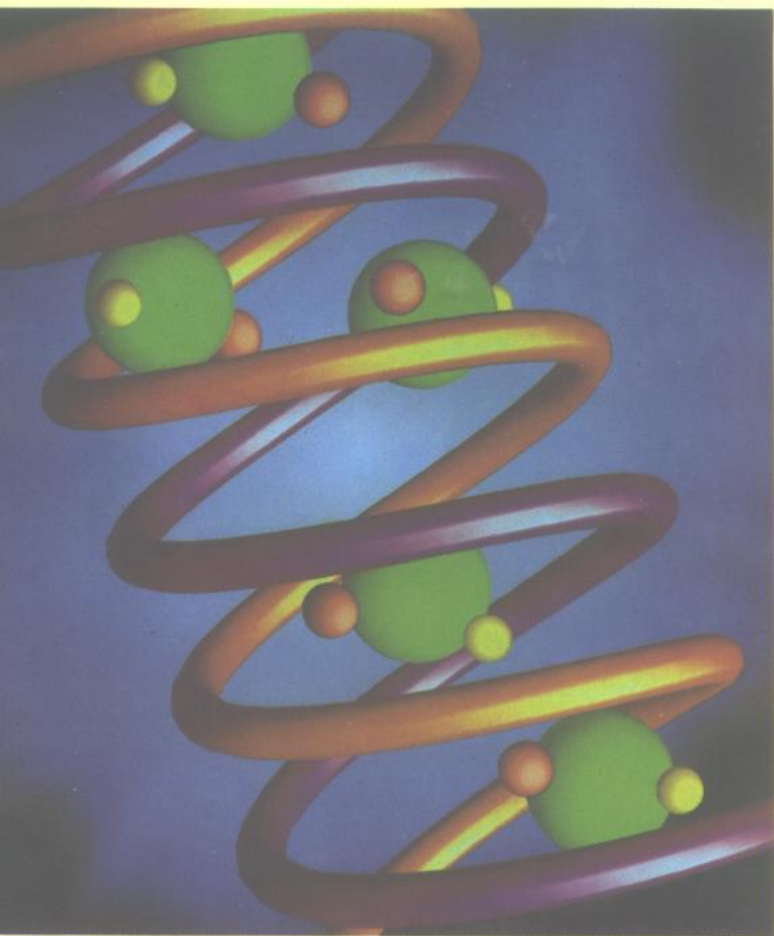


绳圈的数学

MATHEMATICS
OF STRING
FIGURES

走向数学丛书

姜伯驹 著



走向数学丛书

绳圈的数学

姜伯驹 著

湖南教育出版社

绳 圈 的 数 学
Mathematics of String Figures

姜伯驹 著

Jiang Boju

责任编辑: 孟实华

湖南教育出版社出版发行
湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷三厂印刷

787×1092 毫米 32 开 印张: 5 字数: 121000

1991 年 12 月第 1 版 1998 年 4 月第 2 次印刷

ISBN7—5355—1375—1 / G · 1370

定 价 9.60 元

21

数学天元基金

本丛书得到国家自然科学基金委员会,
数学天元基金的资助

《走向数学》丛书编委会

顾问：王 元 丁石孙

主编：冯克勤

编委：李 忠 史树中 唐守文

黎景辉 孟实华

“走向数学”丛书

陳省身題





作者简介

姜伯驹，男，浙江人。1937年生，1957年毕业于北京大学，后留校任教至今。1978年任副教授，1983年任教授。1985-1992年兼任南开数学研究所副所长。1995年任北京大学数学科学学院院长。1979年以来，曾先后在美国普林斯顿高等学术研究所，美国加州大学伯克利校、洛杉矶校，法国高等学术研究所，美国伯克利数学科学研究所，德国海德堡大学，美国普林斯顿大学等作学术访问或讲学。1981年当选为中国科学院数学物理学部委员，1985年当选为第三世界科学院院士。是第七、八、九届全国政协委员。

姜伯驹的主要研究领域是拓扑学。1962年他在江泽涵教授指导下开始研究不动点类理论（这是关于方程的解的个数的一种一般理论），打破了该理论长期停滞的局面，在尼尔森数的计算方面创立了现在国际上称为“姜子群”、“姜空间”的方法。1978年以后，他将不动点理论与低维拓扑学结合起来，证明了对于曲面的同胚，尼尔森数一定等于最少不动点数，而对于曲面

的映射,尼尔森数可以小于最少不动点数,全面地解决了已有五十年之久的“尼尔森不动点猜测”。由于这些成就,他两次荣获国家自然科学奖(1982年三等奖,1987年二等奖),并荣获陈省身数学奖(1988年),何梁何利基金科学技术进步奖(1996年)。

