

自动化技术应用丛书

根轨迹法及其在 自动控制中的应用

周立峰 著

四川科学技术出版社

73.822

351

自动化技术应用丛书之六

根 轨 迹 法 及 其 在 自 动 控 制 中 的 应 用

周 立 峰 著

四川科学技术出版社

一九八五年·成都

DL10/03
责任编辑：崔泽海

封面设计：魏天禄

根轨迹法及其在
自动控制中的应用

周立峰著

四川科学技术出版社出版 (成都盐道街二号)

新华书店重庆发行所发行
重庆印制一厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张11 字数234千
1985年5月第1版 1985年5月第1次印刷

印数：1—4,170册

书号：15298·57 定价：2.30元

内 容 提 要

根轨迹法是控制系统分析与综合的主要方法之一。本书系统而全面地介绍了根轨迹法及其在控制系统分析与设计中的应用,内容包括系统根轨迹图的绘制,典型系统的根轨迹,计算机辅助根轨迹法,以及多变量系统的根轨迹。

本书可供自动控制、工业自动化等领域的科技工作者以及相应专业的大专院校师生参考。

前 言

自1948年W.R.Evans提出根轨迹法以来,根轨迹法本身获得了巨大的进展,它在线性定常系统与线性时变系统的分析与综合、反馈系统设计、调节器的参数整定等方面,都获得了极为广泛的应用。特别是在估算系统的时间响应特性,系统的稳定性分析、按给定性能指标设计系统的校正网络等方面,根轨迹法都具有极大的意义。

最初,Evans发现了一种求解系统特征方程的图解方法,简捷而有效地以图解方式给出了当系统某一参数变化时,系统特征方程的根在复平面上的变化轨迹。这就是根轨迹法的本原。由于众多学者的工作,建立了一整套图解根轨迹法的基本规则。由于苏联学者Бендриков等人的工作,又建立了根轨迹的解析法。

进入六十年代之后,由于电子计算机的广泛应用,又导致多种计算机辅助根轨迹法的出现,从而使根轨迹图的绘制更为迅速与精确,参数选择更趋准确与合理。七十年代以来,由于多变量系统理论的兴起以及多变量系统设计的需要,经典根轨迹法又被推广到多变量系统领域中,这主要归功于所谓新经典学派的英国学者MacFarlane, Kouvaritakis和Owens等人的工作。这一工作目前仍在发展之中,并不断获得新的成果。

从本质上讲，根轨迹法是研究系统参数的变化对系统极、零点位置的影响，因而，系统的根轨迹图揭示了系统的参数与系统性能之间的关系。这样，根轨迹法就在系统的分析与综合中具有十分重要的意义。的确如此，在西方，根轨迹法是作为一种十分重要的系统设计方法而应用的。其次，由于根轨迹图明确建立了系统参数变化与系统性能之间的联系，因而，无论对于系统灵敏度或抗干扰能力的研究，或者是对于自适应系统特性的研究，它都是一种恰当的方法。再者，由于系统极、零点与系统时域性能指标之间的联系，因而，根轨迹法除了获得系统时间响应的信息之外，它也是获得系统频率响应信息的有力工具。这是任何其它时域法或频域法所无法比拟的。

尽管根轨迹法具有如此重要的优越性，也尽管它在西方获得了极为广泛的应用，但由于种种原因，根轨迹法的研究与应用在我国却始终没有蓬勃开展起来，甚至几十年来连一本专著也未曾出版过。有鉴于此，笔者编著了这样一本书，以奉献给自动化科技领域中的同行们。

本书着眼于根轨迹法在控制系统分析与综合中的应用，因而，较多考虑的是它的实用性。在数学处理上尽量避免繁冗的推导，也不追求数学上的严格性与严密性。在内容安排上，尽量顾及各方面的要求，既考虑随动系统，也考虑过程控制系统；既主要讨论单变量系统，也以一定篇幅讨论多变量系统。

第一章叙述控制系统的基本概念。主要讨论系统的性能指标以及它们与系统极、零点之间的关系，以为讨论其后各章内容提供一个初步基础。

第二章讨论控制系统根轨迹的特性以及根轨迹的图解法、解析法等，最后讨论了几类典型系统的根轨迹图。

第三章讨论计算机辅助根轨迹法，主要介绍两种算法简单、精度较高的分支跟踪法。

第四章为本书的另一重要部分，专门讨论利用根轨迹法进行系统的分析与综合。

第五章讨论多变量系统的根轨迹。由于多变量根轨迹法正处于发展之中，但许多问题尚未完全解决，因此，本章只从最一般的情况讨论多变量系统的根轨迹及其综合，并且尝试与经典根轨迹联系起来。

