

〔苏联〕A. Л. 哥尔琴文塞尔著

弹性薄壳理论

薛振东 刘树闾译

52.54
460
C.2

彈性薄壳理論

〔苏联〕A. И. 哥尔琴文塞尔 著

薛振东 刘树闌 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是根据苏联国家技术理論书籍出版社(Гостехиздат) 1953 年出版的 А. Л. 哥尔岑文塞尔 (Гольденвейзер) 所著彈性薄壳理論 (Теория упругих тонких оболочек) 一书譯出的。

这是一部專門研究彈性薄壳綫性理論的著作, 同时又是一本用数学分析方法來探討壳体理論的名著。书中闡述了近似計算方法的应用范围并对它們的誤差进行了估計, 特別对无力矩理論的广泛应用范围进行了深入研究。

在书中, 壳体理論的基本关系是用矢量分析法來論述的, 球壳理論則用复变函数來处理, 特別是, 为了深入論証壳体的近似計算方法, 还用了較多的篇幅來闡述漸近积分法, 从而來研究具有小参数壳体微分方程系的积分的漸近性质。本书的內容, 在很大程度上是作者多年研究的成果。

本书可供科学研究工作者以及从事于高等工业院校教学和工程技术的人員参考之用。

ТЕОРИЯ УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

А. Л. Гольденвейзер

Гостехиздат • 1953

彈 性 薄 壳 理 論

薛振东 刘树闡 譯

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷三厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 787×1092 1/18 印張 29 4/18 排版字数 609,000
1963 年 10 月 第 1 版 1963 年 10 月 第 1 次印刷 印数 1—2,600

統一书号 15119·1436 定价(十四) 4.00 元

序 言

本书所研究的壳体理論是在标准微元不变性的假設上的。在书中,假定壳体的材料是各向同性的并服从于广义的虎克定律;而变形、位移和旋轉角都小到足以将这些数值的二次幂可以略去不計的程度。然而,对极其重要的,但目前还研究得不够的壳体塑性变形的問題并没有涉及。壳体理論的非綫性問題及平衡状态的稳定性問題也不在探討范围之内。

壳体理論是彈性理論中在实用方面最重要的一个部分。薄壳型結構在各种各样的工业部門中都得到了应用。根据不完全的統計,这些部門包括飞机制造,工业厂房和住宅建筑,化学机械制造,电动机制造,造船等。这就是为什么人們对壳体理論的兴趣愈来愈高以及近年来在这一問題上获得了巨大成就的原因。在壳体計算方面所得到的結果在許多科学論文中都有叙述,在討論其他問題的文献中也有部分地涉及到这个問題的。但是,如果談到近十年来国内出版的專門討論壳体綫性理論的书籍,当首推下面三部专著: B. 3. 符拉索夫的“壳体的一般理論”, B. B. 諾沃日洛夫的“薄壳理論”和 A. И. 魯利叶的“薄壳靜力学”。在这些书籍中,反映出范围极广的設想和实际所得結果,但闡述还觉不够詳尽。本书当然也不可能承担这样的任务,但无可否认的是作者却試用了比上述专著更一般性的观点来叙述壳体理論。

壳体理論是一門具有明显实用性质的科学,在这一理論中,最重要的是建立近似計算法的問題,特别是关于在起始关系中消除某些数值的問題,这些数值不会显著影响到最終結果而只能給計算带来实质上对事无所补益的困难。为了达到这个目的,可以選擇两条途徑。一条是广泛利用某些由經驗証明了的关于某一因素的相对作用的假設。另一条是对壳体理論的起始关系进行数学分析。因此,近来我們开始区分出壳体的实用理論和数学理論。顾名思义,这两个术语正确地反映了上述两条途徑的原則性的特点,但如談到結果,則壳体的实用理論和数学理論的划分就失去了意义,因为所有已知的近似方法也都可以借助于数学分析来导出,而通过理論途徑所得到的解也不难予以简单的物理解釋。

