SHUXUEJIANMO DE LILUN YU SHIJIAN

数学建模
的理论与实践

吴翊 吴孟达 成礼智 编著

$\min f(X)$ s.t. $g_i(X)\geqslant 0$

$\min f(X)$ s.t. $g_i(X)\geqslant 0$

国防科技大学出版社

数学建模的理论与实践

吴　翊　吴孟达　成礼智　编著

国防科技大学出版社
湖南·长沙

D4593/29

图书在版编目(CIP)数据

数学建模的理论与实践/吴翊,吴孟达,成礼智编著. —长沙:国防科技大学出版社,1999.8

ISBN 7-81024-571-6

Ⅰ. 数… Ⅱ. 吴… Ⅲ. 数学模型 Ⅳ. O22

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第32597号

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4555681 邮政编码:410073

E-mail:gfkdcbs@public.cs.hn.cn

责任编辑:文 慧 责任校对:黄 煌

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

850×168 1/32 印张:12 字数:301千

1999年8月第1版第1次印刷 印数:1-5000册

*

定价:17.00元

前　言

有关数学模型的书已出了不少，但对于数学模型（或数学建模）作为一门课程的基本框架——它应达到什么样的目的，应包含哪些主要内容，应如何组织材料和实施教学等等——的探求，至今仍在进行。我们几位作者均为长期从事数学模型课程教学和大学生数学建模指导工作的教师，在多年的教学工作中，积累了一些心得体会，自觉或可对于数学建模感兴趣者有所裨益，于是不揣浅陋，将其付梓，也算是对上述探求的一点尝试。

数学模型是一门实践性很强的课程，很难想象仅通过灌输便可取得好的教学效果，基于这一理解，加之考虑到目前一般学校可能提供的学时（如 40 学时），我们的书篇幅不大，但对材料进行了精心挑选，希望通过少而精的讲授，启发学生举一反三，尽可能好地掌握数学建模的基本原理、方法过程，为今后进一步自学，提高增强数学建模能力打下基础。数学模型是连接数学与实际问题的桥梁，对数学模型而言，数学是工具，解决问题是目的，因此，我们对每一具体内容的展开，都力求遵循数学建模的实际过程和思维规律，即从要解决的问题出发，引出数学方法，最后再回到问题的解决中去，并不在数学方法本身的研究上多做文章。但数学模型课程也不是简单的实例罗列，而需要学生通过课程的学习，掌握一些数学模型的共性的东西，以体现这门课程应有的系统性，为此，我们采用了将各种实例按所用数学工具进行分类的方法分为连续模型、随机模型、离散与系统模型几类，各自辟出专章进行论述。第一章的数学建模概论中，我们比一般的教材多费了些笔墨，主要是为了使学生一开始就能抓住数学建模的要义，以更好地掌握后面形

形色色的建模问题。最后一章是建模常用计算方法，这种安排在其它同类教材尚不多见。盖因在我们近年指导数学建模竞赛活动中深感学生对计算方法的熟悉与否将直接影响实际动手能力，从而对于能否最终完成建模关系重大，因此有必要专辟一章。全书实例丰富，其中不乏我们自己的研究体会；并按循序渐近，由浅入深的原则，进行合理安排，每部分内容先用简单例子引出问题，在深入讨论的基础上，再以综合性强的例子作为结束。每章后都附有一定数量的习题，其中部分习题还需要上机计算，以使学生有充分进行建模实践的机会。文字力求流畅，可读性强，以利于自学。

我们衷心希望本书能对于推动数学模型教学和研究做出一点微薄的贡献，但因作者水平有限，加之时间仓促，书中错误之处在所难免，希望专家读者不吝赐教。

全书共分五章，由吴翊主持编写。各章的撰写人分别是吴翊（第一章），吴孟达（第二、四章），成礼智（第三、五章）。书中某些材料取自于我们学生的建模作品，其中杜小勇同学还协助做了计算和插图；本书出版过程中，得到学校、系及出版社多位同志的大力帮助，在此谨表示深深谢意。

作者

1999 年 6 月

内 容 简 介

本书系统介绍了数学建模的理论和方法。全书通过对各类典型建模实例的研究，展示了数学建模全过程的理论与实践问题。主要内容包括数学建模的一般原理，对连续模型、离散模型、随机模型的建模分析，数学建模中常用的计算方法等。书中收入了大量的应用实例，并按照由浅入深，由简到繁的原则进行了合理安排。每章末配有一定数量的习题，其中一部分是需要通过上机计算的综合性问题。全书叙述清晰，文字流畅，可读性强，既可作为大学数学模型课程、大学生数学建模竞赛辅导的教材或教学参考书，又可供对数学建模有兴趣的读者阅读自学。

