

# 有限元法及其在 锻压工程中的应用

高等学校教材

吕丽萍 主编

西北工业大学出版社

114

高等学校教材

# 有限元法 及其在锻压工程中的应用

吕丽萍 主编

西北工业大学出版社

## 内 容 简 介

本书包括弹性和塑性有限元两部分。弹性有限元部分主要讲述有限元法的解题方法和步骤，并对平面和轴对称问题的三角单元、矩形单元、四节点和八节点等参单元，以及空间问题的二十节点等参单元作了详细的阐述；塑性有限元部分主要阐述刚-塑性有限元法，对弹性及塑性有限元程序作了详细叙述。在有关章节中还对应用有限元法所需的数学基础知识，如数值积分和笛卡儿张量及其运算等内容作了介绍。

本书可作高等院校锻压专业本科生的教材和有关研究生以及压力加工、机械工程等领域的工程技术人员的技术参考书。

高 等 学 校 教 材  
**有限元法及其在锻压工程中的应用**

主 编 吕丽萍

责任编辑 于兴旺

责任校对 樊 力

西北工业大学出版社出版  
(西安市友谊西路 127 号)  
陕西省新华书店发行  
西北工业大学出版社印刷厂印装  
ISBN 7-5612-0121-4/TG·9 (课)

开本 787×1092 毫米 1/16 12.125 印张 291 千字

1989 年 2 月第 1 版 1989 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—4500 册 定价：2.47 元

# 前 言

有限元法是近年来随着计算机的发展而发展起来的一种有效的数值计算方法。它已经逐渐成为广大工程技术人员进行工程分析的有力工具。现有的有限元法教科书，论述的大多数是有限元法的基本理论及应用实例。然而任何从事有限元程序设计的人都知道，在有限元基本理论和有限元程序设计之间还存在着相当大的距离。虽然在某些有限元教科书的附录中提供了有限元计算机程序，但却很少讲述具体程序设计的方法。

考虑到上述情况，本书除讨论有限元法的基本理论外，还对弹性有限元程序和塑性有限元程序的设计方法进行了详细的介绍，以便帮助读者解决从理论到程序设计的困难。

本书是根据航空锻压专业《有限元法及其在锻压工程中的应用》教学大纲编写的。主要用作锻压专业“有限元法基础”课程的教材也可供锻压工程技术人员参考。

全书共分七章。第一章讨论有限元解题的方法和步骤。第二、三章讨论平面问题及轴对称问题的有限元法。第四章是弹性问题的有限元程序设计。第五章介绍等参单元。第六章讨论刚-塑性有限元法。第七章介绍刚-塑性有限元程序。在有关章的后面还介绍了用有限元法进行模具应力分析及锻件成形过程分析的实例。

本教材第一、二、三、五、七章由吕丽萍编写，第四章由朱谨编写，第六章由傅铭旺编写。全书由吕丽萍主编。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，敬请批评指正。

编 者

1988年5月

## 符 号 表

下列表中定义了本书所用的主要符号,其他符号则在正文中给以定义。矩阵用方括弧[ ]表示,而列阵用{ }表示。

$X, Y, Z, x, y, z$	整体坐标轴	$\tau_i$	摩擦剪应力
$\xi, \eta, \zeta$	局部坐标轴	$\{\alpha\}$	广义坐标列阵
$r, \theta, z$	柱坐标轴	$[Q]$	基底函数矩阵
$u, v, w$	沿 $x, y, z$ 方向的 位移	$\{f\}$	内位移列阵
$U, V, W$	沿 $x, y, z$ 方向的 节点力	$[N]$	形状函数矩阵
$l$	长度	$\{\delta\}^e$	单元节点位移列阵
$t$	厚度	$\{e\}^e$	单元应变列阵
$A$	横断面积	$\{\sigma\}^e$	单元应力列阵
$\mu$	波松比	$[D]$	弹性矩阵
$E$	弹性模量	$[B]$	几何矩阵
$N_i, N_j, N_m$	$i, j, m$ 点的形状 函数	$[S]$	应力矩阵
$L_i, L_j, L_m$	一点的面积坐标	$[K]^e$	单元刚度矩阵
$\Delta$	三角形面积	$[K]$	整体刚度矩阵
$\rho$	重度	$\{F\}$	节点力列阵
$\omega$	角速度	$[\partial]$	微分算子矩阵
$k$	剪切屈服极限	$[J]$	雅可比矩阵
$s_{ij}$	应力偏量张量	$\{P\}$	集中力等效节点力列阵
$\sigma_m$	平均应力	$\{P\}$	体积力等效节点力列阵
$\varepsilon_{ij}$	应变张量	$\{Q\}$	分布面力等效节点力列 阵
$\dot{\varepsilon}_{ij}$	应变速率张量	$\{p\}$	集中力向量
$\bar{\varepsilon}_{ij}$	等效应变速率	$\{g\}$	体积力集变向量
$\dot{\varepsilon}_v$	体积应变速率	$\{q\}$	分布面力集变向量
$\bar{\sigma}$	等效应力	$\{e\}$	应变速率列阵
		$\{v\}^e$	单元内速度列阵
		$\{u\}^e$	单元节点速度列阵