壳体的实用理論和数学理論(如果繼續使用这两个假定的术语)都各有其优点。关于前一种理論,根据 B. 3. 符拉索夫的著作可以得到极明晰的概念。壳体

实用理论的主要优点是比較简单,它所应用的概念对设计工程师来说也比较习惯。但是,同时这也就是它的缺点,因为在这些简单概念的范围內不可能包括较为复杂的情况。壳体实用理论的弱点是它所推荐的方法的应用范围的表述方式,这种表述方式不甚具体,因而使我们不能够估计可能的误差。

壳体的数学理论比較难于掌握,但它的范围却比較广阔,随着技术的发展计算方式肯定越来越复杂,它将显得特別重要。此外,壳体的数学理论还有如下的优点,即它使我们能够比較明确地表述近似计算法的应用范围并对它们的误差进行估计。B. B. 諾沃日洛夫和 A. H. 魯利叶基本上依靠了壳体理论方程的数学分析,但潜藏在这一分析方法中的各种可能性在他们的著作中闡明得还不够充分,因为这两位作者的闡述局限在問題的一定范围之內。

本书作者的主要任务是尽可能完整地表述壳体的各种近似计算法,闡明每一种方法的应用范围,对可能的误差进行甚至是粗略的估计。基本的研究方法是壳体理论起始关系的数学分析法,而把这些关系考虑为具有小参数的微分方程系。这样就可以从统一的观点出发来考虑所有初看起来在邏輯上互不联系的壳体近似计算法。书中述及的材料可以部分地用 B. 3. 符拉索夫, B. B. 諾沃日洛夫和 A. H. 魯利叶的研究結果来加以补充。所以作者认为仅仅从原則性方面来研究一系列在应用上很重要的問題是可能的,因为对这些問題在作者的前輩的专著中曾进行了詳細的研究。这些問題是:旋轉壳体的計算,扁壳的計算和任意外形的圓柱形壳体的某些計算方法。

本书的論述在很大程度上是根据作者多年研究的結果,全书的结构如下。

在第一篇中,根据标准微元保持不变的熟知的假設来推导出壳体理论的一般公式和方程。放弃了通常采用的壳体中間曲面属于曲率綫的假設。壳体一般理论的所有关系都可用以下的两个方案来推导:

(a) 完全是任意的曲綫坐标,以及

(b) 正交的、但一般說来是不共軛的曲綫坐标;同时广泛利用了矢量分析法,而这种方法是讀者充分熟悉的。

在第一篇的第一章中簡短地重述了曲面理论中的某些概念。它們不仅有助于理解本书的本篇,而且对于理解有关建立壳体近似计算法的一系列問題都是必需的。

第二篇討論无力矩理论。在壳体近似计算法中这一应用最广的理论差不多是和比較一般的力矩理论同时产生的;它时常象薄彈性体(在薄彈性体中沿厚度的应力几乎是均布的)理论那样不和力矩理论联系起来叙述。这种观点具有不容怀疑的物理明显性的优点,但却不能使我们理解无力矩理论在其他近似计算方法中所占的地位,也不能够使我们确定无力矩理论的应用范围。本书正是针对这些問題

予以特殊的注意:在这里把无力矩理論作为力矩理論的特殊情况来阐述,而把无力矩方程作为力矩理論相应方程簡化的結果来阐述。

有关按无力矩理論来計算壳体的文献非常丰富,作者的目的是并不是重述在这方面所得到的一切結果。除了集中在第五章中的一般問題之外,只考虑到与零曲率壳体(包括圓柱形和圓錐形壳体)和球形壳体的計算有关的問題,并在§23中表明球形壳体的計算方法也可以推广到外形为正曲率二次曲面的壳体。这样来选择材料的原因是:第一,圓柱形、圓錐形和球形壳体已包括了在实际結構中最常遇到的壳体;第二,对这些壳体能够求得无力矩方程的一般积分并最突出地說明无力矩理論的基本原理。

与无力矩理論有关的問題在本书后几篇中也要涉及。在这几篇中我們是把无力矩理論和壳体的其他近似計算法联系起来考虑的,所以在第二篇中沒有提出关于确定无力矩理論应用范围的問題。此外,有必要涉及无力矩理論与曲面弯曲理論及杆件体系理論的联系的問題。这样,我們就能在以下几篇中确定壳体的几何形状怎样影响到壳体应力状态的性质,并用工程上所习用的术语来表述某些原理。

