

罗明安 主编

运筹学

Y U N C H O U X U E



经济管理出版社

C22
L4

北京商学院院编教材

运 筹 学

罗明安 主 编

经济 管 理 出 版 社

责任编辑 贾晓建

版式设计 王宇航

责任校对 贾全慧

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/罗明安主编. —北京:经济管理出版社,1999.1
ISBN 7-80118-733-4

I. 运… II. 罗… III. 运筹学 IV. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 35542 号

运 筹 学

罗明安 主编

出版:经济管理出版社

(北京市新街口六条红园胡同 8 号 邮编:100035)

发行:经济管理出版社总发行 全国各地新华书店经销

印刷:北京国马印刷厂

850×1168 毫米 1/32 11 印张 280 千字

1999 年 1 月第 1 版 1999 年 1 月北京第 1 次印刷

印数:1—6000 册

ISBN 7-80118-733-4/F·696

定价:16.80 元

· 版权所有 翻印必究 ·

(凡购本社图书,如有印装错误,由本社发行部负责调换。

地址:北京阜外月坛北小街 2 号 邮编:100836)

出版说明

为加强我院教材建设,提高教学质量,促进学科与专业发展,满足学院教学及社会需要,我院教材委员会自 1993 年起,有计划、有步骤地陆续组织编写出版了北京商学院院编教材。院编教材实行主编负责制和专家审定制。

《运筹学》教材由我院罗明安副教授主编,参加编写的有李晋明(第一章)、罗明安(第二、三、四、七章)、李朝阳(第五、六、九章)、贺新瑜(第八章)。

该教材在编写过程中得到了有关专家和学者的大力支持,在此一并致谢。教材内容中如有缺点疏漏之处,敬请各界专家、读者予以指正,以便进一步修订完善。

北京商学院教材委员会

1998 年 11 月

目 录

绪论	(1)
第一章 单纯形方法	(5)
§ 1.1 线性规划问题.....	(6)
§ 1.2 线性规划问题的数学模型.....	(8)
一、合理下料问题.....	(8)
二、运输问题.....	(10)
三、生产的组织与计划问题.....	(13)
四、投资问题.....	(15)
§ 1.3 线性规划问题解的概念.....	(22)
一、两变量线性规划问题的图解法.....	(22)
二、线性规划问题解的概念.....	(28)
三、线性规划问题解的性质.....	(31)
§ 1.4 单纯形方法.....	(39)
一、消去法.....	(39)
二、已知初始可行基求最优解.....	(43)
三、无初始可行基求最优解.....	(60)
习题一	(74)
第二章 对偶线性规划问题	(85)
§ 2.1 线性规划的对偶理论.....	(85)
一、对偶问题的提出.....	(85)
二、线性规划的对偶关系.....	(87)
三、对偶问题的基本定理.....	(90)
§ 2.2 对偶单纯形方法.....	(93)

§ 2.3 灵敏度分析	(101)
一、目标函数的系数的灵敏度分析	(101)
二、约束条件的常数项的灵敏度分析	(106)
三、添加新变量时的灵敏度分析	(108)
四、添加新的约束条件的灵敏度分析	(110)
§ 2.4 影子价格	(112)
习题二	(113)
第三章 多目标规划	(119)
§ 3.1 多目标规划问题	(119)
一、多目标规划问题的提出	(119)
二、多目标优先级	(122)
§ 3.2 多目标规划问题的数学模型	(124)
一、多目标的处理	(124)
二、约束方程的处理	(124)
三、多目标的综合	(124)
§ 3.3 多目标规划问题的求解	(127)
一、多目标规划问题的图解法	(127)
二、多目标规划的单纯形方法求解	(132)
习题三	(136)
第四章 运输问题	(142)
§ 4.1 运输问题	(142)
一、运输问题的提出	(142)
二、运输问题解的结构	(143)
§ 4.2 运输问题求解	(144)
一、确定初始方案	(144)
二、求得最优方案	(146)
§ 4.3 非平衡调运及其他问题	(155)
习题四	(164)
第五章 对策论	(169)