目　录

第三章　离散与系统模型

第四章 随机模型

第五章 数学建模中的常用数值计算方法

第一章　数学建模概论

1.1　什么是数学模型

数学模型(Mathematical Model)这个名词已为越来越多的人所熟悉,那么什么是数学模型呢?关于这一概念各种说法大同小异,我们也不必刻意去追寻严格的意义,重要的是弄清数学模型和建立数学模型即数学建模(Mathematical Modeling)的真谛。例如文献[2]中对于数学模型是这样叙述的:一般地说,数学模型可以描述为对于一个特定的对象为了一个特定目标,根据特有的内在规律,做出一些必要的简化假设,运用适当的数学工具,得到的一个数学结构。

对此,我们作大致的解释。"特定对象"表明了数学模型的应用性,即它是为解决某个实际问题而提出的。"特定目的"表明了它的功能性,即当研究一个特定对象时,不是笼统地研究,而是为实现特别的功能而研究;不是研究它的一切特点,而是只研究当时所关心的那些特征,研究可以局限于所要达到的特定目的,如分析、决策、控制、预测等。"根据事物的内在规律作出必要的假设"表明了数学模型的抽象性。所谓抽象,就是从事物的现象中将那些最本质的东西提炼出来,为了提炼本质的东西,当然要作一些必要的假设,并对非本质的东西进行简化。这里本质与非本质也不是绝对的,是相对于一定的对象和目的而言,而简化必须是合理的合乎事物内在规律的。例如火箭在作短程飞行时,要研究其运动轨迹,可不考虑地球自转的影响,但若火箭作洲际飞行,就要考虑地球自转的影响了。又比如同是一次火箭飞行实验,在研究其射程时可不考

虑某些段空气阻力的影响,但在研究其命中精度时就必须考虑这些因素。抽象性的另一个含义是它的普适性,即不管事物表现形式如何不同,如果其本质的内在规律一样,都可以用相同的数学模型来描述,例如一个量 $N(t)$ 对时间 Δt 的增量与自身成正比,具有这种性质的现象是一个很普遍的现象,都可表示为数学模型

$$\Delta N(t) \triangleq N(t+\Delta t) - N(t) = rN(t) \qquad (1.1)$$

它既可以描述某种生长过程,如某生物种群的数量,某人在银行的存款数等;也可以描述某种传播过程,如疾病的传染、信息的传播等。这些都体现了数学模型的抽象性。最后"运用适当的数学工具"得到"数学结构"表明了数学模型的数量性。应该说前面列举的应用性、功能性、抽象性是一般模型所普遍具有的,但数量性是数学模型所特有的。"数学工具"不言而喻是我们已有的数学各分支的理论、方法,"数学结构"可以是数学公式、算法、表格、图示等,它体现了数学模型不同于其它各种思维模型,是一种用数学语言表达的定量化的模型。用数学语言的描述往往比其它模型更概括、更精炼、更为准确,也更能抓住事物的本质。重要的是建立了数学模型以后,对对象的研究可以完全转化在数学演绎的范畴进行,这对于一般情况来说显然要便捷得多。

数学模型对于我们来说并不陌生。广义地说,数学本身就是刻画现实世界的模型。数学的研究既不像物理学、化学、生物学那样以自然界的具体运动形态为对象,也不像经济学、社会学、政治学那样以社会的具体运动形态为对象。数学研究的是形式化、数量化的思想材料。而按照唯物主义认识论的观点、思想只能来源于现实世界,但不是原原本本复制现实世界,需要经过一定的加工、抽象。这种思想材料的获取过程,实际上就是对现实世界研究对象[我们也称之为原型(proto-type)]的建模。如原始人从"数"(shǔ)猎物中创造了"数"(shù),这就是建模;古埃及人在丈量土地时发明了三角,这也是建模;而我们今天熟悉的微积分基本上可以视为是

17 世纪时对力学问题、天文学问题的数学建模，无怪乎今天微积分中那些名字被用于命名基本定理、公式的数学家，如牛顿、欧拉、拉普拉斯、拉格朗日等等，几乎同时又是力学家、天文学家。因此可以说，建模本身就是数学发展的原动力。这里也给了我们一个暗示，就是我们虽然说数学建模是运用已知的数学工具，但如果现实世界的某种对象用现成的数学知识都难以得到理想的模型，为了建模就有可能迫使人们寻找新的语言。于是，新的数学分支便诞生了，模糊数学、非线性科学的创立就是这样的例子。

