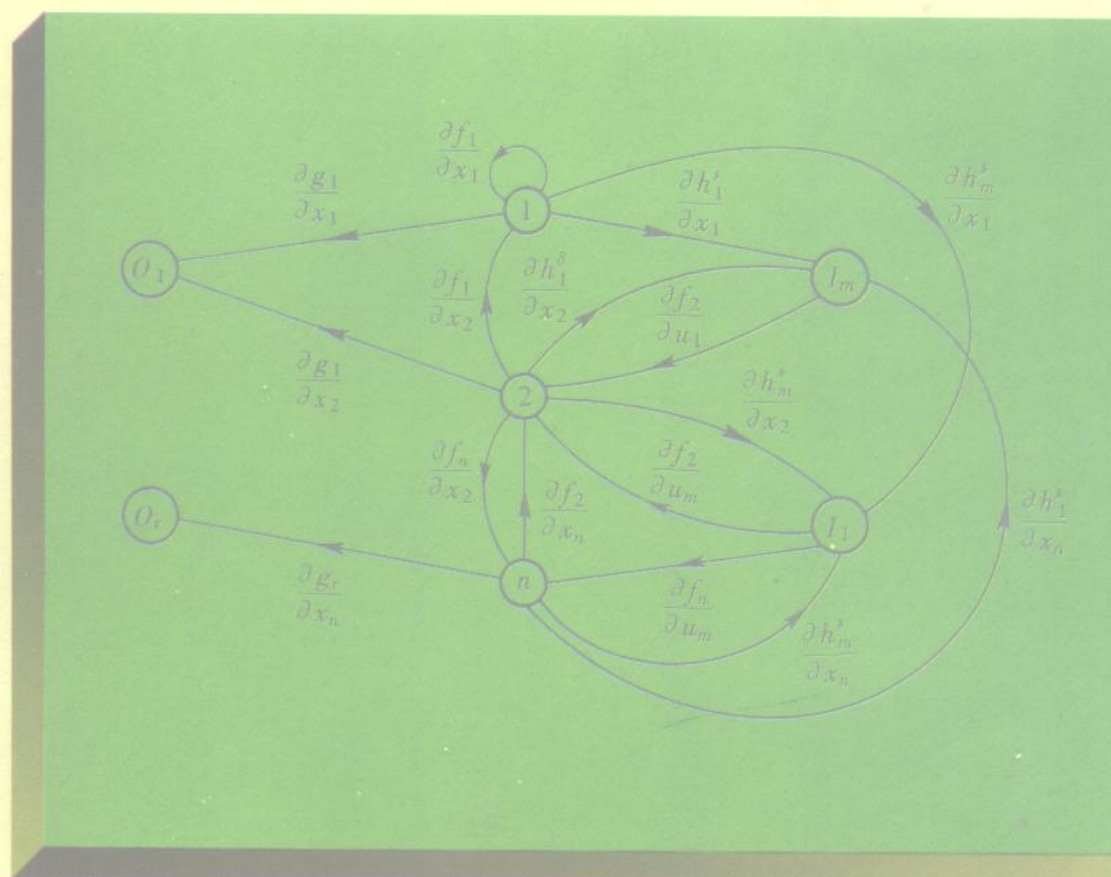


吴启迪
萧蕴诗
编译



多变量系统的图论方法



多变量系统的图论方法

吴启迪 萧蕴诗 编译

同济大学出版社

责任编辑:张 丁
封面设计:李志云

多变量系统的图论方法

吴启迪 萧蕴诗 编译

同济大学出版社出版

(上海市四平路 1239 号 邮编 200092)

新华书店上海发行所发行

同济大学印刷厂印刷

开本:787×1092 1/16 印张:11.75 字数:300 千字

1997 年 5 月第 1 版 1997 年 5 月第 1 次印刷

印数:1—800 定价:24.00 元

ISBN7-5608-1861-7/TP·193

内容提要

本书系统介绍了多变量系统设计的图论方法。书中第一章介绍了动态系统的图论表达,并据此讨论了系统的可分解性、能控能观性等重要基本特性。第二、三章讨论了基于状态反馈和输出反馈的控制器综合问题,并介绍了系统抗干扰、解耦及极点配置等经典控制问题的图论方法思路。最后在第四章指出了控制器图论方法进一步探索的前景。经典控制理论和状态空间方法是本书读者必备的基本知识;本书的附录介绍了使用的图论工具基础。

本书主要面向从事多变量控制系统研究开发的工程师以及控制理论和应用数学研究工作者;也可作为自动控制专业研究生的控制理论教材。

编译者的话

我们根据《Multivariable Control A Graph-theoretic Approach》(K. J. Reinschke)一书的基本内容编译而成这本关于多变量系统设计的图论方法专著。本专著主要面向从事多变量控制系统研究和开发的工程师,以及研究控制理论问题的应用数学工作者;它也是一本自动控制专业研究生的适用教材。

