数字信号处理基础

郑治真　编著

地震出版社

数字信号处理基础

郑 治 真　编著

北京出版社
1988

内 容 提 要

本书系统地阐述了数字信号处理的基本理论，并结合具体问题介绍了它在地球物理中的应用。书中介绍了数字滤波器的设计，逐步回归分析，时间序列的ARMA分析，最大熵谱、最大似然谱、多道维纳滤波和卡尔曼滤波方法，还讨论了最小相位延迟信号和滤波器的性质。

本书适于非数学专业高年级大学生和研究生阅读，也可供从事信号处理的科技人员参考。

数字信号处理基础

郑治真　编著

责任编辑　李俊

地震出版社出版

北京复兴路63号

山东电子工业印刷厂印刷

（淄博市周村）

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

850×1168　1/32　　13.5印张　360千字

1988年9月第一版　　1988年9月第一次印刷

印数　0001—3000

ISBN 7-5028-0172-3/O·6

（324）　定价：5.50元

前 言

如何从有干扰的观测资料中提取有用的信息，这是数字信号处理研究的基本内容。随着科学技术的迅速发展，尤其是信息时代的到来，信号处理方法日益显示其重要性和广泛的适用性。数字信号处理是应用数学的一个分支，它涉及的数学方法较广，既包括古老的最小二乘法，也包括成功地应用于飞行器导航、导弹制导的卡尔曼滤波；既有频域中的处理方法，也有时域中的处理方法。数字信号处理是一门正在发展的边缘学科，涉及到概率论、信息论、微分方程、复变函数论、矢量与矩阵分析多门学科。要在一本小书中对各方面的问题予以全面深入的论述是不可能的。本书力图在侧重介绍方法的同时阐述其基本原理，但避免过深的数学理论。书中第一、二章内容是为了阅读后面几章做准备的，熟悉向量、矩阵分析和概率数理统计的读者可越过它。第三章至第九章的内容为数字滤波器的原理和设计、逐步回归分析、时间序列的ARMA分析、最大熵谱、最大似然谱、多道维纳滤波和卡尔曼滤波。第十章是几种统计估计方法的评述，内容虽然稍有重复，但有助于读者总结和比较各种信号处理方法的优劣。第十一章简述了最小相位信号与滤波器的性质。第十二章是应用实例。书中的各章都自成一个体系，便于只对个别内容有兴趣的读者查阅。本书适用于非数学专业大学高年级学生和研究生阅读，亦可供从事数字信号处理的科技人员参考。

中国科学院声学所俞铁城副研究员审阅了本书的原稿；国家地震局地球物理研究所刘元壮同志为本书清稿并绘制了全部插图。笔者表示衷心的谢意。

作 者

1986年10月

目 录

第一章　向量和矩阵分析

本章和第二章都是作为以后各章的预备知识编写的，对于熟习矩阵分析的读者起个回忆复习的作用；对于不熟悉矩阵的读者，读了这章之后，至少对于本书的需要已足够用了。为了兼顾这两个方面，其内容既不能太浅，也不能太深。由于篇幅所限，对很多推导冗长、证明复杂的定理，仅给出其结果和应用。在本章的开头给出一些最基本的定义和公式，这样便于不熟悉矩阵分析的读者阅读本章其余的内容。

§1.1　定义和基本运算

一、向量

向量$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$和$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$的内积定义为：

$$(X, Y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{1.1}$$

写成向量乘积的形式为：

$$(X, Y)=X^TY=Y^TX. \tag{1.2}$$

内积有下述性质：

(1) 对称性：$(X, Y)=(Y, X)$。

(2) 齐次性：$(KX, Y)=K(X, Y)$，K为标量。

(3) 加法性：$(X+Y, Z)=(X, Z)+(Y, Z)$。

(4) 正定性：$(X, X)\geqslant 0$，当且仅当$X=0$时等号成立。

1．向量长度

定义向量$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的长度为：

$$\|X\| = \sqrt{(X, X)} = \sqrt{X^{\tau}X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \quad (1.3)$$