第五和第六章中所用的数学方法都是初等的;为了理解第七、第八、第九三章,必須先行熟悉复变函数理論的基本原理。

在第三篇中借助于三角級数研究了圓柱形壳体的計算方法。把这个比較特殊的問題划分出来專門加以研究,是有两个原因的:第一,圓柱形壳体在现实結構中比其他壳体更为常見;第二,圓柱形壳体的計算方法比較簡單。后一种情况使我們能够极为詳尽地研究这种壳体的应力状态的性质并看出任意外形的壳体所具有的性质,而以后在建立一般近似計算法时是要依据这些性质来进行的。因此,圓柱形壳体可以作为一个特殊的标准,用这个标准可以檢驗以后各篇中所叙述的一般近似方法。

第三篇中的基本内容是建立近似方法(多数是文献中所熟知的)。这些方法是通过研究精确的关系式和去掉这些关系式中的次要各項来推导的。同时,逐漸速貫全书的基本設想:必須使各种近似方法專門化,使它們适应于一定类型的問題,以便把比較复杂的情况归納为已經研究过的、相应地划分未知应力状态的方法。

第四篇基本上具有数学的特性,它的目的是論証壳体的近似計算法。在本书的这一部分中,把壳体理論的方程作为含有高阶导数的小参数 h^* (相对半个厚度)的方程来考虑,并研究了这个方程系积分的漸近(当 $h^* \rightarrow 0$ 时)性质。基本的研究方法是漸近积分法。它在应用于偏微分方程时会遇到一系列的阻碍,所以不可能保持彻底的数学严格性或使所涉及的問題都研究得詳尽无遺。讀者将会发现,在一系列情况下作者在很大程度上限制了一般性或用假定来代替証明。漸近过程的收敛性問題在这里完全沒有涉及。

序 言

在第五篇中闡述了以前面所得結果为依据的壳体近似計算法。我們用計算實踐中应用得最广泛的近似方法——无力矩理論作为本篇的出发点。在确定了足够的无力矩理論应用条件之后,我們順次引用这些条件中某一条件遭到破坏的假設,并根据該問題的特性来确定每一种情况的近似方法。如果能够始終按照这种方式来进行,而在全部討論中都能考慮到一般的情况,則利用这种方式就能得到壳体的完全适用的近似計算法。但是,目前我們还不能做到这一点。某些重要的实际問題之所以不能加以考慮,一方面是因为考慮它們就要占用过多的篇幅,另一方面是因为目前还不可能充分詳尽地来进行研究。

对于所提出的近似計算法只能对漸近誤差进行估計,即确定在壳体相对厚度无限制地减小时誤差的减小規律。由于壳体的相对厚度与单位值比較起来通常是很小的,因此利用漸近誤差就有可能判断一般性的誤差。但是,作出这种結論时应該特別小心,特別是在中間曲面的曲率或它的第一二次式的系数在所研究的範圍內发生很大变化的情况下尤須謹慎从事。

本书的叙述方式是这样的:每一篇都可成为一个独立完备的整体。因此,作者并未力求保持文体的統一,有时也有一些重复。

目 录

序 言	i
-----------	---

第一篇 壳体理论的基本关系

第一章 曲面理论概要	2
§ 1. 曲面上的曲线坐标及第一二次式	2
§ 2. 曲面的基本三面形和辅助三面形 沿基本三面形和辅助三面形的轴的任意矢量的展开	4
§ 3. 高斯-温加尔登所推导的公式 哥达兹-高斯方程	7
§ 4. 将任意矢量的导数对基本三面形和辅助三面形的轴展开	10
§ 5. 曲面的第二二次式及黎平指标	11
§ 6. 共轭线、曲率线和渐近线	13
§ 7. 高斯曲率及曲面的弯曲	15
§ 8. 曲面理论中正交坐标的基本公式	15
第二章 壳体理论的静力关系和几何关系	19
§ 9. 内力和力矩	19
§ 10. 斜截面上的内力和力矩	21
§ 11. 外荷载	23
§ 12. 壳体的平衡方程	24
§ 13. 应力函数	27
§ 14. 中间曲面的弹性位移和弹性旋转的矢量	31
§ 15. 壳体中间曲面的切向变形分量	34
§ 16. 弹性位移矢量的导数的表达式	36
§ 17. 中间曲面的弯曲变形分量	38
§ 18. 弹性旋转矢量的导数的表达式	43
§ 19. 通过位移来表示变形分量和旋转角的表达式	44
§ 20. 按已知变形分量计算位移 变形连续方程	47
§ 21. 变形分量的变换	51
第三章 弹性关系 壳体理论的一般定理	56
§ 22. 壳体理论的基本假设	56
§ 23. 弹性关系式	58
§ 24. 壳体理论的附加方程	65
§ 25. 薄壳的力和力矩的功	65