1950年以后控制实践的需要促使了对具有多个输入和(或)输出的对象实行控制方法的发展。这一类多变量控制系统主要在现代控制理论中讨论,该理论主要是建立在状态空间方法上的。状态空间方法为控制工程师提供了能控性和能观性等一系列新概念,并且理清了一些在经典控制理论中理解肤浅的基本系统理论问题。

即使如此,从做实际工作的工程师的观点出发,状态空间理论还是存在一些严重的不足之处:

一对象的数学模型用矩阵常微分方程表示,方程中出现的矩阵元素为精确已知的数值。经验说明,对于对象描述中所选择的矩阵元素的微小变化,所设计的控制器表现出相当大的敏感性。而在实践中,工程师不得不处理对象参数所存在的多多少少的不确定性和变化。

一对象分析和控制器综合方法建立在繁复的矩阵运算基础上。控制工程师失去了所希望的直觉和形象化的洞察力。

一在处理大系统时,所研究的矩阵的阶数增加迅速。稀疏矩阵问题作为大系统中一个典型性质是必须考虑的。但这要求掌握矩阵技巧中较特殊的进一步知识。

1970年以后,出现了“反对无节制的矩阵运算”的线性多变量控制的“几何方法”(见 Wonham, 1974)。该几何理论建立在线性向量空间的一个抽象的无坐标的表达形式基础上。可惜这种抽象程度与控制工程师传统的推理方式不相适应。

“图论方法”则试图从另一方面克服状态空间理论的缺点:它用适当选择的图形表达来为已知的控制系统建模,所讨论的系统特性则可以用图形性质来表示,这就使工程师们能更深入理解特征结构性质。不确定参数对系统的影响可以考虑为进一步设计和优化的自由度。如果图论描述指出不能保证满足的性质,则可提出系统修改方案,以达到满足希望性质的目的。至于大系统,应当看到,图论系统表达准确反映的是不能消除的耦合。矩阵中零元素根本不出现于图形表达中。因此,图论方法特别适用于稀疏大系统。

本书的读者应当事先熟悉一些控制理论。应当修过或正在学习频率响应方法和状态空间方法的入门课程。如对图论有些工作经验当然是有好处的,但这并不是必须的。附录 1 和 2 向读者介绍了本书需要的所有图论工具。在附录 1 中介绍了基本概念和本书中采用的记法。在附录 2 中讨论了用图论方法表示行列式的几种可能性。用圆族来表示行列式是很关键的,这一方法是在 1815 年由 A·L·柯西首先发表,而后于 1959 年由 C.L.Coates 重新提出。

本书主要由四章组成。

第一章首先介绍了适用于动态大系统的图论表达。在此表达基础上,可以十分容易地检验系统的一些重要性质,如可分解性、结构能控性和能观测性。另外还要较详细地讨论“系统性质一般有效性”概念。

第二章至第四章讨论控制器综合问题。

第二章中考虑静态状态反馈。从图论观点出发,重新讨论了极点配置问题。将图论方法应用于讨论以静态状态反馈解决抗干扰和解耦这两个经典的问题,取得了令人满意的结果。

在第三章中考虑静态输出反馈。在对开环与闭环特征多项式系数的图论解释基础上,分别用代数和图论的方式描述了多变量系统的极点和零点,包括无穷远零点及其多重性。然后提及了众所周知的用静态输出反馈任意配置极点的问题。最后推出局部极点可配置性的一个充分必要判据和全局极点可配置性的一个新的充分条件。

在第四章中给出了控制器综合图论方法进一步探索的前景。除了结构约束情况下静态输出反馈之外,还简要提及到动态控制器、系统隐含描述、非线性对象、由逻辑和动态元件组成的混合系统等其他一些问题。这正反映了本书为其内容的充分发挥与开拓留有余地的意图。也即指出了利用图论方法可能获得进一步结果的方向。

