta]$$

(在这里和在以后各处，符号×表示矢量积)．

三个单位矢量 $\frac{1}{A}\boldsymbol{M}_\alpha$，$\frac{1}{B}\boldsymbol{M}_\beta$，$\boldsymbol{n}$ 称为曲面 (1-2) 的基本矢量．它們共同組成某一个可动的三面形，我們称这个三面形为基本三面形．

根据条件(1-6)，基本矢量在任何地方也不共面 (即在任何地方也不位于一个平面之內)．由此得出，任何矢量 $\boldsymbol{S}(\alpha,\ \beta)$ 都可表示为三个基本矢量的綫性組合：

$$\boldsymbol{S}=s_\alpha\frac{\boldsymbol{M}_\alpha}{A}+s_\beta\frac{\boldsymbol{M}_\beta}{B}+s_n\boldsymbol{n} \tag{2-1}$$

形式为(2-1)的矢量沿着基本三面形的軸展开，而标量 s_α，s_β，s_n 称为矢量 $\boldsymbol{S}$ 的基本分量[1]．以后我們将常常利用这样的符号：

$$s_\alpha=|\boldsymbol{S}|_\alpha \qquad s_\beta=|\boldsymbol{S}|_\beta \qquad s_n=|\boldsymbol{S}|_n$$

矢量的基本分量，只有当曲面是属于正交坐标系$\left(\chi=\frac{\pi}{2}\right)$的时候，才与它在基本三面形的軸上的投影相等．

現在引进两个輔助矢量 $\boldsymbol{N}_{(\alpha)}$ 和 $\boldsymbol{N}_{(\beta)}$，并且用下面的要求来确定它們：(1) $\boldsymbol{N}_{(\alpha)}$ 和 $\boldsymbol{N}_{(\beta)}$ 位于切面內；(2) $\boldsymbol{N}_{(\alpha)}$ 和矢量 $\boldsymbol{M}_{(\beta)}$ 正交，而 $\boldsymbol{N}_{(\beta)}$ 与矢量 $\boldsymbol{M}_\alpha$ 正交；(3) 矢量 $\boldsymbol{N}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{N}_\beta$ 的长度分别等于 A 和 B；(4) $\boldsymbol{N}_{(\alpha)}$ 和 $\boldsymbol{N}_{(\beta)}$ 与矢量 $\boldsymbol{M}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{M}_\beta$ 組成銳角 (图 1)．

[1] "矢量的分量"应参考 Н. Е. Кочина 著的 "Векторное исчисление и начала тензорного исчисления" 一书中的这一术語来加以理解．

这就是說，应当有以下的关系式：

$$\left.\begin{array}{llll} \boldsymbol{N}_{(\alpha)}\cdot\boldsymbol{n}=0 & & \boldsymbol{N}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{n}=0 & \\ \boldsymbol{N}_{(\alpha)}\cdot\boldsymbol{M}_\beta=0 & & \boldsymbol{N}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{M}_\alpha=0 & \\ \boldsymbol{N}^2_{(\alpha)}=A^2 & & \boldsymbol{N}^2_{(\beta)}=B^2 & \\ \dfrac{\boldsymbol{M}_\alpha}{A}\cdot\dfrac{\boldsymbol{N}_{(\alpha)}}{A}=\sin\chi & & \dfrac{\boldsymbol{M}_\beta}{B}\cdot\dfrac{\boldsymbol{N}_{(\beta)}}{B}=\sin\chi & \end{array}\right\} \quad (2\text{-}2)$$