本书在编写过程中，笔者始终得到重庆大学周其鉴教授上海交通大学张钟俊教授、长沙铁道学院张啓人教授、成都电讯工程学院张世钧副教授等的帮助和支持，在此一并致谢！

由于作者学识浅薄，错误与疏漏之处恐难避免，诚望读者批评指正。

笔 者

1981年9月

目 录

前 言

第一章 控制系统概述	1
§ 1.1 概述	1
§ 1.2 传递函数与特征方程	4
§ 1.3 反馈控制系统的性能指标	10
§ 1.4 二阶系统	23
§ 1.5 零点对系统性能的影响	44
§ 1.6 高阶系统及其主导极点	52
第二章 控制系统的根轨迹	57
§ 2.1 概述	57
§ 2.2 系统的根轨迹图	58
§ 2.3 根轨迹的特性	70
§ 2.4 图解法	84
§ 2.5 解析法	116
§ 2.6 几类系统的根轨迹图	163
§ 2.7 离散系统的根轨迹	178
第三章 计算机辅助根轨迹法	182
§ 3.1 概述	182
§ 3.2 直接法	185
§ 3.3 分支跟踪法 (一)	188
§ 3.4 分支跟踪法 (二)	201
第四章 控制系统的根轨迹法分析与综合	207

§ 4.1	系统性能的根轨迹法分析	208
§ 4.2	系统综合概述	223
§ 4.3	超前校正网络的设计	228
§ 4.4	滞后校正网络的设计	248
§ 4.5	滞后—超前校正网络的设计	257
§ 4.6	零、极点对消	267
第五章	多变量系统的根轨迹	275
§ 5.1	引言	275
§ 5.2	系统的内部描述与外部描述	277
§ 5.3	多变量系统的传递函数矩阵	290
§ 5.4	多变量系统的极点和零点	297
§ 5.5	多变量系统的根轨迹	309

参考文献

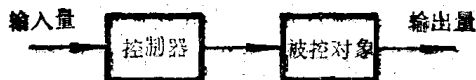
附录 I 根轨迹图例

附录 II 分支跟踪法源程序

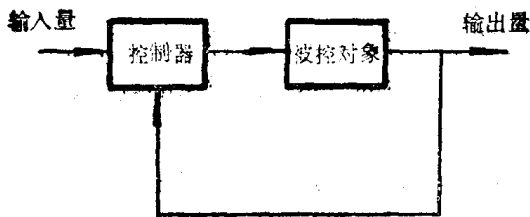
第一章 控制系统概述

§ 1.1 概述

一个控制系统可以定义为由控制器和被控对象（或者在被控对象中所进行着的过程）所组成的，具有自动控制作用或自动调节作用的一个整体。一般而言，人们往往把开环系统作为具有控制作用的系统（图1.1a），而带有反馈通路的闭环系统（图1.1b），是既具有控制作用（例如，程序控制系统），又具有自动调节作用（例如，恒值调节系统）的系统。



(a)



(b)

图 1.1

对开环系统而言，系统本身并不具有自动调节的作用。

8610378

： 1 ：

在没有干扰作用存在的情况下，系统输出量完全受输入量（指令或控制信号）的控制；在存在干扰作用时，例如，被控对象受到外界扰动的作用，或者受到控制器内部噪声扰动的影响时，系统的输出量将偏离指令信号所确定的期望值，这就表现为系统的偏差或误差。而系统本身不可能对这种偏差或误差产生校正作用。

另一种情况是当输入量呈随机变化时，输出量受输入量的控制而紧紧追随输入量的变化。这就是闭环系统的控制作用。各种类型的位置控制系统、速度控制系统等同步系统，均属于这种情况。

在实际的闭环系统中，被控对象一般是一台或几台设备，或者是一种运行中的过程。从控制系统设计的角度来看，可以认为它是固定的，是具有一定特性的。而控制器则是由若干部件所组成的，通常它包括检测偏差的检测装置、信号变换与放大部件、执行部件，以及用于改善系统性能的

REF ID: A66132

补偿装置。这样，一个闭环控制系统也可表示成图1.2(a)所示的方框图，其中检测装置从控制器中独立出来，作为输入信号与反馈信号之间的比较装置。图中， $r(t)$ 为输入量， $c(t)$ 为输出量。这种将系统的输出量直接与输入量进行比较而实现反馈作用的系统称为直接反馈系统或单位反馈系统。但在实际的系统中，考虑到需要调整反馈信号的强度，而且反馈信号与输入量的量纲需要统一等原因，往往在反馈通路中尚需增加一个反馈环节（图1.2(b)），图中 $b(t)$ 即为反馈信号。