§ 5.1 矩阵对策的基本概念·····	(169)
§ 5.2 矩阵对策的解法·····	(179)
一、 $m \times n$ 矩阵对策的线性规划解法 ·····	(179)
二、 2×2 矩阵对策的公式解法 ·····	(180)
三、 $2 \times n$ 和 $m \times 2$ 矩阵对策的图解法 ·····	(183)
§ 5.3 两人非零和对策和多人对策简介·····	(187)
习题五 ·····	(190)
第六章 动态规划 ·····	(192)
§ 6.1 动态规划基本原理·····	(192)
一、动态规划问题的提出·····	(192)
二、动态规划基本原理·····	(193)
§ 6.2 应用举例·····	(198)
§ 6.3 动态规划与线性及非线性规划的关系·····	(211)
§ 6.4 案例分析·····	(213)
习题六 ·····	(215)
第七章 决策论 ·····	(217)
§ 7.1 决策系统·····	(217)
一、决策问题的提出·····	(217)
二、决策系统·····	(221)
三、决策分类·····	(222)
§ 7.2 确定型决策·····	(223)
一、确定型决策·····	(223)
二、确定型决策方法·····	(223)
§ 7.3 不确定型决策·····	(228)
一、不确定型决策·····	(228)
二、不确定型决策准则·····	(229)
§ 7.4 风险型决策·····	(235)
一、风险型决策·····	(235)
二、期望值原则·····	(236)

三、决策树法·····	(243)
§ 7.5 贝叶斯决策·····	(247)
一、问题的提出·····	(247)
二、贝叶斯决策·····	(248)
三、情报价值·····	(251)
§ 7.6 案例分析·····	(254)
习题七 ·····	(257)
第八章 图与网络 ·····	(263)
§ 8.1 图的基本概念·····	(264)
一、图的基本概念·····	(264)
二、图的矩阵表示·····	(268)
§ 8.2 最优树问题·····	(270)
§ 8.3 最短路问题·····	(278)
一、最短路的标号算法·····	(279)
二、最短路的矩阵算法·····	(283)
§ 8.4 中国邮递员问题·····	(286)
一、一笔画问题·····	(286)
二、中国邮递员问题·····	(288)
§ 8.5 案例分析·····	(290)
一、背景·····	(291)
二、模型与方法·····	(291)
三、结果分析·····	(293)
习题八 ·····	(296)
第九章 存贮论 ·····	(301)
§ 9.1 存贮论的基本概念·····	(301)
§ 9.2 确定型存贮模型·····	(303)
模型一 瞬时补充,不允许缺货·····	(303)
模型二 瞬时补充,允许缺货·····	(305)
模型三 定量折扣,瞬时补充,不允许缺货 ·····	(308)

模型四 多时期,可变需求.....	(310)
§ 9.3 其他模型简介及应用模型举例.....	(314)
习题九	(317)
习题答案	(319)

绪 论

从全社会的利益出发,最有效地利用各种资源(包括自然资源、劳动力资源和积累的社会财富),提高资源的利用效率,选取利用资源的最优方式是当今经济工作研究的重要任务。

在工业、农业、商业、交通运输、工程设计以及国防建设中,人们经常遇到一些要求对现有资源、设备进行统一分配、全面安排、合理调度或最优设计等问题。如何从众多的以不同方式分配和利用资源的可能方案之中,选取出最经济、最合理的一个可行方案,从而进行最优决策。处理这类问题的方法就逐步发展成为一门新的学科——运筹学。

一门新兴的应用科学,由于它所研究的对象极其广泛,有着许多不同的定义。如美国人定义“运筹学是研究用科学方法来决定在资源不充分的情况下如何最好地设计人——机系统,并使之最好地运行的一门学科”。德国人定义“运筹学是从事决策模型的数字解法的一门学科”。前者着重于处理实际问题,而对科学方法则未加说明;后者则强调数字解,注重数学方法。

英国人认为“运筹学是运用科学方法(特别是数学方法)来解决那些在工业、商业、政府部门、国防部门中有关人力、机器、物资、金钱等的大型系统的指挥和管理方面所出现的问题,其目的是帮助管理者科学地决定其策略和行动”。还有些人则认为“运筹学是近代应用数学的一个分支,主要是将生产、管理等实际中出现的一些带普遍性的决策问题加以提炼,然后利用数学方法去解决”。前者提供了模型,后者提供了理论和方法。前者是后者发展的基础,而后者则是前者进行工作的科学依据。其实,运筹学就是这两者有

机结合而成的。

运筹学是二十世纪三十年代末至四十年代初开始形成的一门新兴学科。英文 operations research (运筹学) 一词的原意是作战研究。在 1938 年英国空军就有了飞机定位和控制系统,并在沿海有几个雷达站,可以用来发现敌机。但在一次空防大演习中发现,由这些雷达送来的(常常是相互矛盾的)信息,需要加以协调和关联,以改进作战效能。这一任务的提出即产生“运筹学”一词。在第二次世界大战中,运筹学工作者研究并解决了许多战争的课题。例如,通过适当配备护航舰队减少了船只受到潜艇攻击的损失;通过改进深水炸弹投放的深度,使德国潜艇的死亡率提高;以及根据飞机出动架次作出维修安排,提高了飞机的作战效率等等。