# 目 录

## 前 言

<b>第一章 有限元法的解题步骤</b> .....	1
1.1 位移函数 形状函数 .....	1
1.2 单元应变和应力 .....	4
1.3 虚功原理 .....	5
1.4 单元刚度矩阵 .....	5
1.5 整体刚度矩阵的集成 .....	7
1.6 处理边界条件 .....	10
1.7 有限元法的解题步骤 .....	11
1.8 计算实例 .....	12
<b>第二章 平面问题的有限元法</b> .....	15
2.1 两类平面问题 .....	15
2.2 应力应变关系 .....	16
2.3 连续体的离散化 .....	17
2.4 位移函数 形状函数 .....	19
2.5 单元应变——几何矩阵 .....	23
2.6 单元应力——应力矩阵 .....	25
2.7 单元刚度矩阵 .....	25
2.8 整体刚度矩阵的集成 .....	26
2.9 边界条件的处理 .....	28
2.10 面积坐标 .....	31
2.11 载荷向节点移置 .....	32
2.12 计算结果的整理 .....	35
2.13 例题 .....	36
2.14 平面问题有限元法在锻压工程中的应用 .....	42
2.15 矩形单元 <sup>[4]</sup> .....	43
<b>第三章 轴对称问题</b> .....	47
3.1 应力应变关系 .....	47
3.2 三角形截面环单元 .....	48
3.3 单元刚度矩阵 .....	50
3.4 载荷向节点移置 .....	51
3.5 计算实例 .....	53
<b>第四章 有限元程序设计</b> .....	57
4.1 有限元程序结构 .....	57

4.2	原始数据输入与生成子程序	60
4.3	等效节点载荷	63
4.4	单元刚度矩阵	67
4.5	集成整体刚度矩阵	70
4.6	处理边界位移	71
4.7	解线性方程组——列主元高斯消去法	71
4.8	应力计算	75
4.9	辅助子程序介绍	79
4.10	计算实例	82
<b>第五章</b>	<b>等参单元</b>	<b>97</b>
5.1	坐标变换	97
5.2	局部坐标向整体坐标的变换	98
5.3	变换矩阵及变换行列式	99
5.4	等参变换的条件	101
5.5	二维八节点等参单元	102
5.6	轴对称等参单元	108
5.7	空间等参单元	110
5.8	数值积分	116
5.9	应力修匀	120
<b>第六章</b>	<b>刚-塑性有限元法</b>	<b>124</b>
6.1	笛卡儿张量及其运算	124
6.2	刚-塑性材料的广义变分原理	128
6.3	拉格朗日乘子法	130
6.4	体积可压缩法	134
6.5	罚函数法	139
6.6	刚-塑性有限元计算中若干技术问题的处理	140
6.7	刚-塑性有限元的应用	151
<b>第七章</b>	<b>刚-塑性有限元程序(体积可压缩法)</b>	<b>157</b>
7.1	轴对称问题的计算公式	157
7.2	程序使用说明	161
7.3	轴对称墩粗的源程序	164
7.4	计算B矩阵的子程序	176
7.5	计算泛函的子程序	178
7.6	解线性方程组的子程序	180
7.7	计算应力和节点力不平衡量子程序	182
7.8	输出原始数据及计算结果	184
<b>参考文献</b>		<b>188</b>

# 第一章 有限元法的解题步骤

杆单元是有限元法中选用的最简单的单元，物理意义明确，而且分析所得结论也能反映有限元法的本质。所以，本章先从杆单元开始进行分析，并得出有限元法共同的、有规律性的结论。

在用有限元法分析问题，首先是选取坐标。一般可根据问题的性质选用直角坐标、柱坐标、面积坐标、整体坐标或局部坐标。例如对于杆单元、平面问题，选用直角坐标比较方便；对于轴对称问题，选用柱坐标则较为方便。