目 录

§ 26. 变形的能	67
§ 27. 彈性关系的几个方案的分析	72
第四章 壳体理論的基本方程	74
§ 28. 壳体理論基本关系式的綜述	74
§ 29. 壳体理論的完整方程系	77
§ 30. 靜力-几何的比拟法	79
§ 31. 內力和力矩的連續方程	82
§ 32. 位移的平衡方程	87
§ 33. 边界条件	89

第二篇 无力矩理論

第五章 任意壳体的无力矩理論	96
§ 1. 无力矩理論的一般原理	96
§ 2. 无力矩理論的靜力、几何和混合問題	98
§ 3. 无力矩理論的边界条件	101
§ 4. 无力矩壳体的三种形式	102
§ 5. 无力矩理論与曲面无限小弯曲的关系	103
§ 6. 无力矩理論的共軛几何問題和靜力問題	106
§ 7. 具有一个几何条件的正曲率无力矩壳体	110
第六章 零曲率壳体的无力矩理論	113
§ 8. 圓柱面和圓錐面上的曲綫坐标	113
§ 9. 圓柱形和圓錐形壳体无力矩理論方程的一般积分	116
§ 10. 边界条件	120
§ 11. 无力矩圓柱形壳体应力状态的分析	121
§ 12. 无力矩圓柱形壳体的計算实例	124
§ 13. 无力矩圓柱形壳体的計算实例(續)	128
第七章 球形壳体的无力矩理論	137
§ 14. 球形壳体无力矩方程的变换	137
§ 15. 球形壳体无力矩理論方程的积分方法	139
§ 16. 复变函数理論的方法在无力矩球形壳体計算上的应用	143
§ 17. 平衡的积分方程	146
§ 18. 复变应力函数的极点的靜力意义	148
第八章 无力矩閉合球形壳体的計算	154
§ 19. 在集中力和力矩作用下的无力矩閉合球形壳体的計算	154
§ 20. 举例	156
§ 21. 承受集中力和力矩的閉合球形壳体的位移	158
§ 22. 分布荷載作用下的无力矩閉合球形壳体的計算	162
§ 23. 計算公式的推广	167
第九章 在考虑边界条件下的无力矩壳体的計算	174
§ 24. 要求考虑边界条件的最簡單的問題	174

§ 25. 举例	179
§ 26. 正曲率无力矩壳体的静力和几何问题的解的数目	185
§ 27. 静定的和几何可变的无力矩壳体的举例	189

第三篇 圆柱形壳体

第十章 展开为三角级数的方法	194
§ 1. 圆柱形壳体理论的基本方程	194
§ 2. 圆柱形壳体的可解方程	197
§ 3. 三角级数在圆柱形壳体上的应用	200
第十一章 闭合圆柱形壳体的计算	207
§ 4. 基本计算公式	207
§ 5. 特征方程的根的性质 特征方程的简化	212
§ 6. 特征方程零根的物理意义	219
§ 7. 闭合圆柱形壳体应力状态的分析	221
§ 8. 圆柱形壳体基本应力状态的近似算法	227
§ 9. 边界效应的近似算法	233
§ 10. 相应于大数值 m 的应力状态	236
§ 11. 边界条件的迭加	240
第十二章 开口圆柱形壳体的计算	248
§ 12. 基本计算公式	248
§ 13. 特征方程的根的性质	252
§ 14. 开口圆柱形壳体应力状态的分析	256
§ 15. 开口圆柱形壳体的近似算法	259
§ 16. 边界条件的迭加	264