运筹学作为一门用来解决实际问题的学科,在处理千差万别的各种实际问题中,一般应从以下几方面考虑。

1. 确定目标

首先必须弄清所提的任务想达到的目的。通常还必须弄清或预测随着时间的推移决策者的认识和管理人员的水平是否会使所提目标发生变化,如何变化。

2. 制定方案

订出几个大的步骤和完成各步骤的时间。一般说来,任务都是有时间性的,用于该任务的人力、物力、财力都是有限的。没有比较切实的方案就难以完成任务。

3. 建立模型

对于一个大型的复杂问题,首先要考虑是否将它分为若干小型的能独立进行的活动,以及在它们当中如何分配人力、物力、财力和对它们工作的具体要求,还要规定这些活动必须完成的时间。当问题完全明确后,就要收集有关的数据和确定问题所涉及的各种因素,弄清其中哪些是给定的,哪些是可以改变的(即变量),哪些是可以控制的,哪些是不确定的,并设法建立这些因素之间应满足的各种关系,以及建立一种准则来衡量所作出的决策的效果。对

于那些不可控制的因素要注意收集有关的数据或有经验人士的看法。

4. 确定解法

在模型已初步确定之后,就要考虑解法:是采用模拟,还是采用理论演算方法;假若有随机因素,应如何对待;有无现成方法可供利用;需要做出什么样的假设才能创造新方法或使利用现成方法为可行的,问题本身要求的精度如何,等等。

虽然不大可能存在处理那些极其广泛的运筹学问题的统一途径,但是在运筹学的发展过程中形成的某些抽象模型却可以得出一些算法和结论,并用于实际之中。例如,城市的公共汽车问题,在公共汽车站候车的人时多时少,汽车公司究竟应派出多少辆汽车,如何派法,才能做到既使汽车公司增加收入,又使乘客比较满意。这一问题,与一个百货商店应有多少售货员和一个工厂应有多少维修人员的问题甚为相似。它们都是存在着某种带有随机性的排队现象,从而可以形成具有普遍性的排队模型。对排队模型的研究形成了运筹学的分支学科排队论。

运筹学有许多分支学科。一个大型复杂的运筹学问题不一定仅属于某一分支,它往往可以分解为许多子问题,每一子问题则属于某一分支。

运筹学包含有以下一些分支:数学规划;图论、网络流;决策分析;排队论、可靠性数学理论;库存论;对策论;搜索论;计算机模拟等。

运筹学在二十世纪四十年代以后得到迅速发展,其原因大致有以下几个方面:(1)大规模的新兴工业的出现,同行业的竞争加剧,迫切需要对大型工业的复杂的生产结构和管理关系进行研究,作出科学的分析和设计;(2)产品的更新换代的加速,使得生产者必须密切注意市场情况和消费者的心理分析;(3)电子计算机的出现,一些复杂的问题能得到及时解决而使运筹学具有现实意义。总之,运筹学的每一分支学科的产生,都具有鲜明的实际背景。

运筹学发展到今天,已有广阔的应用领域,它已渗透到诸如服务、库存、搜索、人口、对抗、控制、时间表、资源分配、厂址定位、能源、设计、生产、可靠性、设备维修和更换、检验、决策、规划、管理、行政、组织、信息处理及回复、投资、交通、市场分析、区域规划、预测、教育、医疗卫生等各个方面。

第一章 单纯形方法

线性规划(Linear programming)是数学规划中理论成熟,方法有效,应用最广泛的一个分支。它研究满足一组线性的等式或不等式约束条件,对一定的线性目标函数进行最优化处理的问题。

线性规划最早的工作始于二十世纪三十年代。1939年前苏联数学家Л·Б·康托罗维奇发表的名为《生产组织与计划中的数学方法》的小册子,首先提出了线性规划模型,这是有关线性规划的最早文献。在这以后,美国也开始研究这个问题,早期最有影响的是F·L·希契科克研究的运输问题及其解。由于问题的计算方法没能得到解决,他们的工作都没有受到同行们的关注。后来由于战争的需要,军事中有关规划、计划、侦察、后勤、生产等各方面的问題都陆续地被提出来,系统地研究线性规划的解法与应用便被提到日程上来了。1947年,美国人G·B·丹齐克及美国空军的SCOOP研究小组(Scientific Computation of Optimum programs)提出了单纯形算法,使得线性规划问题能在计算机上得到有效的解决,从而奠定了数学规划作为一门学科的基石。直到现在,单纯形方法仍然是这门学科中的有力工具。