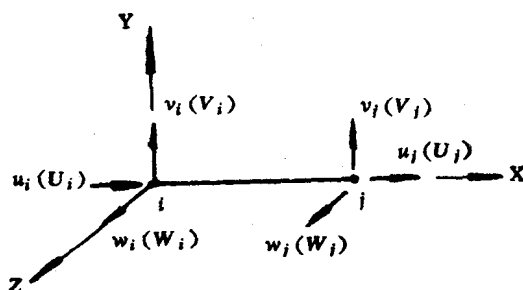


图 1.1 局部坐标

杆单元  $ij$  的局部坐标，如图 1.1 所示。取  $i$  点为坐标原点， $X$  轴沿杆的轴线方向，其正方向为由  $i$  指向  $j$ ，其余各轴按右手螺旋规则确定。设  $u_i, v_i, w_i$  和  $u_j, v_j, w_j$  是  $i, j$  两点沿  $X, Y$  和  $Z$  轴的位移分量。 $U_i, V_i, W_i$  和  $U_j, V_j, W_j$  是  $i, j$  两点沿  $X, Y$  和  $Z$  轴的节点力分量。上述各量一律规定为：和坐标轴正向一致的为正。

## 1.1 位移函数 形状函数

由于杆单元是只受轴向拉力或压力的等断面的杆件，所以，图 1.1 中杆单元的节点力仅有  $U_i$  和  $U_j$ ，其他方向的节点力  $V_i = W_i = V_j = W_j = 0$ 。同样，杆单元的位移也仅有  $u_i$  和  $u_j$ ，其他方向的节点位移  $v_i = w_i = v_j = w_j = 0$ ，如图 1.2 所示，设杆的长度为  $l$ ，弹性模量为  $E$ ，横断面积为  $A$ ，且都为常数。

杆单元在节点力的作用下所产生的内部各节的位移称为内位移。描绘内位移的函数叫位移函数。由材料力学知道，仅受轴向力作用的杆，其中各点的位移是沿杆的轴线按线性规律变化，即

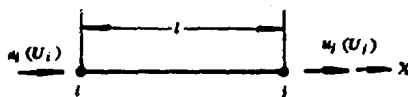


图 1.2 局部坐标中的杆单元

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \tag{1.1}$$

这就是杆单元的位移函数。式中  $\alpha_1, \alpha_2$  是两个待定的常数，可以由  $i, j$  节点的位移确定。通常用  $\{f\}$  表示单元的内位移，对于杆单元，它是仅有一个矩阵元素的特殊列阵。用矩阵表示为

$$\{f\} = \{u(x)\} = [1, x] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = [Q] \{\alpha\} \tag{1.2}$$

式中  $1$  和  $x$  为基底函数， $[Q]$  为基底函数矩阵。 $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  为单元的广义位移， $\{\alpha\}$  为广义位移列阵。



单元的广义位移，可由图 1.2 中杆单元的边界条件确定。其边界条件是：当  $x=0$  时， $u(0)=u_i$ ，当  $x=l$  时， $u(l)=u_j$ 。将该边界条件代入式(1.1)得

$$\begin{aligned} u_i &= a_1 \\ u_j &= a_1 + a_2 l \end{aligned}$$

上式的矩阵形式为：

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [C] \{a\}$$

用  $\{\delta\}^e$  表示单元的节点位移  $\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$ ，上式可表示为

$$\{\delta\}^e = [C] \{a\} \quad (1.3)$$

式中  $[C]$  是连系广义位移和节点位移的矩阵，称为变换矩阵。

为求得式(1.1)位移函数的显式，需求出  $a_1$  和  $a_2$  两个待定系数。由式(1.3)可知，广义位移列阵  $\{a\}$  为

$$\{a\} = [C]^{-1} \{\delta\}^e \quad (1.4)$$

杆单元的变换矩阵  $[C]$  的逆矩阵为

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

将上式代入式(1.4)得

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ \frac{u_j - u_i}{l} \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

即

$$\begin{aligned} a_1 &= u_i \\ a_2 &= \frac{u_j - u_i}{l} \end{aligned}$$

将  $a_1, a_2$  代入式(1.1)得

$$\begin{aligned} u(x) &= u_i + \frac{u_j - u_i}{l} x \\ &= \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_i + \frac{x}{l} u_j \end{aligned}$$

设  $N_i = 1 - \frac{x}{l}$ ， $N_j = \frac{x}{l}$  并代入上式得

$$u(x) = N_i u_i + N_j u_j \quad (1.6a)$$

上式的矩阵形式为

$$\{u(x)\} = [N_i \quad N_j] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (1.6b)$$