我们相信,本专著介绍的内容对于系统设计理论的发展和开拓,对于控制系统分析与综合基本方法新思路的建立都是十分有益的。

在本专著的前期工作中,同济大学电气工程系自动控制教研室 90 届和 91 届的研究生为有关的文字翻译工作付出了大量艰苦的劳动。在此,谨向他们致以衷心的感谢。

编译者

1996.9

目 录

编译者的话

第一章 大系统的有向图建模	(1)
§ 1.1 从状态空间模型到有向图的映射	(1)
§ 1.2 结构矩阵及其有向图	(5)
§ 1.3 适当的状态排列	(7)
1.3.1 基于可联通特性的分解	(7)
1.3.2 状态重排的一种算法	(9)
1.3.3 既约结构矩阵的一些性质	(13)
§ 1.4 结构能控性、结构能观测性和结构完备性	(15)
1.4.1 输入可连通性和结构能控性	(15)
1.4.2 结构能控性判据	(17)
1.4.3 结构能观测性和结构完备性	(22)
§ 1.5 结构特性的广义性讨论	(24)
第二章 基于静态状态反馈的控制器有向图综合方法	(28)
§ 2.1 通过静态状态反馈配置极点	(28)
2.1.1 问题的提出	(28)
2.1.2 图论描述及闭环系统特征多项式系数的代数重建	(29)
2.1.3 单输入系统的极点配置	(37)
2.1.4 多输入系统的极点配置	(41)
2.1.5 确定具有希望极点配置的所有反馈矩阵	(45)
§ 2.2 干扰作用的抑制	(49)
2.2.1 问题的提出和初步结果	(49)
2.2.2 干扰抑制的必要条件和充分条件	(50)
2.2.3 可抑制干扰的校正与补偿	(54)
2.2.4 一种干扰抑制算法	(59)
§ 2.3 基于状态反馈的解耦控制有向图法	(64)
2.3.1 举例	(64)
2.3.2 问题的提出	(68)
2.3.3 静态状态反馈解耦的必要条件	(69)
2.3.4 静态状态反馈解耦的充分条件	(71)
第三章 基于静态输出反馈的控制器有向图综合方法	(77)
§ 3.1 传递函数矩阵和图论术语中的闭环特征多项式	(77)
3.1.1 传递函数和它们的图解	(77)
3.1.2 闭环特征多项式系数的反馈相关性	(83)
3.1.3 闭环特征多项式系数的图论解释	(89)

§ 3.2 多变量系统的零极点	(94)
3.2.1 单输入单输出系统的零极点	(94)
3.2.2 多变量系统的极点和有穷零点	(95)
3.2.3 有穷零点和极点的结构性质的图论特征	(102)
3.2.4 多变量系统的无穷零点及它们的图论特征	(110)
§ 3.3 静态输出反馈的极点配置	(114)
3.3.1 问题的提出和预备知识	(114)
3.3.2 局部极点可配置性的充要条件	(117)
3.3.3 全局极点可配置的条件	(126)
3.3.4 对应于给定正则 P 值的光滑子域 $M \in R^{n \times r}$ 的数值计算	(138)
第四章 控制器图论方法综合的进一步探讨	(144)
§ 4.1 结构约束下的静态输出反馈	(144)
4.1.1 有结构约束的输出反馈系统的能控与能观性	(145)
4.1.2 固定模与结构固定模	(145)
§ 4.2 动态控制器	(150)
§ 4.3 半状态系统描述	(153)
§ 4.4 非线性系统和复杂自动化系统的有向图方法	(158)
附录 A1 图论介绍	(160)
A1.1 图与有向图	(160)
A1.2 路径、环和树	(162)
A1.3 方阵的图论表达	(165)
附录 A2 有向图与行列式	(167)
A2.1 用加权有向图来计算行列式	(167)
A2.2 利用加权有向图计算多变量特征多项式	(171)
A2.3 特征多项式系数及其灵敏度的图论表达	(174)
参考文献	(179)

第一章 大系统的有向图建模

§ 1.1 从状态空间模型到有向图的映射

我们可以用多种数学方法描述动态反馈系统。本书中,以状态空间描述为基础,即可先由下列动态方程来描述所研究的对象模型:

$$\dot{x}_i(t) = f_i\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t); t\} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.1.1)$$

$$y_j(t) = G_j\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t); t\} \quad j = 1, \dots, r \quad (1.1.2)$$

对象可用不同的方法来加以控制。在静态状态反馈情况下,控制律由下式给出:

$$u_k(t) = h_k^s\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t\} \quad k = 1, \dots, m \quad (1.1.3)$$

而在静态输出反馈情况下,则有

$$u_k(t) = h_k^0\{y_1(t), \dots, y_r(t); t\} \quad k = 1, \dots, m \quad (1.1.4)$$

列向量

$$x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}' \quad (1.1.5)$$

$$u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\}' \quad (1.1.6)$$

$$y(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)\}' \quad (1.1.7)$$

为状态向量、输入向量和输出向量。

对于由式(1.1.1)、(1.1.2)、(1.1.3)给出的一个动态反馈系统,可以相应地确定一个有向图 G^s ,这一有向图 G^s 是由如下点集与边集定义的:

点集由 m 个输入点 $I_1, I_2, \dots, I_m$, n 个状态点 $1, 2, 3, \dots, n$ 和 r 个输出点 $O_1, O_2, \dots, O_r$ 组成。

边集根据下列规则给出:

如果状态变量 x_j 确定出现在 $f_i(x, u, t)$ 中,即 $\partial f_i / \partial x_j \neq 0$,则存在从点 j 到 i 的边。