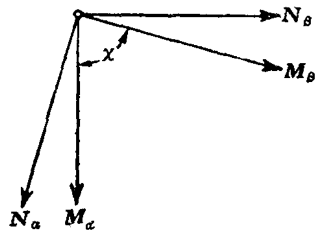

图 1

因此，不难証明，$\boldsymbol{N}_{(\alpha)}$ 和 $\boldsymbol{N}_{(\beta)}$ 可以用下面的公式来表示：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{N}_{(\alpha)}}{A}&=\frac{1}{\sin\chi}\,\frac{\boldsymbol{M}_\alpha}{A}-\frac{\cos\chi}{\sin\chi}\,\frac{\boldsymbol{M}_\beta}{B} \\ \frac{\boldsymbol{N}_{(\beta)}}{B}&=\frac{1}{\sin\chi}\,\frac{\boldsymbol{M}_\beta}{B}-\frac{\cos\chi}{\sin\chi}\,\frac{\boldsymbol{M}_\alpha}{A} \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}3)$$

在特殊情况下，当曲綫坐标系是正交，即 $\chi=\frac{\pi}{2}$ 时，矢量 $\boldsymbol{N}_{(\alpha)}$ 和 $\boldsymbol{N}_{(\beta)}$ 与 $\boldsymbol{M}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{M}_\beta$ 重合。

将等式 (2-1) 的两边依次与 $\frac{\boldsymbol{N}_{(\alpha)}}{A}$，$\frac{\boldsymbol{N}_{(\beta)}}{B}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 进行标量相乘，并借助于(2-2)加以简化，便可得到：

$$\left.\begin{aligned} s_\alpha&=|\boldsymbol{S}|_\alpha=\frac{1}{\sin\chi}\,\boldsymbol{S}\cdot\frac{\boldsymbol{N}_{(\alpha)}}{A} \\ s_\beta&=|\boldsymbol{S}|_\beta=\frac{1}{\sin\chi}\,\boldsymbol{S}\cdot\frac{\boldsymbol{N}_{(\beta)}}{B} \\ s_n&=|\boldsymbol{S}|_n=\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n} \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}4)$$

由此可知，如果对某一矢量 $\boldsymbol{T}$ 来説，我們知道数值 τ_α，τ_β，τ_n：

$$\tau_\alpha=\boldsymbol{T}\cdot\frac{\boldsymbol{N}_{(\alpha)}}{A} \qquad \tau_\beta=\boldsymbol{T}\cdot\frac{\boldsymbol{N}_{(\beta)}}{B} \qquad \tau_n=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}$$

则 $\boldsymbol{T}$ 可以借助于公式：

$$\boldsymbol{T}=\frac{\tau_\alpha}{\sin\chi}\,\frac{\boldsymbol{M}_\alpha}{A}+\frac{\tau_\beta}{\sin\chi}\,\frac{\boldsymbol{M}_\beta}{B}+\tau_n\boldsymbol{n} \quad (2\text{-}5)$$

沿着基本三面形的軸来展开。

三个单位矢量 $\frac{\boldsymbol{N}_{(\alpha)}}{A}$，$\frac{\boldsymbol{N}_{(\beta)}}{B}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 称为曲面的輔助矢量，它們共同組成可动的輔助三面形。輔助矢量也和基本矢量一样，在任何地方也不共面。因此，任意矢量 $\boldsymbol{S}$ 不仅可以表示为(2-1)的形式，而且还可以表示为：

$$\boldsymbol{S}=s'_\alpha\,\frac{\boldsymbol{N}_{(\alpha)}}{A}+s'_\beta\,\frac{\boldsymbol{N}_{(\beta)}}{B}+s'_n\boldsymbol{n} \quad (2\text{-}6)$$

如果 $\boldsymbol{S}$ 是借助于公式(2-6)来得出的，那么我們説，这个矢量是沿輔助三面形的軸展开的，而数值 s'_α，s'_β 和 s'_n 称为矢量 $\boldsymbol{S}$ 的輔助分量，同时利用这样的符号：

$$s'_\alpha=|\boldsymbol{S}|'_\alpha \qquad s'_\beta=|\boldsymbol{S}|'_\beta \qquad s'_n=|\boldsymbol{S}|'_n$$