即

$$\{f\} = [N] \{\delta\}^e \quad (1.6c)$$

式中  $[N]$  称为形状函数矩阵。

式(1.6c)中的形状函数矩阵是有限元法中十分重要的矩阵，它把单元的节点位移和单元的内位移连系起来。矩阵 $[N]$ 中的 $N_i$ 和 $N_j$ 分别是 $i$ 和 $j$ 节点的形状函数。

由式(1.6a)可知，当 $u_i=1, u_j=0$ 时，杆单元的位移 $u(x)$ 就是 $N_i$ ；当 $u_j=1, u_i=0$ 时，杆单元的位移分布就是 $N_j$ 。所以形状函数的力学含义是：当单元的一个节点位移为单位值，其他节点的位移为零时，单元内位移的分布规律。

杆单元的形状函数 $N_i$ 和 $N_j$ ，如图1.3所示。当结构变形之后， $i$ 点和 $j$ 点的位移通常都不为零，这时，单元内的位移按式(1.6a)由节点位移和相应的形状函数求得。正因为形状函数反映了单元的位移分布状态，矩阵 $[N]$ 及其元素 $N_i$ 和 $N_j$ ，也由此而得名。

由分析式(1.6)还可看出：通过形状函数，可把两个孤立的常值位移 $u_i$ 和 $u_j$ 化为连续函数 $u(x)$ 。从数学上讲，就是已知函数在闭区间两个端点上的值 $u_i, u_j$ 构成一个连续函数 $u(x)$ 。它在端点上的值应保证等于 $u_i$ 和 $u_j$ 。这样的计算步骤就是内插。形状函数 $N_i$ 和 $N_j$ 就是实现内插的两个函数，所以 $N_i(x), N_j(x)$ 又叫内插函数，形状函数矩阵 $[N]$ 又叫内插函数矩阵。而位移函数式 $u(x) = N_i u_i + N_j u_j$ 又叫内插多项式。杆单元的内插多项式可按线性的插值求得（确切地说是通过杆单元两点拉格朗日内插求得）。

需强调指出，形状函数和内插函数是一个函数的不同名称，前者是从力学角度定义的，后者是从数学角度定义的。

将式(1.4)代入式(1.2)得

$$u(x) = [Q][C]^{-1}\{\delta\}$$

由式(1.6)

$$u(x) = [N]\{\delta\}$$

则

$$[N] = [Q][C]^{-1} \quad (1.7)$$

式(1.7)是求单元形状函数矩阵经常用到的重要公式。

形状函数除了上述的力学意义之外，还有更重要的数学意义。如果说结构被有限个自然节点离散化为有限个单元的集合，实现了结构模型的离散化，那么形状函数则完成了数学模型的离散化。这两个离散化的步骤构成了有限元法的理论基础。在用有限元法解连续介质问题时，离散化就显得格外重要。

观察式(1.2)和式(1.6)，可以发现，同一个位移函数可写成两种不同的形式，即

$$u(x) = [Q]\{\alpha\} = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

$$u(x) = [N]\{\delta\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

其中 $[Q]$ 是以 $1, x$ 为基底的矩阵，它对应的是广义位移 $\alpha_1, \alpha_2$ 。而形状函数矩阵 $[N]$ 是以 $N_i, N_j$ 为基底的矩阵，对应的是单元的节点位移 $u_i, u_j$ 。两者得到相同的位移函数，因而

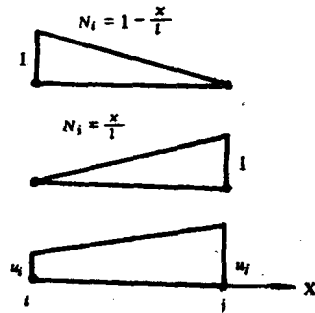


图 1.3 杆单元的形状函数和位移函数

- a. 形状函数  $N_i$ ;
- b. 形状函数  $N_j$ ;
- c. 位移函数  $u(x)$ 。

广义位移 $\{\alpha\}$ 和节点位移 $\{\delta\}^e$ 没有本质的差别，只是对应于不同的基底进行内插罢了。

位移函数或形状函数的选择是有限元分析问题的关键。因为没有位移函数，就不可能进一步对单元进行分析。在用有限元法分析问题，结构被离散化为仅在节点处相联结的有限个单元的集合体，用各个单元内部及边界节点上的位移来近似地代表结构的真实位移，这样会带来误差，所以位移函数选择的优劣，会直接影响到解的收敛性及解的精确度。

