

李春葆 编著

数据结构

习题与解析

清华大学出版社



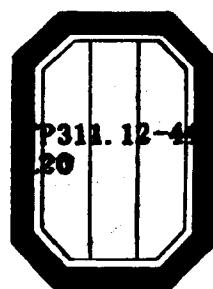
IP311.12-4
120

454402

北京科海培训中心

数据结构习题与解析

李春葆 编著



00454402

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 提 要

本书根据数据结构课程的教学大纲要求,全面讨论了数据结构的基本内容及相关题解。全书共分 13 章,每章先给出内容概述,然后给出该章的习题和题解,习题分为基本题和习题解析两部分,前者由选择题和填空题两种题型组成,直接给出答案;后者对每个习题的解答给出了完整的过程。

本书内容丰富,习题覆盖面广,既收集了较容易的题目,也收集了难度适中和较高难度的题目,如一些高校计算机专业招收硕士研究生的《数据结构》试题。

本书可作为计算机专业本、专科学生的学习参考书,也是报考计算机专业硕士研究生的考生必读参考书,还适用于自学考试的读者和计算机等级(三级或四级)考试者研习。

版权所有,盗版必究。

本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签,无标签者不得进入各书店。

书 名: 数据结构习题与解析

作 者: 李春葆

出版者: 清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

印刷者: 北京门头沟胶印厂

发 行: 新华书店总店北京科技发行所

开 本: 787×1092 1/16 印张: 19.625 字数: 477 千字

版 次: 1999 年 4 月第 1 版 2000 年 2 月第 4 次印刷

印 数: 11001~13000

书 号: ISBN 7-302-03513-x/TP · 1921

定 价: 26.00 元

前　　言

计算机加工处理的对象是数据,而数据具有一定的结构,所以编写计算机程序仅仅掌握计算机语言还不够,还必须掌握数据组织、存储和运算的方法,这便是数据结构课程所学习和研究的内容,它为我们编写计算机程序提供良好的基础,因此数据结构被列为计算机等相关专业最重要的专业基础课程,特别对计算机学科整个起到承前启后的作用。由于数据结构的原理和算法较抽象的特点,使很多同学难以掌握,特别是该课程一般在低年级开设,对于仅仅具有一些计算机语言程序设计知识的初学者,理解和掌握其中的原理就更困难了,在解答数据结构的习题上,往往感到无从下手。为了给他们一些启发,我编写《数据结构习题与解析》一书,其目的是:通过对习题的解答,使学生充分掌握数据结构的原理以及求解数据结构问题的思路与方法,深化对基本概念的理解,提高分析与解决问题的能力。

本书遵循数据结构课程的教学大纲的要求,内容共分 13 章:第 1 章是综述,讨论数据结构的基本概念及相关题解;第 2 章是顺序表,讨论基本顺序表即向量、栈和队列的基本内容及相关题解;第 3 章是链表,讨论各种链表的基本内容及相关题解;第 4 章是串,讨论串的基本内容及相关题解;第 5 章是数组和稀疏矩阵,讨论数组和稀疏矩阵的基本内容及相关题解;第 6 章是广义表,讨论广义表的基本内容及相关题解;第 7 章是递归,讨论基本递归设计方法及相关题解;第 8 章是树形结构,讨论树和二叉树的基本内容及相关题解;第 9 章是图,讨论图的基本内容及相关题解;第 10 章是查找,讨论基本查找方法及相关题解;第 11 章是内排序,讨论基本内排序方法及相关题解;第 12 章是文件,讨论基本文件组织结构及相关题解;第 13 章是外排序,讨论基本外排序方法及相关题解。

每章的内容精选了该章所讨论的数据结构的概念、存储方式和基本运算等。每章的习题分为基本题和习题解析两部分,基本题由选择题和填空题两种题型组成,由于这部分习题是一些基本概念方面的题目,我只给出答案而不直接给出答案详解;习题解析是对每个习题给出求解思路和解答的完整的过程,这部分包含了一些难度较大的习题,也包含一些高校计算机专业招收硕士研究生的数据结构试题,这部分习题前面加有“*”号。

本书习题覆盖面广,既收集了一些较容易的题目,也收集了难度适中和较高难度的题目。因此本书不仅可以作为计算机专业本、专科学生数据结构课程的学习参考书,也是报考计算机专业硕士研究生的考生必读复习书,同时适合于数据结构课程自学者和计算机等级(三级或四级)考试者研习。