从二十世纪五十年代起,线性规划的应用逐渐从军事扩大到其他领域。例如,1951年T·C·库普曼斯结合W·列昂季耶夫投入产出模型将线性规划应用于生产问题;J·冯·诺伊曼研究矩阵对策与线性规划的关系,将它应用于经济平衡问题。大型电子计算机的出现对线性规划的理论以及应用的发展起着决定性的作用。在经济领域中,广泛地应用线性规划方法,并且以计算机为手段,已能解决变量个数达数百万之多的具有特殊结构的大型线性规划

问题。

线性规划研究的对象主要有两大类:①在现有的人、财、物资源这一客观条件下,如何去组织安排,使得某项任务完成最多(所谓的极大值问题);②当任务确定以后,如何统筹安排,使用最少的人、财、物资源,去完成该项任务(所谓的极小值问题)。其实以上这两类,是一个问题的两个方面,都是求极值问题。即:求解整个问题的某一个整体指标最优(极大或极小)的问题。

§ 1.1 线性规划问题

我们首先举一个实际例子,来说明什么是线性规划问题,它的数学模型是何种形式。至于问题的最优解是怎样的,如何得到它,我们将在后面的章节中加以详细论述。

例 1.1(资源利用问题) 一个企业需要使用同一种原材料生产甲、乙两种产品,它们的单位产品所需原材料的数量及所耗费的加工时间各不相同,从而所获利润亦不相同。上述资料数据,以及该企业可利用的资源总量均由表(1-1)所示:

表(1-1)

单位产品所需资源 资源	产品		可利用的资源总量
	甲	乙	
原材料(吨)	2	3	100
加工时间(小时)	4	2	120
单位利润(百元)	6	4	

那么,该企业应如何安排生产计划,才能使获得的利润达到最大?

建立资源利用问题的数学模型:

1. 明确决策变量

问题中有待确定的是甲、乙两种产品的生产量,用 x_1 、 x_2 分别表示甲、乙两种产品的生产数量。

2. 明确约束条件

问题中受到限制的条件是可利用的资源总量。由于甲产品每生产一个单位时需原材料 2 吨,其产量为 x_1 单位,所以生产甲产品所需原材料为 $2x_1$ 吨。同理,生产乙产品所需原材料为 $3x_2$ 吨。于是,企业生产甲、乙两种产品对原材料的总需求量为 $2x_1 + 3x_2$,但由于可利用的原材料总量为 100 吨,则原材料的约束条件为:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 100$$

同样,加工时间的约束条件为:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 120$$

此外,甲、乙两种产品的生产数量 x_1, x_2 只能取非负值,即 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ 。

3. 明确目标函数

目标是要求在原材料和加工时间限制的条件下,合理安排生产计划,使生产所获得的利润函数

$$S = 6x_1 + 4x_2$$

达到最大。

综合上述,资源利用问题的数学模型为:

$$\begin{aligned} \max S &= 6x_1 + 4x_2 \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

即求决策变量 x_1, x_2 ,使其在满足约束条件

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

的基础上,使目标函数 $S = 6x_1 + 4x_2$ 达到最大。

通过对例 1.1 的讨论发现,由于问题的约束条件及目标函数都是决策变量的线性不等式与等式,故此类问题又称为线性规划问题。

由此可见,建立一个实际问题的线性规划数学模型需要以下三要素:决策变量、约束条件、目标函数。

§ 1.2 线性规划问题的数学模型

线性规划问题在实际中有许多种类型,在本节中我们将介绍几种经济活动中常见的典型问题,并建立相应的数学模型。

一、合理下料问题

合理下料问题是许多工业部门特别是制衣行业、机械制造部门经常遇到的问题。通常需要在面积形状一定的材料上,或在一定长度的条形材料上切割成若干数量具有一定形状、尺寸的毛坯。一般情况下材料不能全部被利用,会有一部分残料。如何最大限度地减少残料,使其切割规定形状数量的毛坯所用的材料最少,就是合理下料问题所需要研究的课题。

例 1.2 某工厂有一批长度为 5 米的钢管(数量充分多),为制造零件的需要,要将它们截成长度分别为 140 厘米、95 厘米、65 厘米的管料。而且,这三种管料要按 2 : 4 : 1 的比例配套生产,也就是说每制造一个成品分别需要加工 2 根 140 厘米、4 根 95 厘米、1 根 65 厘米的管料。现在要生产 a 件产品,问:应如何裁截才能使截下来的三种管料,既能满足配套使用,又能使残料最少。

解 根据分析有 8 种裁截法列于表(1-2):

表(1-2)

截 法		1	2	3	4	5	6	7	8
长 度	140 厘米	3	2	2	1	1	0	0	0
	95 厘米	0	2	0	3	1	5	3	1
	65 厘米	1	0	3	1	4	0	3	6
残料(厘米)		15	30	25	10	5	25	20	15

若挑选其中一种省料的截法(例如截法 5),当然可以使残料