第四篇 任意壳体的应力状态的分析

第十三章 偏微分方程的渐近积分	268
§ 1. 线性偏微分算子的分类	268
§ 2. 术语和符号	272
§ 3. 齐次微分方程的积分的渐近展开	275
§ 4. 三种基本情况	277
§ 5. 变化函数的建立	281
§ 6. 具有一定非特征支座周边的积分	283
§ 7. 重数特征曲线的情况	286
§ 8. 具有一定特征支座周边的积分	292
§ 9. 非齐次偏微分方程特殊积分的渐近展开	297
§ 10. 举例	303
第十四章 壳体理论方程的渐近积分	311
§ 11. 方程系的渐近积分	311

目 录

§ 12. 集度指数的一致值	316
§ 13. 变化函数的建立	319
§ 14. 基本积分的集度函数渐近展开式系数的计算	322
§ 15. 壳体理论近似方程的建立	324
§ 16. 无力矩理论方程的渐近误差	326
§ 17. 任意壳体的分部应力状态	329
§ 18. 任意壳体的全应力状态	331
第十五章 分部应力状态	335
§ 19. 基本应力状态 无力矩应力状态和纯力矩应力状态	335
§ 20. 具有大变化指数的应力状态的近似方程	339
§ 21. 方程(20-11)的应用范围	343
§ 22. 简单边界效应	349
§ 23. 简单边界效应的可解方程的积分	354
§ 24. 未蜕化广义边界效应的可解方程	359
§ 25. 零曲率壳体广义边界效应的可解方程	363
§ 26. 可解方程(25-5)的应用范围	367
§ 27. 可解方程(25-5)的进一步简化	370
§ 28. 无力矩理论在计算零曲率壳体时的应用范围	376
§ 29. 建立壳体全应力状态的精确度的估计	382

第五篇 壳体的近似算法

第十六章 正交函数的展开在壳体计算上的应用	386
§ 1. 函数的福里埃级数展开	386
§ 2. 封闭的正交函数系的建立方法	387
§ 3. 封闭的正交函数系的建立方法(续)	390
§ 4. 应力状态和外荷载的变化指数	394
第十七章 一般近似法	400
§ 5. 无力矩理论	400
§ 6. 无力矩理论的应用范围	402
§ 7. 简单边界效应的性质	409
§ 8. 简单边界效应的近似理论	411
§ 9. 在考虑边界效应的条件下按无力矩理论计算壳体	418
§ 10. 特殊情况	419
§ 11. 举例	425
§ 12. 变化指数大的壳体的近似算法	430
§ 13. 举例	436
§ 14. 边缘为非刚性固定的壳体	442
第十八章 圆柱形壳体和圆锥形壳体	446
§ 15. 零曲率壳体的广义边界效应	446
§ 16. 零曲率壳体广义边界效应的可解方程	448

§ 17. 圆柱形壳体广义边界效应可解方程的积分	451
§ 18. 边界条件的迭加	454
§ 19. 圆锥形壳体广义边界效应可解方程的积分	458
§ 20. 零曲率壳体应力状态的分析	463
§ 21. 未蜕化的边界效应的近似理论	467
§ 22. 圆柱形和圆锥形壳体未蜕化边界效应可解方程的积分	470
§ 23. 方程系(22-9)的积分	476
§ 24. 方程系(22-9)的积分(续)	481
§ 25. 中等折算长度的圆柱形壳体的弹性反力和弹性位移表	486
§ 26. 举例	494
§ 27. 在沿母线分布的荷载作用下中等折算长度的圆柱形壳体的计算	495
§ 28. 举例	501
§ 29. 圆锥形壳体的计算	508

第 一 篇

壳体理論的基本关系

第一章

曲面理論概要

§ 1. 曲面上的曲綫坐标及第一二次式

在第一章中我們將簡短地、几乎不加証明地叙述一些曲面理論的概念,而这些概念在后面将予以应用。这里所涉及的問題在任何一本曲面理論的教程中都有阐述,但这里的叙述与 C. П. 菲尼柯夫的“曲面理論”教程更为相近。