在本书编写的过程中,作者力求从方法上提高解题的能力,例如,递归问题是学生较难理解的,但又经常遇到的问题。为此,作者专门编写了递归一章,较深入地分析了递归的执行过程,提出了从递归模型到递归设计的步骤。在其他几章中,也采用了类似解题方法。

本书在编写过程中得到武汉测绘科技大学信息工程学院的大力支持,在此表示衷心感谢。由于习题较多,解答上可能存在不准确或不完整的地方,内容编排上也可能存在不合理之处,敬请广大读者批评指正。

作　　者
1998. 8

目 录

第1章 概述	(1)
1.1 基本概念	(1)
1.1.1 数据结构	(1)
1.1.2 存储方式	(2)
1.1.3 算法及评价	(3)
1.2 基本题	(3)
1.2.1 选择题	(3)
1.2.2 填空题	(5)
1.3 习题解析	(6)
第2章 顺序表	(12)
2.1 基本概念和运算	(12)
2.1.1 向量	(12)
2.1.2 栈	(14)
2.1.3 队列	(15)
2.2 基本题	(17)
2.2.1 选择题	(17)
2.2.2 填空题	(19)
2.3 习题解析	(20)
2.3.1 向量	(20)
2.3.2 栈	(24)
2.3.3 队列	(31)
第3章 链表	(42)
3.1 基本概念和运算	(42)
3.1.1 单链表	(42)
3.1.2 双链表	(46)
3.2 基本题	(50)
3.2.1 选择题	(50)
3.2.2 填空题	(52)
3.3 习题解析	(52)
3.3.1 单链表	(52)
3.3.2 双链表	(70)
第4章 串	(77)
4.1 串的存储及其运算	(77)

4.1.1 顺序存储及其基本运算	(77)
4.1.2 链接存储及其基本运算	(79)
4.2 基本题	(83)
4.2.1 选择题	(83)
4.2.2 填空题	(83)
4.3 习题解析	(84)
第 5 章 数组和稀疏矩阵	(97)
5.1 基本概念和运算	(97)
5.1.1 多维数组	(97)
5.1.2 稀疏矩阵	(98)
5.2 基本题	(103)
5.2.1 选择题	(103)
5.2.2 填空题	(105)
5.3 习题解析	(106)
第 6 章 广义表	(120)
6.1 广义表的表示及其运算	(120)
6.1.1 广义表的表示	(120)
6.1.2 广义表的基本运算	(121)
6.2 基本题	(123)
6.2.1 选择题	(123)
6.2.2 填空题	(124)
6.3 习题解析	(124)
第 7 章 递归	(135)
7.1 递归设计方法	(135)
7.1.1 递归模型	(135)
7.1.2 递归的执行过程	(135)
7.1.3 递归设计	(136)
7.1.4 递归到非递归的转换	(137)
7.2 基本题	(139)
7.2.1 选择题	(139)
7.2.2 填空题	(139)
7.3 习题解析	(142)
第 8 章 树形结构	(162)
8.1 基本概念和运算	(162)
8.1.1 树	(162)
8.1.2 二叉树	(164)
8.1.3 二叉排序树	(169)
8.1.4 树和森林	(171)

8.1.5 Huffman 树	(173)
8.2 基本题	(174)
8.2.1 选择题	(174)
8.2.2 填空题	(178)
8.3 习题解析	(183)
第 9 章 图.....	(218)
9.1 图的存储及其运算	(218)
9.1.1 图的基本术语	(218)
9.1.2 图的存储	(219)
9.1.3 图的基本运算	(220)
9.2 基本题	(228)
9.2.1 选择题	(228)
9.2.2 填空题	(230)
9.3 习题解析	(231)
第 10 章 查找	(242)
10.1 基本查找方法	(242)
10.1.1 顺序查找	(242)
10.1.2 二分查找	(243)
10.1.3 分块查找	(243)
10.1.4 哈希表查找	(245)
10.1.5 背包问题及其求解过程	(247)
10.2 基本题	(250)
10.2.1 选择题	(250)
10.2.2 填空题	(251)
10.3 习题解析	(252)
第 11 章 内排序	(264)
11.1 基本排序方法	(264)
11.1.1 插入排序	(264)
11.1.2 希尔(Shell)排序	(265)
11.1.3 起泡排序	(265)
11.1.4 快速排序	(266)
11.1.5 选择排序	(267)
11.1.6 堆排序	(268)
11.1.7 归并排序	(269)
11.1.8 基数排序	(270)
11.2 基本题	(271)
11.2.1 选择题	(271)
11.2.2 填空题	(273)
11.3 习题解析	(274)