如果输入变量 u_k 确定出现在 $f_i(x, u, t)$ 中,即 $\partial f_i / \partial u_k \neq 0$,则存在从输出点 I_k 到状态点 i 的边。

如果状态变量 x_i 确定出现在 $g_j(x, u, t)$ 中,即 $\partial g_j / \partial x_i \neq 0$,则存在从点 i 到 O_j 的边。

最后,如果状态变量 x_i 确定出现在 $h_k^s(x, t)$ 中,这种情况一般是状态反馈,则存在从点 i 到点 I_k 的边。

作为举例,一个有向图 G^s 的特征部分可由图 1.1.1 来粗略地描述。

类似地,对于由式(1.1.1)、(1.1.2)、(1.1.4)给出的动态系统,可相应地得出有向图 G^0 :

* 它具有与 G^s 相同的点集。

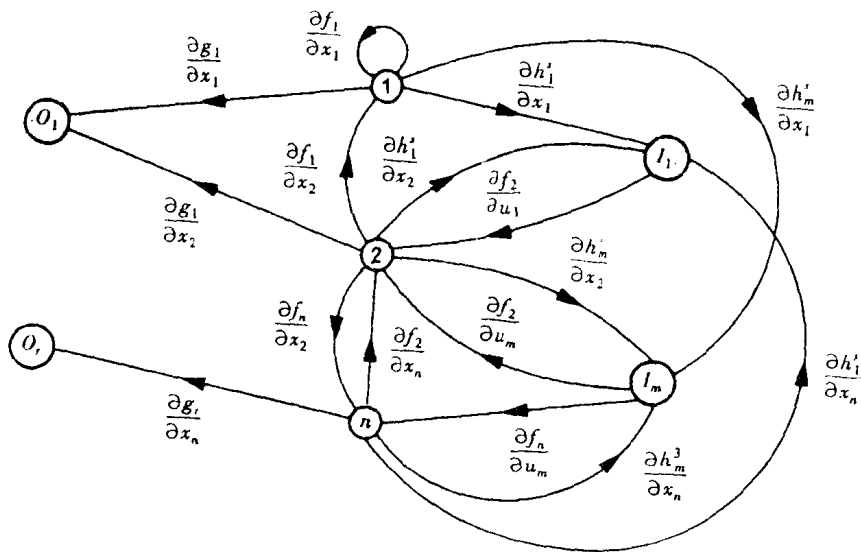


图 1.1.1

* 采用与 G^* 相同的原则, 状态边表示 $\partial f_j / \partial x_j \neq 0$, 输入边表示 $\partial f_i / \partial u_k \neq 0$, 输出边表示 $\partial g_j / \partial x_i \neq 0$ 。

* 当且仅当 y_j 出现在 $h_k^0(y, t)$ 时, 反馈边不是从状态点到输入点, 而是从输出点 O_j 到输入点 I_k 。

图 1.1.2 表示一个有向图 G^0 的特征部分。

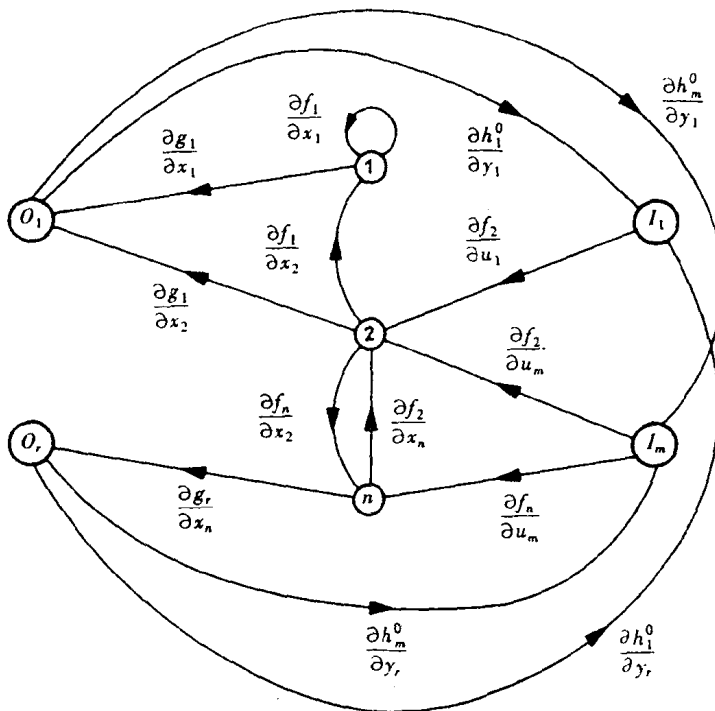


图 1.1.2

显然,与方程(1.1.1),(1.1.2),(1.1.3)和(1.1.1),(1.1.2),(1.1.4)相比,有向图 G^s 和 G^0 分别含有较少的信息。可以说,有向图 G^s 和 G^0 分别分映了具有状态反馈或输出反馈的一个闭环系统结构。