## 1.2 单元应变和应力

有了位移函数式(1.6)，就可以由几何方程求得单元的应变，再由物理方程求得单元的应力。

杆单元的几何方程为

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

于是，杆单元的应变为

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} [N] \{\delta\}^e \\ &= \left[ \frac{d}{dx} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{l}\right) \right] \{\delta\}^e \\ &= \frac{1}{l} [-1 \quad 1] \{\delta\}^e \end{aligned}$$

或简写为

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta\}^e \quad (1.8)$$

$$[B] = \frac{1}{l} [-1 \quad 1] \quad (1.9)$$

式中 $[B]$ 称为几何矩阵，它是连系应变和节点位移的转换矩阵，对于杆单元，矩阵 $\{\varepsilon\}$ 中只有一个元素 $\varepsilon_x$ 。

杆单元的物理方程为

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

或

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

将式(1.8)代入上式得

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D][B] \{\delta\}^e \\ &= [S] \{\delta\}^e \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$[S] = [D][B] \quad (1.11)$$

式中 $[S]$ 称为应力矩阵。

对于杆单元

$$\begin{aligned} [S] &= [D][B] \\ &= E \cdot \frac{1}{l} [-1 \quad 1] \\ &= \frac{E}{l} [-1 \quad 1] \end{aligned}$$

杆单元的 $\{\sigma\}$ 和 $\{\epsilon\}$ 都是一维列阵。 $[D]$ 称为弹性矩阵,对于杆单元 $[D]=E$ 是 $1 \times 1$ 阶的矩阵。在有限元法中,式(1.8)和式(1.10)是经常用到的两个重要的公式。

### 1.3 虚功原理

设有一受外力作用的物体,如图1.4所示。它在 $i$ 节点处所受的外力可沿坐标轴分解为三个分力, $U_i$ 、 $V_i$ 和 $W_i$ ;在 $j$ 节点处所受的外力也可沿坐标轴分解为三个分力, $U_j$ 、 $V_j$ 和 $W_j$ 。这些分力可用列阵 $\{F\}$ 表示。而由这些分力引起的内力用 $\{\sigma\}$ 表示,即

$$\begin{aligned} \{F\} &= [U_i, V_i, W_i, U_j, V_j, W_j]^T \\ \{\sigma\} &= [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T \end{aligned}$$

此物体在 $A$ 、 $B$ 和 $C$ 处是固定的。

设物体在外力 $\{F\}$ 和内力 $\{\sigma\}$ 以及边界固定点 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 处的支反力作用下处于平衡状态。

现假设物体发生了某种虚位移。在外力作用处和各个外力相应方向上的虚位移为 $u_i^*$ 、 $v_i^*$ 、 $w_i^*$ 、 $u_j^*$ 、 $v_j^*$ 、 $w_j^*$ ,并用列阵 $\{\delta^*\}$ 表示之。由它引起的虚应变则用列阵 $\{\epsilon^*\}$ 表示之,即

$$\begin{aligned} \{\delta^*\} &= [u_i^*, v_i^*, w_i^*, u_j^*, v_j^*, w_j^*]^T \\ \{\epsilon^*\} &= [\epsilon_x^*, \epsilon_y^*, \epsilon_z^*, \gamma_{xy}^*, \gamma_{yz}^*, \gamma_{zx}^*]^T \end{aligned}$$

这个虚位移一般并不是上述实际外力引起的,而是另外的力或其他原因引起的,更多的是为了分析问题而假想的。

在虚位移发生时,外力在虚位移上所做的虚功是:

$$U_i u_i^* + V_i v_i^* + W_i w_i^* + U_j u_j^* + V_j v_j^* + W_j w_j^* = \{\delta^*\}^T \{F\}$$

在物体的单位体积内,应力在虚应变上的虚功是:

$$\sigma_x \epsilon_x^* + \sigma_y \epsilon_y^* + \sigma_z \epsilon_z^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^* + \tau_{yz} \gamma_{yz}^* + \tau_{zx} \gamma_{zx}^* = \{\epsilon^*\}^T \{\sigma\}$$

整个物体的虚应变能是:

$$\iiint \{\epsilon^*\}^T \{\sigma\} dx dy dz$$

虚功原理表明,如果在虚位移发生之前,物体处于平衡状态,那么在虚位移发生时,外力所做虚功等于物体的虚应变能,即

$$\{\delta^*\}^T \{F\} = \iiint \{\epsilon^*\}^T \{\sigma\} dx dy dz \quad (1.12)$$