三度量空間的曲綫可以用矢量方程

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (1-1)$$

来給出,式中 $\mathbf{r}$ ——曲綫的矢徑; t ——任意参数。

同样,三度量空間的曲面也可以用矢量方程

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\alpha, \beta) \quad (1-2)$$

来給出,式中 $\mathbf{M}$ ——曲面的矢徑; α, β ——任意参数。

用等式(1-2)不仅可以确定曲面的几何性质,而且还可以得到在这一曲面上定点的方法,因为参数 (α, β) 的每一对数值都对应于曲面上一定的点(或許多点)。假設参数 α 保持不变值 $\alpha = \alpha_0$, 而 β 发生变化。这时,用方程(1-2)就可决定位于所考虑的曲面內的空間曲綫。这样的綫称为 β 綫,因为它们的特点是:在它們上面只有参数 β 才会变化。一定区間中的所有 α_0 数值的总和将与 β 綫族相对应。

現在还可以引用关于 α 綫族的概念。

在同时給出了两个参数的数值之后,我們就可以在曲面上确定两根曲綫相交处的一点(或几点),这两根曲綫中的一根属于 β 綫族,另一根則属于 α 綫族。这样,在用方程(1-2)确定的曲面和与一定的坐标系有关的平面之間就存在着完全类似之处,所以 β 綫和 α 綫通常称为曲面的曲綫坐标。

如果在方程(1-2)中以形式为

$$\alpha' = \alpha'(\alpha, \beta) \quad \beta' = \beta'(\alpha, \beta) \quad (1-3)$$

的公式代替独立参数,則可得到方程:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}'(\alpha', \beta')$$

用这个方程当然也可以确定方程(1-2)所确定的曲面,但与这个曲面相关联的曲线坐标是在变化着的。然而,在特殊情况下,即当公式(1-3)的形式为

$$\alpha' = \alpha'(\alpha) \quad \beta' = \beta'(\beta)$$

时,坐标线的几何外形仍然同前一样,因为在这种情况下不变值 α 和 β 相当于不变值 α' 和 β' 。

以后如果没有提出异议,我们总是假定参数 (α, β) 具有一定的变化区域 S , 同时在 S 点和我們所感兴趣的一部分曲面的点之間存在着相关的单值对应的情況。

現在我們引进符号:

$$M_\alpha = \frac{\partial M}{\partial \alpha} \quad M_\beta = \frac{\partial M}{\partial \beta}$$

并来研究矢量 M_α 和 M_β 。众所周知, M_α 和 M_β 在 α 线和 β 线的切线方向是重合的。我們用 A 和 B 来表示这两个矢量的长度;于是,

$$M_\alpha^2 = A^2 \quad M_\beta^2 = B^2 \quad (1-4)$$

(在这里和以后各处,矢量的平方都是指矢量本身的标量积而言)。

这样, $\frac{1}{A} M_\alpha$ 和 $\frac{1}{B} M_\beta$ 是切于坐标线的单位矢量。因而,

$$\frac{M_\alpha}{A} \cdot \frac{M_\beta}{B} = \cos \chi \quad (1-5)$$

式中 χ ——坐标线之间的夹角。

也象在曲面理論中經常所发生的那样,假定在我們所感兴趣的区域中,处处都是:

$$\sin \chi \neq 0 \quad (1-6)$$

即 α 线和 β 线在任何地方也互不相关。

我們在曲面上指出两个任意近的点 (α, β) 和 $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$, 它們决定着对坐标线来说是任意指向的某一方向。这时,矢量 M 在由第一点过渡到第二点时所得到的增量,其主要部分将为:

$$dM = M_\alpha d\alpha + M_\beta d\beta$$

由此,利用关系式(1-4)和(1-5),便可得到曲面上任意曲线弧长微分平方的公式:

$$dM^2 = ds^2 = A^2 d\alpha^2 + 2AB \cos \chi d\alpha d\beta + B^2 d\beta^2 \quad (1-7)$$

这个等式的右边部分称为曲面的第一二次式。它完全借助于給出的三个数值 A , B , χ 来决定,这三个数值我們称为第一二次式的系数^①。經証明,用第一二次式完全可以决定曲面的几何形式。这就是說,知道了 A , B 和 χ 并借助于 $\beta = \beta(\alpha)$ 形式的方程在曲面上确定了曲线之后,我們就可以計算这些线的长度以及它們相