根据内积的齐次性有：

$$\|KX\| = |K|\,\|X\|.$$

2．几个定理

柯西不等式：对任意两个向量X和Y，都有下述不等式：

$$\|X^{\tau}Y\| \leqslant \|X\|\,\|Y\|. \quad (1.4)$$

只要把不等式两边用分量形式表示出来，很容易给出不等式的证明。

有了柯西不等式，可以定义向量间夹角为：

$$\cos(X, Y) = \frac{X^{\tau}Y}{\|X\|\,\|Y\|}. \quad (1.5)$$

三角不等式：向量X和Y满足下述不等式：

$$\|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|. \quad (1.6)$$

余弦定理：

$$\|X \pm Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 \pm 2X^{\tau}Y. \quad (1.7)$$

勾股定理：若X与Y满足$X^{\tau}Y = 0$，则有：

$$\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2. \quad (1.8)$$

3．向量的相关性

线性相关和线性无关：设X_1，X_2，…，X_m为m个n维向量，若可以找到m个不同时为零的实数K_1，K_2，…，K_m，使得

$$K_1X_1 + K_2X_2 + \cdots + K_mX_m = 0. \quad (1.9)$$

则称向量X_1，X_2，…，X_m线性相关。如果只有当$K_1 = K_2 = \cdots = K_m = 0$时，(1.9)式才成立，则称这$m$个向量是线性无关的。

由上述定义可见，若一个向量组包含有零向量，则必定为线性相关。

n个n维向量相关的充分必要条件：设有n个n维向量为

$$\begin{cases} X_1 = (x_{11} x_{12} \cdots x_{1n})^{\tau}, \\ X_2 = (x_{21} x_{22} \cdots x_{2n})^{\tau}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n = (x_{n1} x_{n2} \cdots x_{nn})^{\tau}. \end{cases}$$

这n个向量相关的充分必要条件为下述行列式

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

的值为零。只要将(1.9)式写成分量的形式，很容易得到这个结论。

假设有m个n维向量，若$m>n$，根据上述结果可知，这m个n维向量必定是相关的。个数大于维数

4. 向量的范数

定义向量X的范数为满足下述三个条件的非负实数：

(1) 非负性：当$X \neq 0$时，$\|X\|>0$，

当$X=0$时，$\|X\|=0$.

(2) 齐次性：对任意常数K有：

$\|KX\|=|K|\|X\|$.

(3) 满足三角不等式：$\|X\|+\|Y\| \geqslant \|X+Y\|$.

在上述定义下，可得到多种计算向量范数的公式，向量的长度也满足范数条件，因此这里仍采用符号$\| \ \|$。下面介绍几种计算范数的公式。

P范数：对任意向量X和不小于1的正数P，

$$\|X\|_P = \left\{ \sum_{i=1}^{d} |x_i|^P \right\}^{\frac{1}{P}}. \tag{1.11}$$

(1.11)式满足范数的三个性质，称为向量X的P范数。记着$\|X\|_P$。

常用的P范数有下述三种：$P=1$，$P=2$，$P=\infty$；当$P=2$时，即为向量的长度。

现在证明$\|X\|_1$和$\|X\|_\infty$满足上述三个条件。

$\|X\|_1$满足性质（1）是显然的。若K为任意常数，则有：

$$
\begin{aligned}
\|KX\|_1 &= |Kx_1| + |Kx_2| + \cdots + |Kx_d| \\
&= |K|(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_d|) \\
&= |K|\|X\|_1.
\end{aligned}
$$

因此$\|X\|_1$满足性质（2）。又

$$
\|X+Y\|_1 = |x_1+y_1| + |x_2+y_2| + \cdots + |x_d+y_d|
$$

$$
\leqslant \sum_{i=1}^{d}(|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{d}|x_i| + \sum_{i=1}^{d}|y_i| = \|X\|_1 + \|Y\|_1,
$$

因而满足条件(3)。

至于$\|X\|_\infty$，首先证明

$$
\|X\|_\infty = \lim_{P\to\infty}\|X\|_P = \max_i |x_i|. \qquad (1.12)
$$

令　$w=\max\limits_i |x_i|$，则有：

$$
\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^P\right\}^{\frac{1}{P}} = w\left\{\sum_{i=1}^{n}\beta_i^P\right\}^{\frac{1}{P}}. \qquad (1.13)
$$