式(1.12)称为弹性体的虚功方程。

### 1.4 单元刚度矩阵

假设有一杆单元如图1.5所示,杆单元的横断面积为 $A$ ,材料的弹性模量为 $E$ ,单元的长度为 $l$ 。

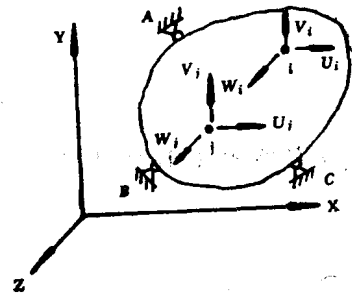


图 1.4

由杆单元的应力应变关系

$$\frac{U_j}{A} = \sigma = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{u_j - u_i}{l}$$

得

$$U_j = \frac{EA}{l}(u_j - u_i) \quad (1.13)$$

由力的平衡条件

$$U_i + U_j = 0$$

得

$$U_i = \frac{EA}{l}(-u_j + u_i) \quad (1.14)$$

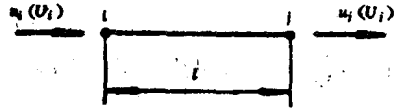


图 1.5

将式(1.13)和式(1.14)用矩阵表示

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} &= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.15)$$

为书写方便将式(1.15)简写为

$$\{F\}^e = [K]^e \{\delta\}^e \quad (1.16)$$

式中

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}$$

称为单元  $e$  的节点力向量

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

称为单元  $e$  的节点位移向量

$$[K]^e = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

称为单元  $e$  的刚度矩阵

矩阵  $[K]^e$  中每一个元素是一个刚度系数, 它的物理意义是单位节点位移分量所引起的节点力分量。例如元素  $K_{ij}$  表示当  $j$  节点产生单位位移即  $u_j = 1$  时, 在  $i$  节点产生的节点力。通常把表示力和位移关系的式(1.16)称为单元刚度方程式。

为便于推导其他类型单元的刚度矩阵, 使推导过程具有普遍意义, 下面用虚功原理来建立单元的刚度方程。

假设单元上和真实位移  $\{\delta\}^e$  相对应的节点力为  $\{F\}^e$ , 对应的内力是应力  $\{\sigma\}$ 。若节点发生虚位移  $\{\delta^*\}^e$ , 则相应的单元内的虚位移为  $\{f^*\}^e$ , 单元内的虚应变为  $\{e^*\}^e$ 。

单元的外力虚功

$$\delta V = (\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e$$

单元的虚应变能

$$\delta U = \iiint (\{e^*\}^e)^T (\sigma) dV$$

由虚功原理

$$\delta V = \delta U$$

$$\{\delta^*\}^T \{F\}^e = \iiint (\{e^*\}^T \{\sigma\}) dV$$

将式(1.8)、(1.10)代入上式

$$\{\delta^*\}^T \{F\}^e = \iiint (\{e^*\}^T [B]^T [D] [B] dV \{\delta\}^e$$

亦即

$$\{\delta^*\}^T (\{F\}^e - \iiint [B]^T [D] [B] dV \{\delta\}^e) = 0$$

因为虚位移是任意的，若上式成立则

$$\{F\}^e - \iiint [B]^T [D] [B] dV \{\delta\}^e = 0$$

即

$$\{F\}^e = \iiint [B]^T [D] [B] dV \{\delta\}^e$$

将上式与式(1.16)对比，则单元的刚度矩阵为

$$[K]^e = \iiint [B]^T [D] [B] dV \quad (1.18)$$

这是有限元法中又一重要公式。

下面用式(1.18)求杆单元的刚度矩阵。对于杆单元

$$[B] = \frac{1}{l} [-1 \quad 1]$$

$$[D] = [E]$$

$$dV = A \cdot dx$$

将上式代入式(1.18)

$$\begin{aligned} [K]^e &= \int_0^l \frac{1}{l} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} [E] \cdot \frac{1}{l} [-1 \quad 1] \cdot A \cdot dx \\ &= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