当所研究的系统的规模较小时,例如系统只具有 $n=2$ 或 $n=5$ 的状态变量,这时往往没有必要单独研究系统结构。而对于大规模系统,则应该尽可能从研究它的结构入手。有向图方法对于研究结构是极其有用的,尤其是对于大规模系统。

大系统的一个显著特征就是它的稀疏性,这个结构特性在有向图 G^s 或 G^0 中表现得更为明显。有向图方法在一些不可解耦的系统中更能显示其优越性。因为在大多数应用情况下,我们不必考虑所有的 n^2 条状态边,而只需研究其中的一小部分。此外,有向图 G^s 和 G^0 还给我们提供了闭环系统信息流的一个直观表达。从本书 G^0 后续章节可以看到,与借助于传统的数值方法相比,运用有向图方法可以得到对于结构特性的更深入的认识。进行系统设计时,在作数值运算以前,应该充分地分析并利用已知的结构特性。

在本书中,我们研究的是用于处理线性多变量系统有向图方法,对象的模型可用下列形式的矩阵方程来描述:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.1.8)$$

$$y = Cx \quad (1.1.9)$$

其中 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^r$, 矩阵 A 、 B 、 C 具有实元素,其维数分别为 $n \times n$, $n \times m$, 和 $r \times n$ 。

在静态状态反馈情况下,

$$u = Fx; \quad (1.1.10)$$

而在静态输出反馈情况下,

$$u = Fy; \quad (1.1.11)$$

在实际控制问题中,反馈增益并不总能自由选择,所以反馈矩阵 F 在结构上会有一定限制。如果假设反馈模式由 F 矩阵中可自由变动的元素表示,且 F 阵中所有元素可任意设置,则可用 E 来代替 F 。

为了研究多变量控制系统,应考虑选择一个合适的组合矩阵,后面我们将会看到,将开环系统的所有信息用一个 $r+n+m$ 阶的组合方阵来表达是一个行之有效的方法,即

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & C & 0 \\ 0 & A & B \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.12)$$

对于能控性研究,建立如下方阵是合适的:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ E & 0 \end{bmatrix} \quad \text{阶数为 } n+m. \quad (1.1.13)$$

而在研究能观测性时,可建立

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & C \\ E & A \end{bmatrix} \quad \text{阶数为 } r+n. \quad (1.1.14)$$

同时考虑到能控性和能观测性时,采用

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & C & 0 \\ 0 & A & B \\ E & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{阶数为 } r+n+m_c \quad (1.1.15)$$

在有输出反馈的情况下,可能存在结构上的约束

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & C & 0 \\ 0 & A & B \\ F & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{阶数为 } r+n+m_c \quad (1.1.16)$$

在附录 A1.3 中提供了多种构造给定方阵对应有向图的方法。本书中将采用其中的第二种图论矩阵表示法。

定义 1.1.1

设 Q 为一已知 q 阶方阵。

Q 可由一个 q 个不同的点 $v_1, v_2, \dots, v_q$ 的有向图 $G(Q)$ 来表示。当且仅当 Q 的 q_{ji} 项不为零时,存在一条由点 v_i 到点 v_j 的边,该边的权与 q_{ji} 的数值相等。

设 $n=3, m=r=2$, 形如式(1.1.8, 1.1.9)的对象方程如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (1.1.17)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (1.1.18)$$

对于此例的系统,可以画出如图 1.1.3 所示的有向图 $G(Q_3)$ 。

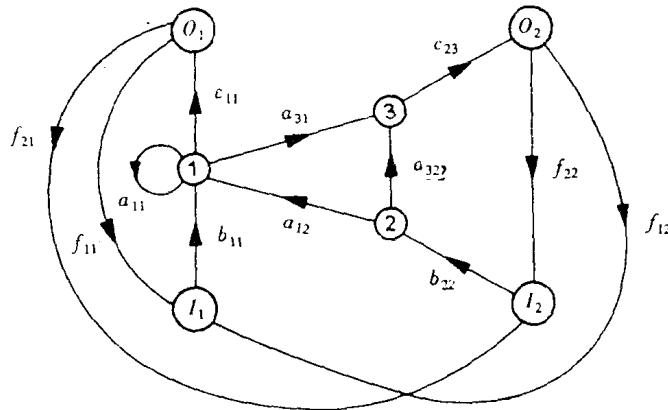


图 1.1.3

有向图 $G(Q_0), G(Q_1), G(Q_2), G(Q_3)$ 和 $G(Q_4)$ 的常用符号表达分别示于图 1.1.4 的 a), b), c), d) 和 e)。