^① 严格地說,数值 A^2 , B^2 和 $AB \cos \chi$ 才能称为第一二次式的系数,但在壳体理論中数值 A , B 和 χ 运用起来比較方便。

交的夾角，甚至在我們還不知道曲面方程的情況下也可以進行計算。此外，用第一二次式不能決定曲面本身。我們可以建立與參數 a 有關的曲面族：

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\alpha, \beta; a) \quad (1-8)$$

而數值

$$\mathbf{M}_\alpha^2 = A^2 \quad \mathbf{M}_\beta^2 = B^2 \quad \mathbf{M}_\alpha \cdot \mathbf{M}_\beta = AB \cos \chi$$

在 a 為任何數值時都將保留自己的數值。

參數 a 的連續變化對應於曲面 (1-8) 的某種連續變形，在發生這種變形時，曲面上所形成的曲線的弧長以及曲線之間的夾角都將保持不變。這種變形稱為曲面的彎曲。這一概念在薄殼理論中起着重要的作用。

§ 2. 曲面的基本三面形和輔助三面形 沿基本三面形和輔助三面形的軸的任意矢量的展開

現在我們引進曲面法綫的單位矢量并用 $\mathbf{n}$ 來表示它。它與矢量 $\mathbf{M}_\alpha$ 和 $\mathbf{M}_\beta$ 正交并由下面的關係式來聯繫：

$$\mathbf{n} = \frac{1}{AB \sin \chi} [\mathbf{M}_\alpha \times \mathbf{M}_\beta]$$

(在這裡和在以後各處，符號 $\times$ 表示矢量積)。

三個單位矢量 $\frac{1}{A} \mathbf{M}_\alpha$, $\frac{1}{B} \mathbf{M}_\beta$, $\mathbf{n}$ 稱為曲面 (1-2) 的基本矢量。它們共同組成某一個可動的三面形，我們稱這個三面形為基本三面形。

根據條件 (1-6)，基本矢量在任何地方也不共面（即在任何地方也不位於一個平面之內）。由此得出，任何矢量 $\mathbf{S}(\alpha, \beta)$ 都可表示為三個基本矢量的綫性組合：

$$\mathbf{S} = s_\alpha \frac{\mathbf{M}_\alpha}{A} + s_\beta \frac{\mathbf{M}_\beta}{B} + s_n \mathbf{n} \quad (2-1)$$

形式為 (2-1) 的矢量沿著基本三面形的軸展開，而標量 s_α , s_β , s_n 稱為矢量 $\mathbf{S}$ 的基本分量^①。以後我們將常常利用這樣的符號：

$$s_\alpha = |\mathbf{S}|_\alpha \quad s_\beta = |\mathbf{S}|_\beta \quad s_n = |\mathbf{S}|_n$$

矢量的基本分量，只有當曲面是屬於正交坐標系 $\left(\chi = \frac{\pi}{2}\right)$ 的時候，才與它在基本三面形的軸上的投影相等。

現在引進兩個輔助矢量 $\mathbf{N}_{(\alpha)}$ 和 $\mathbf{N}_{(\beta)}$ ，並且用下面的要求來確定它們：(1) $\mathbf{N}_{(\alpha)}$ 和 $\mathbf{N}_{(\beta)}$ 位於切面內；(2) $\mathbf{N}_{(\alpha)}$ 和矢量 $\mathbf{M}_{(\beta)}$ 正交，而 $\mathbf{N}_{(\beta)}$ 與矢量 $\mathbf{M}_\alpha$ 正交；(3) 矢量 $\mathbf{N}_\alpha$ 和 $\mathbf{N}_\beta$ 的長度分別等於 A 和 B ；(4) $\mathbf{N}_{(\alpha)}$ 和 $\mathbf{N}_{(\beta)}$ 與矢量 $\mathbf{M}_\alpha$ 和 $\mathbf{M}_\beta$ 組成銳角（圖 1）。

① “矢量的分量”應參考 Н. Е. Кочина 著的 “Векторное исчисление и начала тензорного исчисления” 一書中的這一術語來加以理解。