再次得到与式(1.17)相同的结果。

## 1.5 整体刚度矩阵的集成

有限元法的特点是将整体结构(连续体)离散化为有限个单元的集合体，从集合体中取出一个单元，进行单元分析，得到单元特性，然后将单元特性集合，得到整体特性。

下面以台阶轴为例介绍整体分析的方法。如图 1.6a 所示的台阶轴，将其理想化为图 1.6b 所示的 2 个单元、3 个节点的离散化模型。

首先进行单元分析，按上节

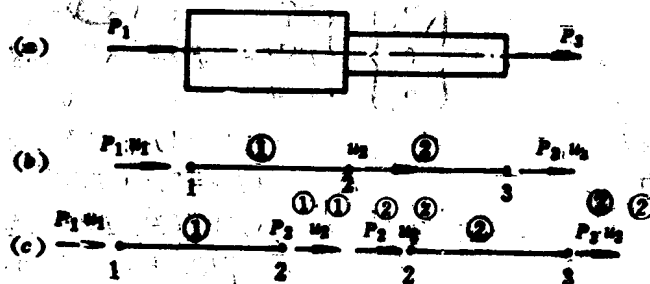


图 1.6 受轴向力变断面台阶轴

a 台阶轴; b 离散化模型; c 单元模型。

讲的方法列出单元的刚度方程

单元(1)的刚度方程

$$\begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

将上式用代数方程表示

$$P_1^{(1)} = K_{11}^{(1)}u_1^{(1)} + K_{12}^{(1)}u_2^{(1)}$$

$$P_2^{(1)} = K_{21}^{(1)}u_1^{(1)} + K_{22}^{(1)}u_2^{(1)}$$

单元(2)的刚度方程

$$\begin{Bmatrix} P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

用代数方程表示上式

$$P_2^{(2)} = K_{22}^{(2)}u_2^{(2)} + K_{23}^{(2)}u_3^{(2)}$$

$$P_3^{(2)} = K_{32}^{(2)}u_2^{(2)} + K_{33}^{(2)}u_3^{(2)}$$

台阶轴在外力  $P_1$  和  $P_3$  的作用下发生变形时, 在节点处的变形必须是连续的, 即  $u_2^{(1)} = u_2^{(2)}$ 。图 1.6 的模型中, 因为有三个节点, 所以有三个节点的位移, 即  $u_1 = u_1^{(1)}, u_2 = u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, u_3 = u_3^{(2)}$ 。

由于台阶轴处于平衡状态, 所以在各个节点上的力应该是平衡的。在节点 1 处, 外力是  $P_1$  (若有支承应是支反力), 节点力是  $P_1^{(1)}$ , 在节点 2 处外力为零, 所以  $P_2^{(1)} + P_2^{(2)} = 0$ , 在节点 3 处外力是  $P_3$ , 节点力是  $P_3^{(2)}$ 。下面列出各个节点的力的平衡方程式。

在节点 1 处

$$P_1 = P_1^{(1)} = K_{11}^{(1)}u_1^{(1)} + K_{12}^{(1)}u_2^{(1)}$$

在节点 2 处

$$\begin{aligned} 0 &= P_2^{(1)} + P_2^{(2)} \\ &= K_{21}^{(1)}u_1^{(1)} + K_{22}^{(1)}u_2^{(1)} + K_{22}^{(2)}u_2^{(2)} + K_{23}^{(2)}u_3^{(2)} \\ &= K_{21}^{(1)}u_1^{(1)} + (K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)})u_2 + K_{23}^{(2)}u_3^{(2)} \\ &= K_{21}^{(1)}u_1 + (K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)})u_2 + K_{23}^{(2)}u_3 \end{aligned}$$

在节点 3 处

$$\begin{aligned} P_3 &= P_3^{(2)} = K_{32}^{(2)}u_2^{(2)} + K_{33}^{(2)}u_3^{(2)} \\ &= K_{32}^{(2)}u_2 + K_{33}^{(2)}u_3 \end{aligned}$$

将上面三个方程用矩阵表示

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_1^{(1)} \\ -P_2^{(1)} + P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ -K_{21}^{(1)} & -K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} + K_{23}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

简写为

$$\{P\} = \{F\} = [K]\{\delta\} \quad (1.19)$$

式中

$$\{P\} = [P_1 \ 0 \ P_3]^T$$

$$\{F\} = [P_1^{(1)} \ -P_2^{(1)} + P_2^{(2)} \ P_3^{(2)}]^T$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ -K_{21}^{(1)} & -K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} + K_{23}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

$$\{\delta\} = [u_1, u_2, u_3]^T$$

$\{P\}$ 称为外载荷列阵,  $\{F\}$ 称为节点力列阵,  $[K]$ 称为整体刚度矩阵,  $\{\delta\}$ 称为整体位移列阵, 式(1.19)称为整体刚度方程式。由上面的推导过程可以看出: 整体刚度方程是结构的力的平衡方程式, 其中每一行都表示了一个节点上的力的平衡方程式。