其中　$\beta_i = \left|\dfrac{x_i}{w}\right| \leqslant 1.$

因而　$\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i^P \leqslant n$，为一有限的正实数。所以有：

$$
\lim_{P\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^P\right)^{\frac{1}{P}} = 1. \qquad (1.14)
$$

根据(1.13)、(1.14)式，则有：

$$\|X\|_{\infty} = \lim_{P\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^P\right\}^{\frac{1}{P}} = \lim_{P\to\infty} w\left\{\sum_{i=1}^{n}\beta_i^P\right\}^{\frac{1}{P}}$$

$$= w = \max_i |x_i|.$$

最后，(1.12)式满足范数的三个条件是很明显的。

*A*范数：A为任意$n\times n$阶对称正定矩阵，则定义向量X的A范数为：

$$\|X\|_A = (X^T A X)^{1/2}.$$

因为还没有介绍矩阵，所以这里就不讨论$\|X\|_A$了。

二、矩阵

1. 定义和基本运算

$n\times m$个实数a_{ij}($i=1, 2, \cdots, n$; $j=1, 2, \cdots, m$)的如下排列，称为一个n行m列的矩阵。简称为$n\times m$矩阵。并用A表示：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

有时也简记为$A=(a_{ij})$，a_{ij}称为矩阵的第i行第j列元素。当全部元素为零时称为零矩阵。当$m=1$时，即$n\times 1$矩阵，称为n维向量，记作

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T.$$

矩阵的基本运算有加法和乘法。

矩阵加法：矩阵A和B有相同的行数和列数，其对应位置的元素相加，所得到的新矩阵C称为矩阵A与B的和。

$$C = A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad (1.16)$$

即

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

矩阵乘以实数：用实数a乘以矩阵的每个元素，所得矩阵称

为实数α与矩阵的乘积

$$\alpha A=(\alpha a_{ij}).\tag{1.17}$$

上述两种运算具有下述性质：

(1) 交换律和结合律

$$(A+B)+C=(B+C)+A.$$

(2) 分配律

$$(\lambda+\mu)(A+B)=\lambda A+\lambda B+\mu A+\mu B.$$

矩阵的乘法：$n\times l$阶矩阵A和$l\times m$阶矩阵B的积AB定义为如下的$m\times n$阶矩阵C

$$C=AB=\left(\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}\right),$$

即

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}.\tag{1.18}$$

只有前一个矩阵的列数等于后一个矩阵的行数的两个矩阵才能相乘。矩阵乘法一般不满足交换律，即$AB=BA$一般是不 成立的。两个非零矩阵的乘积可能得到零矩阵。而且由$AC=BC$不能 推出$A=B$。

矩阵乘法满足下述性质：

(1) 结合律

$$(AB)C=A(BC).$$

(2) 分配律

$$(A+B)C=AC+BC.$$

(3) $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$.

其中α为实数。

2．几种特殊矩阵

称$n\times n$阶矩阵为n阶方阵，下面是几种特殊的矩阵。

对角阵：

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}.$$

上三角阵：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

下三角阵：

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

单位阵：

$$I=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

零矩阵：

$$A=0 \qquad (a_{ij}=0).$$

3. 转置矩阵和对称矩阵

把矩阵$A=(a_{ij})$的行和列互换而得到的矩阵叫做A的转置矩阵，记为A^{τ}，也可记为A'。

根据定义有$(A^{\tau})^{\tau}=A$。

对于$n\times n$方阵，若有

$$A^{\tau}=A,$$

则称A为对称矩阵。

矩阵的转置运算有下述性质：

(1) $(A+B)^{\tau}=A^{\tau}+B^{\tau}$,

(2) $(aA)^{\tau} = aA^{\tau}$,

(3) $(AB)^{\tau} = B^{\tau}A^{\tau}$.