这就是說,应当有以下的关系式:

$$\left. \begin{aligned} N_{(\alpha)} \cdot n &= 0 & N_{(\beta)} \cdot n &= 0 \\ N_{(\alpha)} \cdot M_{\beta} &= 0 & N_{(\beta)} \cdot M_{\alpha} &= 0 \\ N_{(\alpha)}^2 &= A^2 & N_{(\beta)}^2 &= B^2 \\ \frac{M_{\alpha}}{A} \cdot \frac{N_{(\alpha)}}{A} &= \sin \chi & \frac{M_{\beta}}{B} \cdot \frac{N_{(\beta)}}{B} &= \sin \chi \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

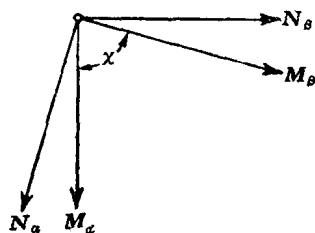


图 1

因此, 不难証明, $N_{(\alpha)}$ 和 $N_{(\beta)}$ 可以用下面的公式来表示:

$$\left. \begin{aligned} \frac{N_{(\alpha)}}{A} &= \frac{1}{\sin \chi} \frac{M_{\alpha}}{A} - \frac{\cos \chi}{\sin \chi} \frac{M_{\beta}}{B} \\ \frac{N_{(\beta)}}{B} &= \frac{1}{\sin \chi} \frac{M_{\beta}}{B} - \frac{\cos \chi}{\sin \chi} \frac{M_{\alpha}}{A} \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

在特殊情况下, 当曲线坐标系是正交, 即 $\chi = \frac{\pi}{2}$ 时, 矢量 $N_{(\alpha)}$ 和 $N_{(\beta)}$ 与 M_{α} 和 M_{β} 重合.

将等式 (2-1) 的两边依次与 $\frac{N_{(\alpha)}}{A}$, $\frac{N_{(\beta)}}{B}$ 和 n 进行标量相乘, 并借助于 (2-2) 加以简化, 便可得到:

$$\left. \begin{aligned} s_{\alpha} &= |S|_{\alpha} = \frac{1}{\sin \chi} S \cdot \frac{N_{(\alpha)}}{A} \\ s_{\beta} &= |S|_{\beta} = \frac{1}{\sin \chi} S \cdot \frac{N_{(\beta)}}{B} \\ s_n &= |S|_n = S \cdot n \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

由此可知, 如果对某一矢量 T 来说, 我們知道数值 τ_{α} , τ_{β} , τ_n :

$$\tau_{\alpha} = T \cdot \frac{N_{(\alpha)}}{A} \quad \tau_{\beta} = T \cdot \frac{N_{(\beta)}}{B} \quad \tau_n = T \cdot n$$

則 T 可以借助于公式:

$$T = \frac{\tau_{\alpha}}{\sin \chi} \frac{M_{\alpha}}{A} + \frac{\tau_{\beta}}{\sin \chi} \frac{M_{\beta}}{B} + \tau_n n \quad (2-5)$$

沿着基本三面形的軸来展开.

三个单位矢量 $\frac{N_{(\alpha)}}{A}$, $\frac{N_{(\beta)}}{B}$ 和 n 称为曲面的輔助矢量, 它們共同組成可动的輔助三面形. 輔助矢量也和基本矢量一样, 在任何地方也不共面. 因此, 任意矢量 S 不仅可以表示为 (2-1) 的形式, 而且还可以表示为:

$$S = s'_{\alpha} \frac{N_{(\alpha)}}{A} + s'_{\beta} \frac{N_{(\beta)}}{B} + s'_n n \quad (2-6)$$

如果 S 是借助于公式 (2-6) 来得出的, 那么我們說, 这个矢量是沿輔助三面形的軸展开的, 而数值 s'_{α} , s'_{β} 和 s'_n 称为矢量 S 的輔助分量, 同时利用这样的符号:

$$s'_{\alpha} = |S|'_{\alpha} \quad s'_{\beta} = |S|'_{\beta} \quad s'_n = |S|'_n$$