姜伯驹一向热心于数学的教育与普及。他所作的《一笔画与邮递路线问题》小册子(1962年),曾深受数学爱好者的欢迎。

主要著作有:专著《尼尔森不动点理论讲座》,(1983年美国数学会出版),及合著教材《解析几何》,合译教材《同调论》等。

前 言

王 元

从力学、物理学、天文学直到化学、生物学、经济学与工程技术，无不用到数学。一个人从入小学到大学毕业的十六年中，有十三、四年有数学课。可见数学之重要与其应用之广泛。

但提起数学，不少人仍觉得头痛，难以入门，甚至望而生畏。我以为要克服这个鸿沟，还是有可能的。近代数学难于接触，原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生，兼之近代数学的高度抽象与概括，难于了解与掌握。我想，如果知道讨论的对象的具体背景，则有可能掌握其实质。显然，一个非数学专业出身的人，要把数学专业的教科书都自修一遍，这在时间与精力上都不易做到。若停留在初等数学水平上，哪怕做了很多难题，似亦不会有助于对近代数学的了解。这就促使我们设想出一套“走向数学”小丛书，其中每本小册子尽量用深入浅出

的语言来讲述数学的某一问题或方面,使工程技术人员,非数学专业的大学生,甚至具有中学数学水平的人,亦能懂得书中全部或部分含义与内容。这对提高我国人民的数学修养与水平,可能会起些作用。显然,要将一门数学深入浅出地讲出来,决非易事。首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解。从整体上说,我国的数学水平还不高,能否较好地完成这一任务还难说。但我了解很多数学家的积极性很高,他们愿意为“走向数学”撰稿。这很值得高兴与欢迎。

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社支持,得以出版这套“走向数学”丛书,谨致以感谢。

目 录

前 言 (王元)

I

绪 言	1
第一章 纽结与链环的基本概念	5
§ 1 什么是纽结, 什么是链环	5
§ 2 纽结与链环的投影图	10
§ 3 用初等变换鉴别链环	18
§ 4 有向链环 环绕数	24
§ 5 形形色色的纽结与链环	33
(A) 几族纽结与链环	33
(B) 纽结与链环的运算	37
(C) 纽结与链环复杂程度的几种指标	44
第二章 琼斯多项式	
——80年代的一颗数学明珠	49
§ 1 琼斯的多项式不变量	52
§ 2 尖括号多项式	57
§ 3 琼斯多项式及其基本性质	63
第三章 交错纽结与交错链环	70
§ 1 四岔地图的着色	72
§ 2 泰特猜测的证明	74

§ 3 交错链环与交错多项式	81
第四章 总的弯曲量	90
§ 1 闭折线的全曲率	90
§ 2 方向球面 芬舍尔定理的证明	92
§ 3 面积原理 法利—米尔诺定理的证明	96
第五章 扭转与绞拧的关系	99
§ 1 带形模型	101
§ 2 再谈环绕数	104
§ 3 绞拧数	112
§ 4 带形的扭转数	118
§ 5 怀特公式	123
第六章 在分子生物学中的应用	129
§ 1 DNA 和拓扑异构酶	129
§ 2 实验的技术	132
§ 3 生物化学中的拓扑方法	133
阅读材料	137
附表: 纽结与链环及其琼斯多项式	139

绪 言

人类自从会用绳子,就会打绳结.我们的祖先在史前时代用绳结来记事,《周易》中就有“上古结绳而治”的记载.南美洲印第安人的印加帝国,在西班牙人入侵之前曾创造了灿烂的古代文明,但始终没有文字.博物馆里保存着“基普”——印加人用来进行统计和记事的系着各种结的彩色绳子,却没有人说得清这些结原来代表的意思,印加帝国的历史就成了一连串的谜.这是绳记事的最突出的例子.

打结也曾是一种重要的实用技能,因此早就有专门著作来研究.外国的《绳结大全》之类的书,主要是总结海员们的经验,在什么场合下该用什么结、不该用什么结.也有的书总结魔术师的经验.在我国,货运工人、卡车司机、马车把式对绳结都有丰富的实践经验.

撇开绳结的用途、手法、绳子的质料、长短、粗细等因素,各种结在几何形状上有没有本质的差异呢?为识别不同的结,必须先把结“封起来”,把打好结的绳子的两端捻合在一起,成为没有端点的圈.书后的附表就展示了许多有结的绳圈,彼此之间不能通过连续变形互相转化,除非剪断后重接.几个绳圈还可以彼此

套住不能分离,这种现象叫做连环.绳圈的打结与连环现象在生活中到处可见,链条、挂锁、许多装饰图案、小孩玩的绳圈翻花游戏,等等.绳圈也可用作许多自然现象的模型,例如生物化学中环状 DNA 分子就可以打结.