这当然是对数学建模一种广义的理解，我们无意要以数学模型或数学建模来概括今天全部的数学，事实上，为了更好地研究应用数学建模，反而需要强调数学建模研究在思想方法上与传统数学研究的不同。现代数学就其研究对象而言，相当多数已经很难看出原型的痕迹，因而也不称其为“模型”。从学科发展来讲，数学既然是研究思想材料的学科，那么一旦思想的框架以公理化的形式建造起来，就可以按照自身的体系和逻辑演绎出一个繁复庞大的理性世界，数学工作者们不断地去了解、熟悉它，并通过自己的工作去参与构筑这个理性世界大厦，这样数学学科便不断丰富发展。这些工作当然是必要的和有意义的，但另一方面，多数人更感兴趣的问题是这个理性世界能否与某部分现实世界对应，以更好地运用它来描述解决现实世界的问题？这就需要我们重新回到实际问题中去，采用有别于现在经典的严格意义下的数学思维方式，针对特定问题的特定目的进行必要的简化、假设，选取适当的数学工具进行研究，这就是我们今天意义下的数学建模。其中关键的思想方法就是通过对现实问题的观察、归纳、假设，将其转化为一个数学问题。但这只是完成了数学建模的第一步，作为完整的数学建模过程还需求解数学问题，得到所求的解。在实际问题中，看是否能解释实际问题，是否与实际经验或数据相吻合，若吻合数学建模过程就完成了，否则还需修正假设并重新提出经修正的数学模型，直至

满意为止。总之数学建模可以表示为图 1-1 的一个过程：

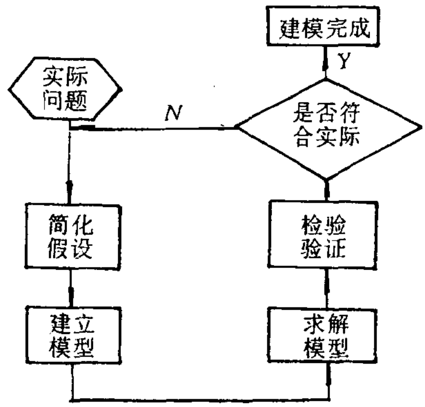

图 1-1

从框图可以看出，虽然数学建模问题与数学本身有着密切的联系，但这不是一个单纯的数学问题。

数学建模近来受到越来越多的重视是有其时代背景的。计算机技术的迅速发展，信息时代的到来，特别是最近媒体中常常提到的以知识创新为核心的知识经济时代的出现，对于数学的应用提出了越来越大的需求。使其不仅在它得心应手的传统的物理领域有用武之地，而且还更多地渗入了过去数学涉足不多的非物理领域，尤其是社会科学领域。这种需求激发了人们对于作为数学和应用的桥梁——数学建模的广泛兴趣和更深入的研究。另一方面，计算机技术的日益进步，计算能力的日益提高，也为数学模型求解创造了条件，这不但保证了数学模型的实际应用，也为我们建立数学模型开阔了思路。

形形色色的数学模型，从其功能来说大致有分析（描述）、决策、预测、控制等，决策、预测、控制往往是我们的直接目的，比如投

资决策、天气预报、人口控制等，这方面的例子不胜枚举。而对事物的描述分析则是进行上述应用的基础，同时对于科学地认识事物的本质本身也有其理论价值。特别要强调的是，当今数学仿真对于重现、验证、预测那些不可重复或不可观测的复杂自然系统和社会系统的演变过程是非常有力的手段，而数学建模则是仿真的重要基础，这方面的应用也是俯拾皆是，像宇宙起源、黑洞形成、生命演化、未来环境的变迁、某种条件下战争的战场态势等等一类人们普遍关切和感兴趣的问题，虽不可能通过重复实验来认识，却可能通过数学建模及借助计算机仿真来得到不同程度、不同侧面的认识、了解。