第 12 章 文件	(286)
12.1 基本文件组织方式	(286)
12.1.1 顺序文件	(286)
12.1.2 索引文件	(286)
12.1.3 直接存取文件	(288)
12.1.4 多关键字文件	(288)
12.2 基本题	(288)
12.2.1 选择题	(288)
12.2.2 填空题	(289)
12.3 习题解析	(289)
第 13 章 外排序	(296)
13.1 基本归并排序法	(296)
13.1.1 磁盘文件归并排序	(296)
13.1.2 磁带文件归并排序	(297)
13.2 基本题	(300)
13.2.1 选择题	(300)
13.2.2 填空题	(300)
13.3 习题解析	(300)
参考文献	(305)

第1章 概述

计算机所处理的数据决不是杂乱无章的堆积,而是有着内在的联系,只有分析清楚它们的内在联系,对大量的数据才能进行有效处理。数据结构是一门研究数据组织、存储和运算的一般方法的学科,

本章讨论数据结构的基本概念及相关题解。

1.1 基本概念

数据是信息的载体,它可以在计算机内加以表示并加工处理。结构是指同一数据元素类中的各数据元素之间存在的关系。本节讨论数据结构及算法的相关概念。

1.1.1 数据结构

数据结构是指数据之间的关系。数据结构的三个方面分别是数据的逻辑结构、数据的存储结构和数据的运算。

数据的逻辑结构是对数据之间关系的描述,所以有时就把数据的逻辑结构简称为数据结构。数据的逻辑结构形式上用一个二元组

$$B = (K, R)$$

来表示,其中 K 是结点即数据元素的有穷集合, K 是由有限个结点所构成的集合; R 是 K 上的关系的有穷集合(即 R 是由有限个关系所构成的集合),而每个关系都是从 K 到 K 的关系。设 r 是一个 K 到 K 的关系, $r \in R$,若 $k, k' \in K$,且 $\langle k, k' \rangle \in r$,则称 k' 是 k 的后续, k 是 k' 的前驱,这时 k 和 k' 是相邻的结点(都是相对 r 而言的);如果不存在一个 k' 使 $\langle k', k \rangle \in r$,则称 k 为 r 的终端结点;如果不存在一个 k' 使 $\langle k', k \rangle \in r$,则称 k 为 r 的开始结点;如果 k 既不是终端结点又不是开始结点,则称 k 是内部结点。

数据的存储结构是逻辑结构在计算机存储器中实现的,逻辑结构是从逻辑关系上观察数据,它与数据的存储无关,即独立于计算机,而存储结构是依赖于计算机的。计算机存储器是由有限多个存储单元组成的,每个存储单元有唯一的地址,各存储单元的地址是连续编码的,每个存储单元 Z 都有唯一的后续单元 $Z' = \text{succ}(Z)$, Z 和 Z' 称为相邻单元。一片相邻的存储单元的整体叫做存储区域,记作 M 。把 B 存储在计算机中,首先必须建立一个从 K 的结点到 M 单元的映象 $S: K \rightarrow M$,即对于每一个 $k \in K$,都有唯一的 $Z \in M$ 使得 $S(k) = Z$, Z 为 K 结点所占存储空间中的起始单元。通常有四种基本的存储映象方法,即顺序方法、链接方法、索引方法和散列方法。

数据的运算是指在数据的逻辑结构上定义的操作算法,如检索、插入、删除、更新和排序等。

从逻辑上可把数据结构分为线性结构和非线性结构,在线性结构中有且仅有一个终端

结点和一个开始结点，并且所有结点都最多只有一个前驱结点和后续结点，顺序表就是典型的线性结构。非线性结构中可能有多个终端结点和多个开始结点，并且每个结点可能有多个前驱结点和多个后续结点。非线性结构中最重要的是树形结构和图形结构。