虽然人类认识与利用绳圈已经如此悠久,对绳圈进行理论研究的历史却不长,起因还得归功于物理学.1867年,英国物理学家开尔文勋爵(Lord Kelvin)提出一种原子模型,认为原子是“以太”中的涡圈.当时人们相信宇宙中充斥着一种介质叫“以太”(ether),万物都是“以太”的表现形式.涡圈就像是抽香烟的人精心吐出的环状烟圈,涡旋的轴心线是一个圈,圈的形状可以改变,可以维持相当时间不散.开尔文设想,涡圈的轴心线可以打结,不同的结代表不同的化学元素.这个学说促使一批热心的物理学家去研究绳圈的打结现象.像任何一门学科一样,基础性的工作是收集、总结经验资料.经过英国人泰特(Tait)等人不懈的努力,第一张纽结表在1899年问世.在编表的过程中他们还提出了许多经验规律.

数学上的纽结理论,是本世纪以来作为拓扑学的一个重要部分而发展起来的.拓扑学是研究几何图形的连续变形的学科,纽结理论研究绳圈(或多个绳圈)在连续变形下保持不变的特性.由于纽结与链环既直观又奥妙,纽结理论成了拓扑学中引人入胜的一支,它在数学中的重要性也日渐上升.

1984年,新西兰数学家琼斯(Jones)在研究算子代数时发现了一个新的纽结不变量——琼斯多项式.这有如一声春雷,使纽结理论成为世界数学界注意的焦点之一,引发了一连串的重要进展,开辟了与许多别的数学分支的联系渠道.琼斯因此在1990年的世界数学家大会上荣获菲尔兹奖,这个四年一度的奖有诺贝尔奖那样的声誉(诺贝尔奖中没有数学奖).尤其令人惊

异的是,人们已为琼斯多项式找到一种不需要什么准备知识的初等讲法,并且用来证明了泰特等人提出的一些经验规律.这就是说,作为事后诸葛亮,我们发现这块瑰宝原来埋藏并不深,不知为什么先贤们竟错过了它.

我们将在第一章介绍关于纽结与链环的基本概念,然后在第二章用上面提到的初等讲法来介绍琼斯多项式,并在第三章用它来证明泰特关于交错纽结的猜测.这是本书的一条主线,可以叫做绳圈的拓扑学.

本书的另一条主线是绳圈的几何学,讨论与绳圈的具体形状有关的几何量,诸如弯曲、扭转、缠绕等.这些几何量在绳圈作连续变形时是要发生改变的,其变化却又受到绳圈的拓扑不变量的制约.

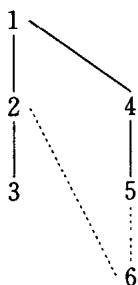
先把绳子看成是没有粗细的,研究绳圈的弯曲.它的总弯曲角度至少是 2π ,如果绳圈打了结的话它的总弯曲角度就一定超过 4π .这是第四章的话题.

一条有粗细的绳子除了可以弯曲之外还可以被扭转(例如用手搓绳子).经验告诉我们,搓扭以后一放松,绳子往往绞缠起来.在第五章我们将建立一个数学模型以揭示扭转与绞缠这两者之间的互相补偿的关系.所得到的怀特(White)公式,诞生于1969年,竟然立即对于分子生物学中遗传物质DNA的研究,产生了重要的影响.我们将在第六章中简单介绍这种应用.

弯曲、扭转、缠绕等几何量,本来是对光滑曲线来讨论的,要用微积分来定义,属于微分几何学的研究范围.我们改而讨论折线.这不但使这些几何量的含义变得直观易懂,而且在许多应用中(例如DNA)折线比光滑曲线更接近实际.第五章中提出并证明的怀特公式的折线形式,是数学文献中所未见的,为本书的首创.

本书是为具有高中数学基础的数学爱好者写的,也是为需要了解有关绳圈的数学知识的科学工作者写的. 因此我们尽量避免高等数学的知识,采取初等的讲法. 我们要求于读者的,只是探索钻研精神,理性的思维,以及对于立体图形的观察力. 为了激励读者进行独立思考,我们附了一些习题,许多是为加深对概念和方法的理解而设,有的则是对读者能力的真正挑战.

各章之间的逻辑关系见下图. 读者可以先看看每章的引言,然后根据自己的兴趣和需要来选读. 书末还推荐了一些进一步阅读的材料.



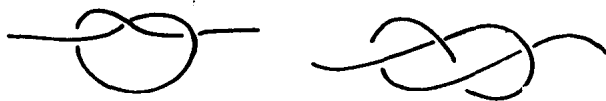
第一章 纽结与链环的基本概念

这一章要从具体的绳圈提炼出有关的数学概念和数学问题,以明确我们要研究的对象和内容.最后一节 § 5 的内容,并不全是以后各章要用到的,目的是帮助读者体会纽结理论的丰富多采.

§ 1 什么是纽结,什么是链环

绳子打结,人人都会.捆东西,系鞋带,缝衣服,织毛衣,以至变戏法,不同的场合用不同的结.可是结的异同怎样描述,怎样研究?

下图是两个绳结.做两个实物模型把玩一番,你就会相信这



两个结是不同的.除非把绳头抽回重穿,你没法把左边那个结变