为了对数学模型的研究更系统、更有条理，人们通常将纷纭的数学模型从各个角度分类。常用的分类方法有按应用领域分和按所用的数学工具分。按应用领域分如人口模型、价格模型、战争模型、交通模型、种群模型、传染病模型等等；按所用数学工具分如微分方程建模、图论方法建模、变分法建模等等，或更笼统地分成连续型模型、离散型模型、随机型模型等几大类，从理论研究的角度看，这些分类是有必要的。但针对实际问题时，一个模型应划成哪一类不是绝对的。有些模型在完全不同的应用领域中都能适用，有些模型则实际上不能将它截然划入哪一种数学方法。随着对数学建模的广泛深入研究，将会发现对同一实际问题用到多种数学方法的情况越来越多，其结果有时是殊途同归，有时是大相径庭，对不同的结果在各自的假设条件下又都有其合理的解释。因此从这个意义来说数学建模既是科学，也是艺术，这也正是数学建模的魅力所在。

1.2 怎样建立数学模型

数学建模的方法大致可分为两大类，一类是所谓机理分析法，一类是所谓测试分析法。机理分析通常是能通过对现实对象特征

各因素之间因果关系的分析，找到内部机理的规律所建立的模型。这种模型中的自变量(或解释变量)一般都有明确的物理意义，它能告诉我们所研究的对象与现实世界哪些因素有关，有什么关系。这类模型形式简明、优美，用途广泛，当然也是建模过程中所力求的。但对于大多数实际问题，要认识其内部机理是很困难的，甚至没法确定研究对象与哪些因素有关，只能通过对系统输出的测试来认识系统的输入-输出规律，建立尽可能与这一规律相吻合的模型，这就是测试分析法。这类模型常用在预测等问题上。虽然从纯粹数学的审美角度觉得这类模型不及机理建模那样赏心悦目，但却非常实用，适应面很广。另外，即使在机理分析法中，一些参数的确定也往往要用测试分析法。

谈到怎样建立数学模型，实际上图 1-1 已大致描述了数学建模的过程，下面将通过一些建模的例子来解释这一过程及其中的某些要点。要指出的是，一般来说，完成一个建模当然都需要经过建模全过程的每个环节，但为了说明问题，我们在下面具体的例子中对每个环节的强调并不完全一样。另外，对于物理领域的机理分析建模大家接触较多，也容易理解，下面的例子都是非物理领域的建模问题。

1. 用数学语言表述实际问题

如前所述，数学模型实际上是建立在数学与应用问题之间的桥梁，要建立数学模型首先是要设法用数学的语言表述实际问题。

例 1.1　某委员会要从一批研究成果中通过无计名投票选出若干(小于总数)优秀成果，但在有些成果的完成者中包括委员会评委，应如何处理此问题才算公平？

要解决这一问题，关键是如何用数学的语言来表达公平性。显然这里与数量有关的就是得票多少的问题。一般来说，公平的做法是按得票多少排序，然后从多到少依次取为优秀成果，直至达到额定数目。但这对非评委的成果完成者有失公平，因为我们总可以假

定评委对自己的成果肯定是投赞成票的。那么评委对自己的成果问题回避结果如何呢?如果只进行水平评价,即只要决定达到或未达到某个标准是可以这样做的,但这是竞争式的评比,要按得票多少来决定是否被淘汰,因此若评委不参加对自己的成果投票对评委又不公平。看来用得票数很难保证公平,那么用得票率如何?如一共有 n 个评委,有某项成果涉及 i 个评委,他们回避以后该项成果得了 p 票,$p \leqslant n-i$,于是该项成果的得票率为

$$r_1(p)=\frac{p}{n-i} \tag{1.2}$$

用得票率看起来似乎可以接受,因为虽然得票少,但作为分母的总人数也少了,应该是公平的。但仔细一算,这 i 个评委仍不满意,他们认为,如果他们也参加对自己的成果的投票,原本得票率应该更高:

$$r_2(p)=\frac{p+i}{n} \tag{1.3}$$

式(1.2)与(1.3)的差别由图 1-2 所示。

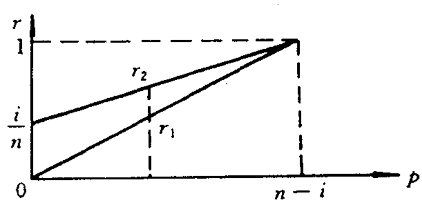

图 1-2

图中除了 $p=n-i$ 以外,对每个 p,$r_1(p)$ 均小于 $r_2(p)$。另一方面,显然非评委也不能接受用(1.3)式来计算上述那项成果的得票率,由此看来只能定出相对公平的原则,它应该是对 $r_1(p)$ 和 $r_2(p)$ 的折衷方案,具体地说得票多少的度量函数 $q(p)$ 应满足:

① $q(p)$ 是 p 的单调增函数;