4. 矩阵的秩

在$n \times m$阶矩阵A中，任意选取k个行和k个列，位于这些行和列相交处的元素，按原有位置排列而成一个k阶行列式，叫做矩阵A的k阶子式，例如在4×4阶矩阵A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

中选取第一行和第三行，第二列第四列得到一个二阶子式为：

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

子式是子行列式，因而是一个数值。

矩阵的秩：在矩阵中，值不为零的子式的最高阶数r，叫做矩阵的秩，通常表示为$\mathrm{rank}A = r$。

若把矩阵看成是由行向量（或者列向量）组成的，那么行向量（或者列向量）中线性无关向量的个数r称为矩阵的秩。可以证明，根据一个矩阵的行向量和列向量所确定的矩阵的秩是相等的。

对一个$n \times n$阶方阵，若其秩为n，则称为满秩矩阵。若一个$n \times m$阶矩阵A，有$\mathrm{rank}A = n$，则称为行满秩矩阵；若$\mathrm{rank}A = m$，则称为列满秩矩阵。

可以证明，矩阵A和矩阵B乘积的秩不超过A或者B的秩。

任意矩阵左乘或者右乘满秩矩阵，其秩不变。

5. 矩阵的迹

定义方阵A的迹为其主对角线元素之和，记为$\mathrm{Tr}A$，即

$$\mathrm{Tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \qquad (1.19)$$

显然有：

$$\begin{cases}\mathrm{Tr}A^{\tau}=\mathrm{Tr}A,\\ \mathrm{Tr}(A+B)=\mathrm{Tr}A+\mathrm{Tr}B,\\ \mathrm{Tr}(aA)=a\mathrm{Tr}A.\end{cases}$$

如A为$n\times m$阶矩阵，B为$m\times n$阶矩阵，则有：

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB)&=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\ b_{ji}\right)\\&=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{ji}\ a_{ij}\right)\\&=\mathrm{Tr}(BA).\end{aligned}\tag{1.20}$$

6. 矩阵的范数

现在把向量的范数推广到矩阵的情况。对于一般的$n\times m$阶矩阵，可以将其看作$n\times m$维向量，然后完全仿照向量的办法来定义$n\times m$阶矩阵的范数。例如我们把$n\times m$阶矩阵A排列成下述$n\times m$维向量$\mathbf{A}$，

$\mathbf{A}=(a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1m};\ a_{21},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{2m};\ \cdots;\ a_{n1},\ a_{n2},\ \cdots a_{nm})^{\tau}$，

因此向量$\mathbf{A}$的$P=2$范数为：

$$\|\mathbf{A}\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n\times m}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

所以矩阵A的范数为

$$\|A\|=\|\mathbf{A}\|_2.\tag{1.21}$$

然而，矩阵之间还有矩阵的乘法运算，对$n\times n$阶方阵，还有一般的矩阵范数定义。

对于任意$n\times n$阶方阵A和B，一个满足下述四个条件的非负

实函数$\|A\|$，称为矩阵A的范数：

$$\left.\begin{array}{ll}(1)\ \text{非负性：如果}A\neq 0\text{，则}\|A\|>0, & \\ \qquad\qquad\ \ \text{如果}A=0\text{，则}\|A\|=0 & \\ (2)\ \text{齐次性：对任意实数}K\text{，}\|KA\|=|K|\,\|A\| & \\ (3)\ \text{三角不等式：}\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\| & \\ (4)\ \text{乘法不等式：}\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|. & \end{array}\right\} \qquad (1.22)$$

与向量时情况一样，也可以有多种满足上述定义的矩阵范数。因在大多数情况下，矩阵的范数与向量的范数混合运算。所以，在定义具体的矩阵范数时，应使它与向量的范数相容。下面给出向量范数与矩阵范数相容性条件。

相容性条件：任意$n\times n$阶矩阵A的范数应与n维向量X的范数满足下述不等式：

$$\|AX\|\leqslant\|A\|\,\|X\|. \qquad (1.23)$$

下面给出一种定义矩阵范数的方法，使它与已知的向量范数相容。其方法是把向量AX的范数的最大值当作矩阵A的范数，

$$\left.\begin{array}{l}\|A\|=\max\|AX\| \\ \|X\|=1\end{array}\right\}. \qquad (1.24)$$

其中向量X取遍范数为1的所有向量的全体。

按照这样定义的范数，它满足式(1.22)条件式和(1.23)条件。并称这种范数为向量的从属范数。

有了上述的预备知识，就可以不加证明地引述从属于向量P范数的矩阵范数如下：

(1) 从属于$P=1$范数：$\|X\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$的矩阵范数$\|A\|_1$为：

$$\|A\|_1=\max_k\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|. \qquad (1.25)$$