其中符号 $\Rightarrow$ 对应了所有边权数的矩阵。而图 1.1.4 有向图中的多重点 u, x 和 y 则分别对应了输入向量、状态向量和输出向量。

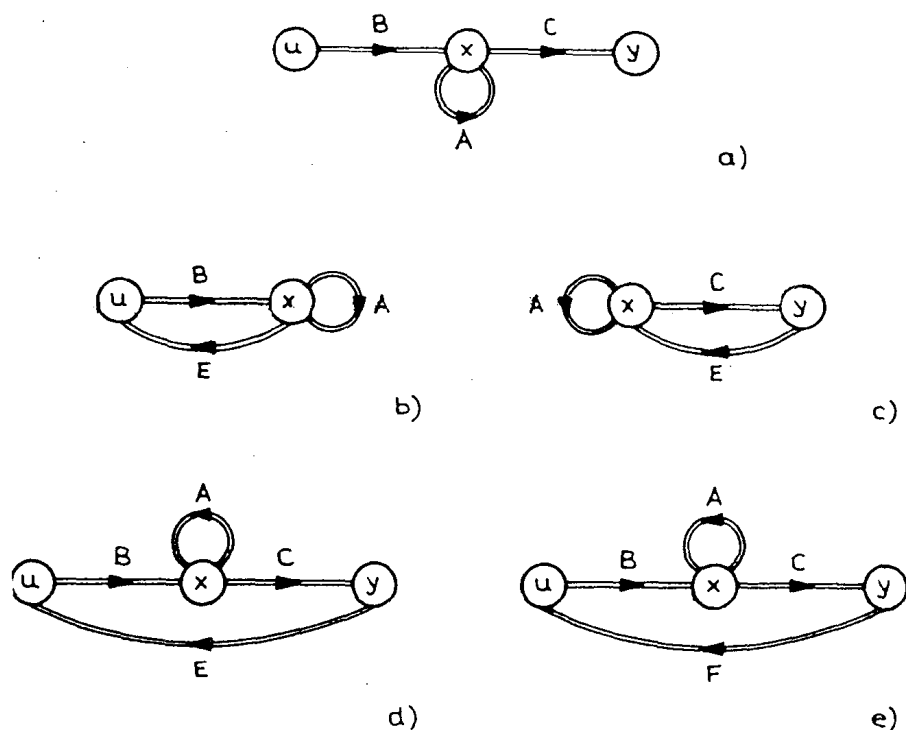


图 1.1.4

§ 1.2 结构矩阵及其有向图

在传统的控制理论体系中,矩阵 A 、 B 、 C 、 F 的元素都认为是百分之百精确的数值。但由于物理上的实际原因,包含在这些矩阵中的各元素中的参数只可能是近似的。因此,把它们的大多数项看作为不确定值将会更合适。只有那些已知为零的项才是确定的。

在涉及到 C. T. Lin 于 1974 年提出的“结构能控性”及其相关的“结构研究”时,人们常常只需考虑矩阵 A 、 B 等的“结构”。这就意味着要研究的不是数值已知的结构 A 、 B 等,而是对应的具有相同维数的结构矩阵 $[A]$ 、 $[B]$ 等。

定义 1.2.1

结构矩阵 $[Q]$ 的元素,要么为零,要么为与其他任一项均不相关的不确定值。如果将 $[Q]$ 的所有不确定元素确定为某些特定值,则这个数值已知的矩阵 Q 就可称为一个可允许数值实现(对应于 $[Q]$)。如果矩阵 Q' 和 Q'' 都是结构矩阵 $[Q]$ 的可允许数值实现,则称它们是结构等价的。

在后文中,我们用“ L ”来表示一个结构矩阵的不确定项,用“ 0 ”来表示其为零值的项(也可简单地用空格来表示)。

例 1.2.1 考虑一个状态变量 $n = 6$, 输入变量 $m = 2$, 输出变量 $r = 3$ 的对象,其数学模型用下列由式(1.1.8)和(1.1.9)定义的矩阵来描述:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} & a_{25} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{51} & 0 \\ 0 & b_{62} \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

假定除已标出的零值元素外,其他元素的值为未知的实数,则根据式(1.1.15),可得到状态矩阵 $[Q_3]$

[illegible]

由定义 1.1.1, 我们容易得到一个结构方阵 $[Q]$, 对应的边不加权的有向图 $G([Q])$ 。以刚才讨论的系统为例, 可画出有向图 $G([Q_3])$, 见图 1.2.1。