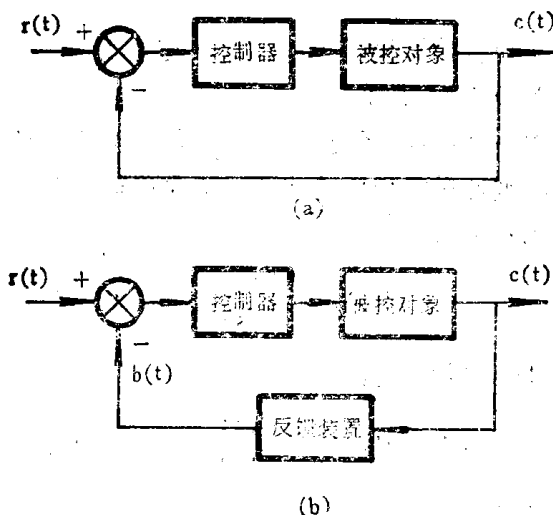


图 1.2

控制系统设计的任务就在于在已知被控对象的特性的基础上，进行控制器各部件的选择与设计，以达到对控制系统性能指标所提出的各项要求。

必须指出，本书仅对线性系统（包括时变和时不变系

统) 进行分析与设计, 亦即我们认为系统中各元件的特性是线性的, 或者它们工作于特性的线性范围内, 或者满足于线性化的条件。

§ 1.2 传递函数与特征方程

在线性系统的分析中, 广泛采用传递函数的概念。系统的传递函数定义为初始条件为零时, 系统输出量的拉普拉斯变换式 $C(s)$ 与输入量的拉普拉斯变换式 $R(s)$ 的比值, 即

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} \quad (1.1)$$

因此, 它是拉普拉斯算子 S 的函数, 在这里, S 是一个复变量, $T(s)$ 是复变量函数。

对于图1-3所示的系统, $G_c(s)$, $G_p(s)$ 和 $H(s)$ 分别表示控制器, 被控对象和反馈装置的传递函数, 此时, 系统的前向传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = G_c(s) \cdot G_p(s) \quad (1.2)$$

系统的开环传递函数为:

$$G(s)H(s) = \frac{B(s)}{E(s)} = G_c(s)G_p(s)H(s) \quad (1.3)$$

系统的闭环传递函数为:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (1.4)$$

其中, $G(s)$ 为由式(1.2)所定义的前向通道传递函数。

对于单位反馈系统, $H(s)=1$, 则系统的闭环传递函数为:

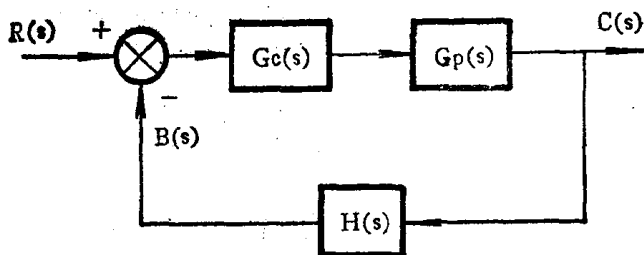


图 1.3

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (1.5)$$

从而可知, $T(s)$ 为复变量 s 的分式多项式。对于任何实际上可实现的系统, 分母多项式的次数总是高于分子多项式的次数。而且, 对于不含有时间延迟环节的线性系统, $T(s)$ 为 s 的有理分式多项式。

对于线性系统, 它的开环传递函数 $G(s)$ 和闭环传递函数 $T(s)$ 一般皆为复变量 s 的单值函数, 即复平面 s 平面内的一个点 $(\sigma + j\omega)$ 与 $G(s)$ 平面和 $T(s)$ 平面内的一个点有简单的一一对应的关系, 如图 1.4 所示。