以上集成整体刚度矩阵的方法主要用来说明整体刚度方程的物理意义。在工程应用中, 常采用叠加原理集成整体刚度矩阵。下面仍以台阶轴为例讲述叠加原理。

首先列出单元的刚度方程

$$\begin{cases} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{cases} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{cases} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} \end{cases} = \begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{cases} u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \end{cases}$$

将  $2 \times 2$  阶的单元刚度矩阵扩充为  $3 \times 3$  阶的贡献矩阵

$$\begin{cases} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ 0 \end{cases} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \\ P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{cases}$$

将贡献矩阵叠加

$$\begin{cases} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} + P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} \end{cases} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{cases}$$

或简写为

$$\{F\} = [K]\{\delta\}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

用叠加原理得到了与式(1.20)完全相同的整体刚度矩阵。在实际工程计算中, 单元数目往往有上百个, 无需将每个单元刚度矩阵都扩充为贡献矩阵, 而是按刚度系数的下标直接加到整体刚度矩阵中去。

整体刚度矩阵的性质

### 1. 对称性

整体刚度矩阵中,  $K_{ij} = K_{ji}$ 。这个性质非常重要, 利用其对称性可以在计算机中只存储矩阵的上三角部分或下三角部分。

### 2. 稀疏性

整体刚度矩阵  $[K]$  的绝大多数元素都是零, 这是因为和某一个节点相关的节点数一般不会超过 9 个, 而整个结构若有 200 个节点, 则矩阵  $[K]$  一行中的非零子块数和该行的子块总数相比不大于  $9/200$ , 即在 5% 以下。整体网格分的越细, 则  $[K]$  的稀疏性越突出, 利用这个特点可设法只存储  $[K]$  中的非零元素, 从而节省存储容量。



### 3. 带形分布规律

整体刚度矩阵 $[K]$ 的非零元素分布在以主对角线为中心的带形区域内，如图 1.7 所示。在包括对角线元素在内的半个带形区域中，每行具有的元素数叫半带宽，用 $d$ 表示， $d$ 可用下式计算

$$d = (\text{相邻节点号的最大差值} + 1) \times 2 \quad (1.21)$$

在同一离散化模型中，不同的节点编码会得到不同的半带宽 $d$ ，例如图 1.8 中(a)和(b)具有相同的网格，但(a)图中相邻节点最大差值为 5，按式(1.21)计算， $d = 12$ 。而(b)图中相邻节点的最大差值为 11， $d = 24$ 。两者相差一倍，故为了减少 $d$ 值，节点编码应尽量顺着整体网格的短边进行。

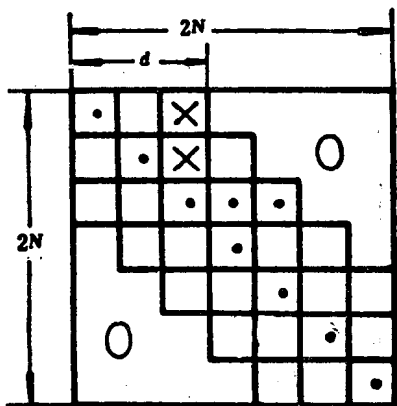


图 1.7

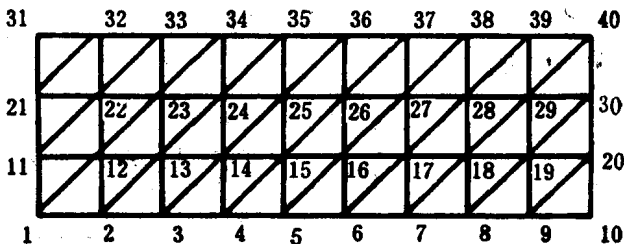


图 1.8

### 4. 奇异性

整体刚度矩阵是个奇异矩阵。刚度矩阵为奇异阵的物理意义是，整体结构可在无约束的条件下作刚体运动。所以解题时，必须根据支承条件对整体刚度矩阵 $[K]$ 进行修改，即处理边界条件。

## 1.6 处理边界条件

上节图 1.6 所示的台阶轴，将一端固定，如图 1.9 所示，则可限制其刚体位移。

图 1.9 中，将节点 3 固定，则 $u_3 = 0$ ，修改整体刚度矩阵的步骤是

写出整体刚度方程

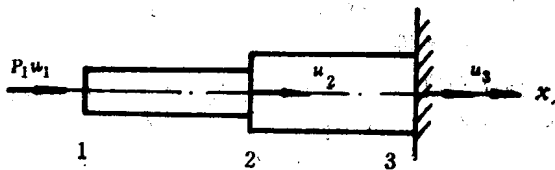


图 1.9