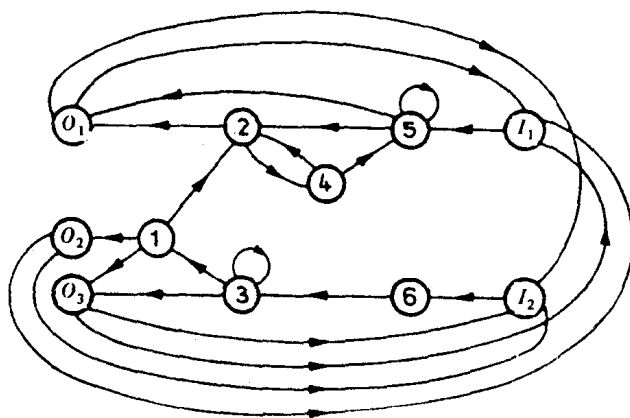


图 1.2.1

所谓“结构控制理论”研究的是这样一些同类的系统,它们的系统矩阵是结构等价的。

因而要探讨的不是系统数值上的特性,而是对应的“结构特性”。

定义 1.2.2

如果所研究的特性对于“几乎所有”的可允许数值实现在数值上都成立,则在这一类结构等价的系统中,称该特性在结构上成立。

该定义の詳細解释如下:

把一类结构等价的系统看成是 d 维的欧氏空间 R^d ,则在通常的数值意义上,具有所讨论特性的实际系统的集构成一个子集 $S \subset R^d$ 。当且仅当 S 在 R^d 中稠密时,对于所考虑的系统类,该特性在结构上成立。这里“稠密”的概念来自于拓扑学。(如果对于任意 $r \in R^d$ 和 $\epsilon > 0$,存在 $s \in S$,使得欧几里德距离 $Q(s, r) \leq \epsilon$,则集 $S \subset R^d$ 在 R^d 中是稠密的。)

为了给出一个结构特性的例子,我们先引入“矩形结构阵 $[Q]$ 的结构秩”的概念。

定义 1.2.3

$[Q]$ 的独立项集合为一个该结构矩阵的非确定项的集合,其中的任意两项都不在同一线(行或列)上。

$[Q]$ 的结构秩(记为 $s\text{-rank}$)是至少包含在一个独立项集合中的元素的最大个数。

应注意, $[Q]$ 的结构秩等于所有可允许数值矩阵 Q 在通常数值意义上的最大秩。

$$s\text{-rank}[Q] = \max_{Q \in [Q]} \text{rank } Q \quad (1.2.3)$$

在有关文献中,“generic rank”和“term rank”等概念与结构秩具有相同的含义(这一点可参见 Johnston 等 1984 年和 Andrei 1985 年的文章及其中所引用的大量资料)。

§ 1.3 适当的状态排列

1.3.1 基于可连通特性的分解

在大系统中系统矩阵存在着高度的稀疏性,而其对应的有向图 $G([A])$ 则最为明显地反映了这一性质。而且, $[A]$ 的有向图表达还具有一个重要的不变性:点的排列是无关紧要的。也就是说,对 $[A]$ 的排列转换,其有向图 $G([A])$ 都保持不变。但是,可以证明,对点进行适当的排列,特别是对大系统而言,是非常有用的。为了达到这个目的,我们可根据有向图 $G([A])$ 各点之间的可连通性将它分解为若干子图。因此,对有向图 $G([A])$ 的分解常常作为研究大系统的基础。

附录 A1.2 对于有向图分解的概念和表达法都作了解释。应当找到 $G([A])$ 的子图,其中的点是强连通的。这里提醒读者注意,当同时存在着一条由点 i 到点 j 和一条由点 j 到点 i 的路径时,则这两个点 i 和 j 是强连通的。

在所有 $G([A])$ 的 n 个点的集合中,与已知点 i 强连通的点构成的子集形成一个等价类 $K(i)$ 。所有强连通点形式地等价类,连同与这些点相连的所有边一起,构成一个子图 $G([A])$,形式地对应于 $[A]$ 的一个子方阵 $[Q]$ 。在矩阵理论中, $G([A])$ 的强连通特性被称为 $[Q]$ 的既约性(参见 Gantmacher, 1966)。

如果 $G([A])$ 不包含与已知点 i 相接的圈,则称点 i 构成一“无圈”等价类,其相应的子图 $G([A])$ 为孤立点 i ,相应的子阵 $[Q]$ 为 $[A]$ 的主对角线上的一个零元素。