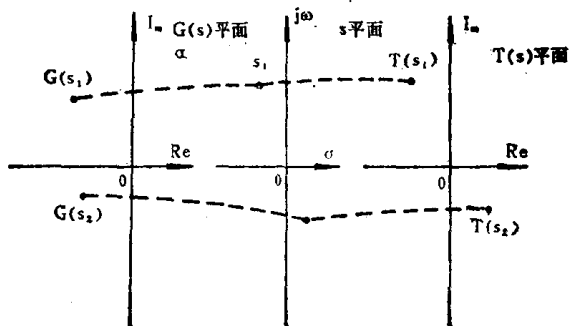


图 1.4

在S平面内，使 $G(s)$ ， $T(s)$ 为解析的点，称为普通点。

例如，对于

$$T(s) = \frac{16(S+5)}{(S+2)(S^2+2S+2)}$$

$$= \frac{16(S+5)}{(S+2)(S+1+j1)(S+1-j1)} \quad (1.6)$$

除去S平面内的点 $S_1=-2$ 、 $S_2=-1-j1$ 和 $S_3=-1+j1$ 之外，其余任何点皆为普通点。

S平面内使复函数 $G(s)$ 和 $T(s)$ 变为非解析的点，称为 $G(s)$ 和 $T(s)$ 的奇点。特别是，在奇点处， $G(s)$ 和 $T(s)$ ，或者它们的导数变为无穷大时，则此奇点称为 $G(s)$ 、 $T(s)$ 或者它们的导数的极点。在式(1.6)中，点 $S_1=-2$ 、 $S_2=-1-j1$ 和 $S_3=-1+j1$ 即为 $T(s)$ 的三个极点。

如果在S平面内，某个点使得复变函数 $G(s)$ 和 $T(s)$ 等于零，则该点就分别称为 $G(s)$ 和 $T(s)$ 的零点。在式(1.6)中，点 $S=-5$ 即为 $T(s)$ 的零点。在第二章中，将要看到，除去有限值的零点外，如果把无穷远处的零点也包括在的话，则任何一个控制系统的传递函数 $G(s)$ 和 $T(s)$ 的零点与它们的极点数相同。例如，对式(1.6)所表示的闭环系统的传递函数，它具有如上所述的三个极点和一个有限零点， $S=-5$ ，另外，它尚有两个处于无限远处的零点 $S_{2,3} \rightarrow \infty$ (或 $-\infty$)。因为

$$\lim_{S \rightarrow \infty} T(s) = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{16}{S^2} = 0$$

按照零点的定义可知， $T(s)$ 具有处于无限远处的两个零点。

所以， $T(s)$ 具有三个极点和三个零点。但必须指出，对于任

何可实现的系统，它不可能具有在无限远处的极点。

我们从闭环传递函数的表达式，

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

可以看出，满足方程

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (1.7)$$

的 S 值，即为系统闭环传递函数 $T(s)$ 的极点。因此，将式(1.7)称为系统的特征方程。由此可知，特征方程(1.7)的根即为系统闭环传递函数的极点，或者简称为闭环极点或系统的极点。当方程(1.7)无重根时，则系统的极点皆为简单极点。而当方程(1.7)具有重根时，例如，

$$T(s) = \frac{K(S+Z)}{(S+p_1)^2(S+p_2)}$$

则 $T(s)$ 在 $S = -p_1$ 有一个二阶极点，而在 $S = -p_2$ 有一个简单极点。

必须指出，由于我们所讨论的系统为线性定常系统，即特征方程中复变量 S 及其各次幂的系数皆为实常数，因而从代数学的基本理论可知，特征方程的根，亦即系统的极点，要么为实数，要么为共轭复数。

可以将系统闭环传递函数

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

的分子与分母进行因式分解，从而表示成如下形式：

$$T(s) = \frac{K(S+z_1)(S+z_2)\cdots(S+z_m)}{(S+p_1)(S+p_2)\cdots(S+p_n)}, m \leq n \quad (1.8)$$

如果特征方程

$$(S+p_1)(S+p_2)\cdots(S+p_n)=0$$

的所有实根均不相等，而复根也是不相等的共轭复根，且考虑到一对共轭复根就构成一个 S 的二次式，所以，式(1.8)可表示成：

$$T(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (S+z_j)}{\prod_{i=1}^r (S+p_i) \prod_{k=1}^q (S^2+2\zeta_k\omega_k S+\omega_k^2)} \quad (1.9)$$

式中，

$$r+2q=n$$

现在来看一下系统的响应与系统闭环极点在 S 平面上的位置之间的关系。

假定系统的输入信号为单位阶跃信号，即

$$R(s) = \frac{1}{S}$$

则有

$$C(S) = T(s) \cdot R(s)$$

$$= \frac{1}{S} \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (S+z_j)}{\prod_{i=1}^r (S+p_i) \prod_{k=1}^q [S^2+2\alpha_k S + (\alpha_k^2+\omega_k^2)]}$$

(1.10)

将式(1.10)进行部分分式展开，可得：