1.1.2 存储方式

1. 线性结构的存储方式

线性结构的数据有顺序、链接、索引和散列等四种存储方式。

顺序存储方式是把逻辑上相邻的结点存储在物理上相邻的存储单元里，结点之间的关系由存储单元的邻接关系来体现。其优点是占用最少的存储空间，缺点是由于只能使用相邻的一整块存储单元，因此可能产生较多的碎片现象。

链接存储方式是将结点所占的存储单元分为两部分，一部分存放结点本身的信息，即为数据项。另一部分存放该结点的后续结点所对应的存储单元的地址，即为指针项。优点是不会出现碎片现象，充分利用所有的存储单元，其缺点是每个结点占用较多的存储空间。

索引存储方式是用结点的索引号来确定结点存储地址，其优点是检索速度快，缺点是增加了附加的索引表，会占用较多的存储空间，另外，在增加和删除数据时由于要修改索引表而花费较多时间。

散列存储方式是根据结点的值确定它的存储地址，其优点是检索、增加和删除结点的操作都很快，其缺点是采用不好的散列函数时可能出现结点存储单元的碰撞，为解决碰撞需要附加的时间和空间开销。

2. 树形结构的存储方式

在树形结构的数据中，除叶子结点外每个结点可能有多个后续结点，因此一般只能采用链接的方式进行存储，链接的方式正好能表达树形结构中的父子和兄弟两种层次关系。由于链接的方式不能表达任意多个后续结点，所以常常使用较规则的树如二叉树，限制后续结点的最多个数。而其他几种存储方式难以达到这种要求。

也可以在特定规则的情况下，采用顺序结构(如一维数组)来存储树形结构。如图 1.1 的一颗二叉树，用以下数组来存储：

1	2	3	4	5	6	7
a	b	c	d	e		f

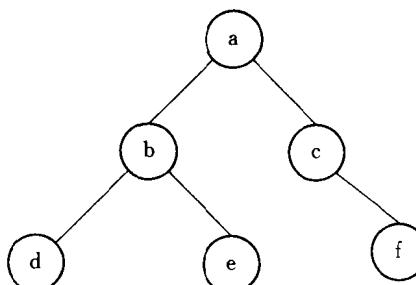


图1.1 一颗二叉树

3. 图形结构的存储方式

在图形结构的数据中,每个结点可能有多个前驱结点和多个后续结点,因此一般只能采用链接的方式进行存储,同样,由于链接的方式不能表达任意多个后续结点,因此,将链接方式改进成邻接表,即图形结构中的每个结点对应有一个链表,该链表存储这个结点的所有相邻结点。

另外还可以采用矩阵存储图形结构,即表示图形结构中任意两个结点之间的关系,这种矩阵称为邻接矩阵。

1.1.3 算法及评价

算法是解决某一特定类型问题的有限运算序列。描述一个算法可以采用某一种计算机语言,也可以采用流程图等。本书的算法是采用类 Pascal 语言描述的。

算法具有五个特性:有穷性、确定性、可行性、输入和输出。

评价一个算法一般从四个方面进行的:正确性、运行时间、占用空间和简单性。

正确性指算法是否正确。运行时间指一个算法在计算机上运行所花费的时间,采用时间复杂度来量度。所谓时间复杂度是指算法中包含简单操作的次数,一般不必要精确计算出算法的时间复杂度,只要大致计算出相应的数量级,如 $O(1)$ 、 $O(\log_2 n)$ 、 $O(n)$ 或 $O(2^n)$ 等。占用空间指在计算机存储器上所占用的存储空间,主要考虑在算法运行过程中临时占用的存储空间的大小,称之为空间复杂度,一般以数量级形式给出。简单性指算法的易读性等。

例如,下面是一个程序段:

```
for i:=1 to (n-1) do
【
    y:=y+1; ①
    for j:=0 to (2*n) do
        x:=x+1; ②
】
```

其中语句①的频度是 $n-1$,语句②的频度是 $(n-1)(2n+1)=2n^2-n-1$ 。则该程序段的时间复杂度 $T(n)=O(n^2+n)=O(n^2)$ 。

1.2 基本题

1.2.1 选择题(每个空只有一个正确答案,将其找出来)

1. 数据结构是一门研究非数值计算的程序设计问题中计算机的①以及它们之间的②和运算的学科。

- ①A. 操作对象 B. 计算方法 C. 逻辑存储 D. 数据映象
- ②A. 结构 B. 关系 C. 运算 D. 算法

答:①A ②B

2. 数据结构被形式地定义为 (K, R) , 其中 K 是①的有限集合, R 是 K 上②的有限集合。

- ①A. 算法 B. 数据元素 C. 数据操作 D. 逻辑结构
②A. 操作 B. 映象 C. 存储 D. 关系

答: ①B ②D

3. 在数据结构中, 从逻辑上可以把数据结构分为①。

- A. 动态结构和静态结构 B. 紧凑结构和非紧凑结构
C. 线性结构和非线性结构 D. 内部结构和外部结构

答: ①C

4. 线性表的顺序存储结构是一种①的存储结构, 线性表的链式存储结构是一种②的存储结构。

- A. 随机存取 B. 顺序存取 C. 索引存取 D. HASH 存取

答: ①A ②B

5. 算法分析的目的是①, 算法分析的两个主要方面是②。

- ① A. 找出数据结构的合理性
B. 研究算法中的输入和输出的关系
C. 分析算法的效率以求改进
D. 分析算法的易懂性和文档性
② A. 空间复杂性和时间复杂性
B. 正确性和简明性
C. 可读性和文档性
D. 数据复杂性和程序复杂性

答: ①C ②A

6. 计算机算法指的是①, 它必具备输入、输出和②等五个特性。

- ① A. 计算方法 B. 排序方法
C. 解决某一问题的有限运算序列 D. 调度方法
② A. 可执行性、可移植性和可扩充性。
B. 可执行性、确定性和有穷性
C. 确定性、有穷性和稳定性
D. 易读性、稳定性和安全性

答: ①C ②B

7. 线性表的逻辑顺序与存储顺序总是一致的, 这种说法①。

- A. 正确 B. 不正确

答: ①B

8. 线性表若采用链表存储结构时, 要求内存中可用存储单元的地址①。

- A. 必须是连续的 B. 部分地址必须是连续的
C. 一定是不连续的 D. 连续不连续都可以

答: ①D

9. 在以下的叙述中,正确的是①。

- A. 线性表的线性存储结构优于链表存储结构
- B. 二维数组是它的每个数据元素为一个线性表的线性表
- C. 栈的操作方式是先进先出
- D. 队列的操作方式是先进后出

答:①B

10. 每种数据结构都具备三个基本运算:插入、删除和查找,这种说法①。

- A. 正确
- B. 不正确

答:①B

1.2.2 填空题(将正确的答案填在相应的空中)

1. 数据逻辑结构包括 ①、②和③三种类型,树形结构和图形结构合称为④。

答:①线性结构 ②树形结构 ③图形结构 ④非线性结构

2. 在线性结构中,开始结点①前驱结点,其余每个结点有且只有②个前驱结点;终端结点③后续结点,其余每个结点有且只有④个后续结点。

答:①没有 ②1 ③没有 ④1

3. 在树形结构中,树根结点没有①结点,其余每个结点有且只有②个前驱结点;叶子结点没有③结点,其余每个结点的后续结点可以④。

答:①前驱 ②1 ③后续 ④任意多个

4. 在图形结构中,每个结点的前驱结点数和后续结点数可以①。

答:①任意多个

5. 算法的五个重要特性是①、②、③、④、⑤。

答:①有穷性 ②确定性 ③可行性 ④输入 ⑤输出

6. 下面程序段的时间复杂度是①。

```
for i:=1 to n do
    for j:=1 to m do
        A[i,j]:=0;
```

答:①O(m * n)

7. 下面程序段的时间复杂度是①。

```
i:=0;s:=0;
while (s<n) do
【
    i:=i+1;s:=s+i;
】
```

答:①O(\sqrt{n})

8. 下面程序段的时间复杂度是①。

```

s:=0;
for i:=1 to n do
  for j:=1 to n do
    s:=s+B[i,j];
sum:=s;

```

答:①O(n²)

1.3 习题解析

1. 设有数据逻辑结构为:

$$B = (K, R)$$

$$K = \{k_1, k_2, \dots, k_9\}$$

$$R = \{(k_1, k_3), (k_1, k_8), (k_2, k_3), (k_2, k_4), (k_2, k_5), (k_3, k_9), (k_5, k_6), (k_8, k_9), (k_9, k_7), (k_4, k_7), (k_4, k_6)\}$$

画出这个逻辑结构的图示,并确定相对于关系 R,哪些结点是开始结点,哪些结点是终端结点?

解:该题的逻辑结构图示如图 1.2 所示。

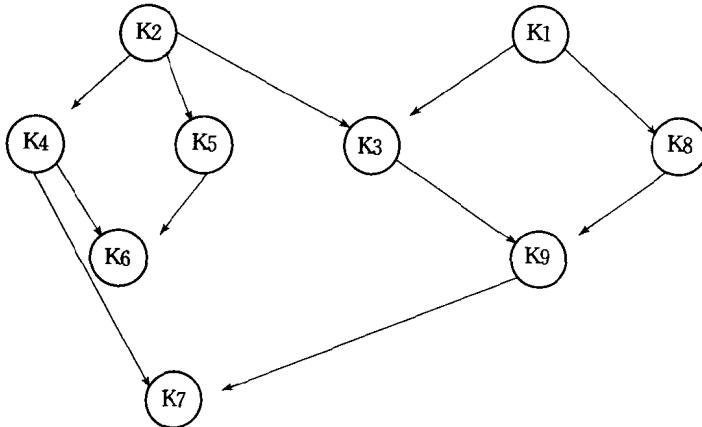


图 1.2 一个逻辑结构图示

开始结点是指无前驱的结点,这里满足该定义的开始结点为 k₁,k₂。

终端结点是指无后续的结点,这里满足该定义的终端结点为 k₆,k₇。

该逻辑结构是非线性结构中的图形结构。

2. 设有如图 1.3 所示的逻辑结构图,给出它的逻辑结构,并说出它是什么类型的逻辑结构。

解:本题的逻辑结构如下:

$$B = (K, R)$$

$$K = \{k_1, k_2, \dots, k_9\}$$

$$R = \{(k_1, k_2), (k_1, k_3), (k_3, k_4), (k_3, k_6), (k_4, k_6), (k_6, k_8), (k_6, k_7), (k_8, k_9)\}$$

该逻辑结构是一个树形结构,其树根结点为 k1,叶子结点为 k2、k5、k7 和 k9。

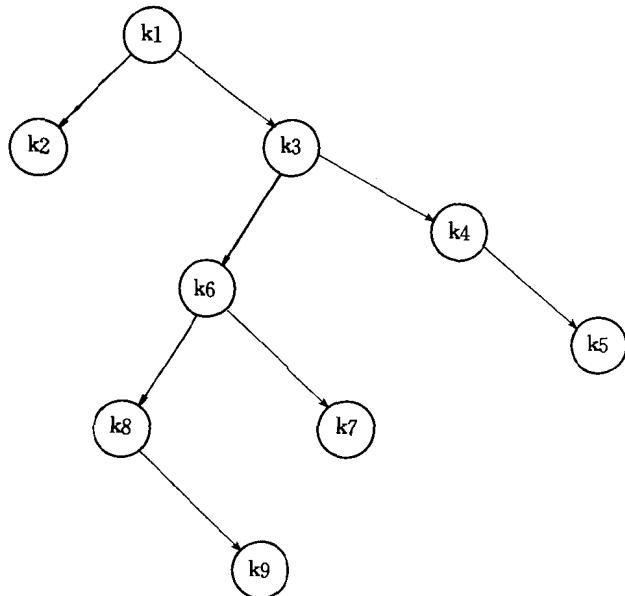


图1.3 一个逻辑结构图

3. 有下列几种用二元组表示的数据结构,画出它们分别对应的图形表示,并指出它们分别属于何种结构。

(1) A=(K,R),其中:

$$K = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$R = \{r\}$$

$$r = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, f \rangle, \langle f, g \rangle, \langle g, h \rangle\}$$

(2) B=(K,R),其中:

$$K = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$R = \{r\}$$

$$r = \{\langle d, b \rangle, \langle d, g \rangle, \langle d, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle g, e \rangle, \langle g, h \rangle, \langle e, f \rangle\}$$

(3) C=(K,R),其中:

$$K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$R = \{r\}$$

$$r = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}$$

这里的圆括号对表示两结点是双向的。

(4) D=(K,R),其中:

$$K = \{48, 25, 64, 57, 82, 36, 75\}$$

$$R = \{r1, r2\}$$

$$r1 = \{\langle 25, 36 \rangle, \langle 36, 48 \rangle, \langle 48, 57 \rangle, \langle 57, 64 \rangle, \langle 64, 75 \rangle, \langle 75, 82 \rangle\}$$

$$r2 = \{\langle 48, 25 \rangle, \langle 48, 64 \rangle, \langle 64, 57 \rangle, \langle 64, 82 \rangle, \langle 25, 36 \rangle, \langle 82, 75 \rangle\}$$

解:

(1) A 对应的逻辑图如图 1.4 所示,它是一种线性结构。

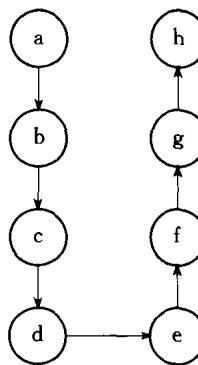


图1.4 对应A的逻辑结构图

(2) B 对应的逻辑图如图 1.5 所示, 它是一种树形结构。

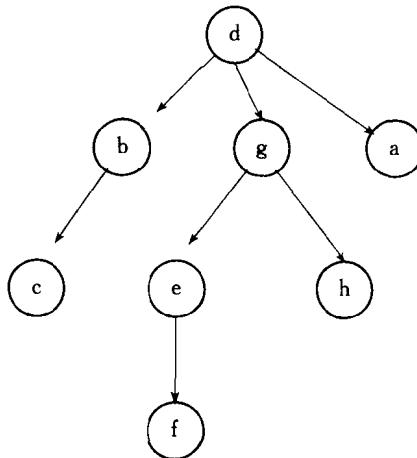


图1.5 对应B的逻辑结构图

(3) C 对应的逻辑图如图 1.6 所示, 它是一种图形结构。

(4) D 对应的逻辑图如图 1.7 所示, 它是一种图形结构, r1(对应图中虚线)为线性结构, r2(对应图中实线)则为树形结构。

4. 有如下递归函数 fact(n), 分析其时间复杂度。

```

FUNCTION fact(N:integer):integer;
BEGIN
    if (n<=1) then fact:=1           ①
    else fact:=n * fact(n-1);        ②
END;

```

解: 设 $\text{fact}(n)$ 的运行时间函数是 $T(n)$ 。该函数中语句①的运行时间是 $O(1)$, 语句②的运行时间是 $T(n-1)+O(1)$ (* 运算的开销)。

因此:

$$\begin{aligned} T(n) &= O(1) & n \leq 1 \\ &= T(n-1) + O(1) & n > 1 \end{aligned}$$

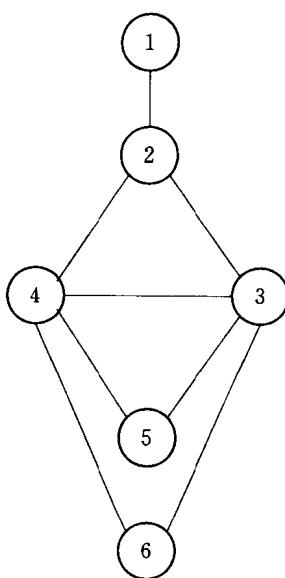


图1.6 对应C的逻辑结构图

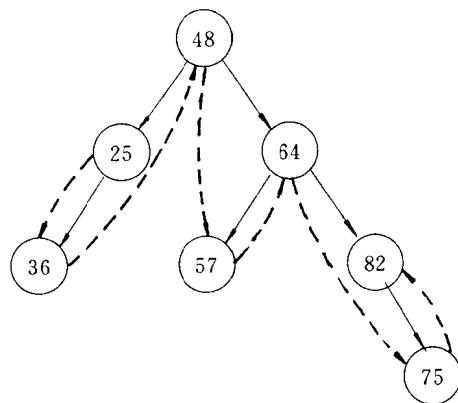


图1.7 对应D的逻辑结构图

$$\begin{aligned}\text{则: } T(n) &= O(1) + T(n-1) \\&= 2 * O(1) + T(n-2) \\&\dots \\&= (n-1) * O(1) + T(1)\end{aligned}$$