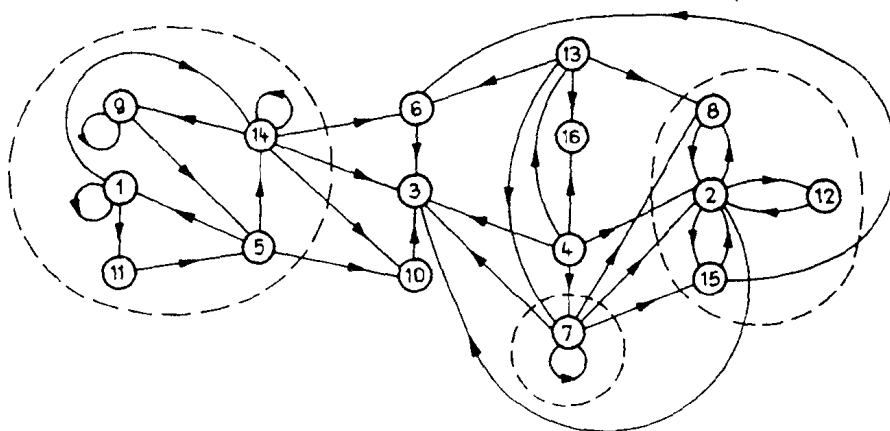
等价类的集合可以经过一个变换,尽可能地从低阶到高阶进行排列。

按下列变换,可由 $[A]$ 得到其重新排列后的结构阵 $[\tilde{A}]$:

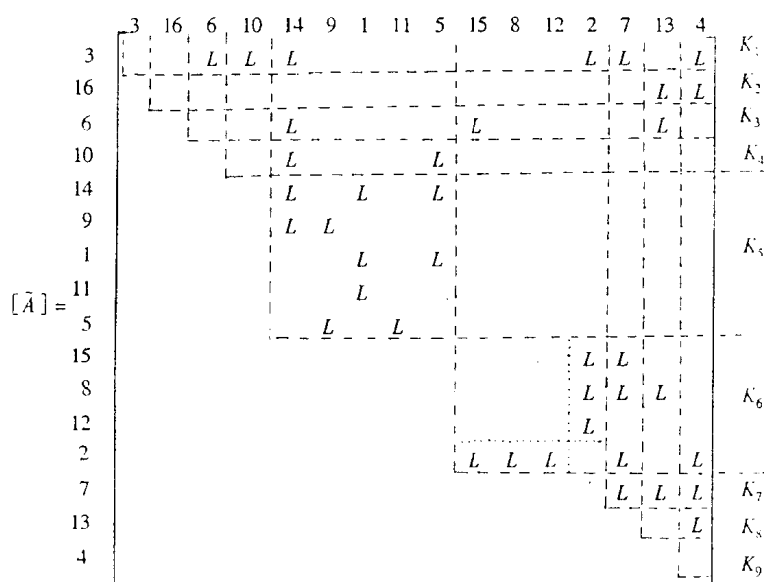
$$[\tilde{A}] = p \cdot [A] p \quad (1.3.1)$$

$$[A] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} & \begin{bmatrix} L & & & & L & & & & & & & & & & \\ & & & L & & & L & L & & & & L & & & L \\ & L & & L & & L & L & & & L & & & & L & \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & L & & L & & & & \\ & & & & & & & & & & & L & L & L \\ & & & L & & L & & & & & L & & & & \\ & L & & & & & L & & & & & L & & & \\ & & & & & & & & L & & & & L & \\ & & & L & & & & & & & & L & \\ & L & & & & & & & & & & & & \\ & & L & & & & & & & & & & & \\ & & & L & & L & & & & & & & & \\ & L & & & & & L & & & & & & & \\ & & L & & & & & L & & & & & & \\ & & & L & & & & & & & & & L \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(a)



(b)



(c)

图 1.3.1

变换后的矩阵 $[\tilde{A}]$ 具有如下性质:

— $[\tilde{A}]$ 阵是一个准上三角矩阵,具体地说,在它的主对角块下的超列的所有部分都属于强连通子图,其元素均为零。

—所有不为零的主对角块都是既约的结构阵。

例 1.3.1 图 1.3.1 表示了一个 16×16 的结构阵 $[A]$ 和其相关的有向图 $G([A])$,及重排后的结构阵 $[\tilde{A}]$ 。

1.3.2 状态重排的一种算法

大系统矩阵的重排过程,多年前就已经有人讨论过,且已应用到许多不同的领域(可参见下列文献:Kemeny 和 Snell 1960, Kaufann 1968, Kevorkian 1975, Bunch 和 Rose 1976, Evans1981 等)。下面,我们着重讨论与 F.J.Evans 的提法很相近的一种可行的方法。

将 $[A]$ 阵中的不确定项“L”用数“1”代替,可得到 $G([A])$ 的邻接矩阵(或称分布矩阵) N ,其中

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当存在由点 } j \text{ 到点 } i \text{ 的边} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1.3.2)$$

$$i, j = 1, \dots, n。$$

矩阵 N 自乘 1 次所得的幂 N^1 的元素 $n_{ij}^{(1)}$ 也可从图形的角度理解为:

$n_{ij}^{(1)}$ = 以点 j 为起点、点 i 为终点的长度为 1 的路径数。

$$i, j = 1, \dots, n。 \quad (1.3.3)$$

可连通矩阵(或称可达性矩阵)是由下式定义的一个 $n \times n$ 阶结构矩阵: