

数理经济学基础

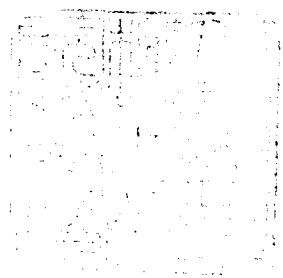
杨小凯 编 茅于軾 审校

国防工业出版社

2077
b

数理经济学基础

杨小凯 编
茅于軾 审校



国防工业出版社

内 容 简 介

本书深入浅出地介绍了广义数理经济学基础，利用数学的严密的推理和演绎的方法剖析各种经济现象之间的关系，从理论上阐述了经济学的规律。结合经济实践，用数理经济的原理探讨了提高经济效益的各种途径。在论述经济结构的最优化问题中所提出的分工理论，为研究经济结构、信息流通和经济增长的关系、生产力布局、交通运输业的作用以及贸易等问题提供了新的方法。

本书可供具有工科大学数学水平的读者阅读。

2508/86
07

数理经济学基础

杨小凯 编

茅于軾 审校

*
国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092¹/₃₂ 印张11¹/₄ 247千字

1985年6月第一版 1985年6月第一次印刷 印数：0,001—9,500册

统一书号：15034·2859 定价：1.75元

序

数理经济学在我国还是一门陌生的学科，只有极少数的大专院校里开设有这门课程，公开出版的数理经济学的书籍几乎还没有。在这种情况下，本书的问世是值得我国经济界大加庆贺的。

什么是数理经济学？

数理经济学可以说就是理论经济学。因为它所讨论的问题正是经济学中最根本的问题；它所建立起来的各种经济现象之间的关系，正是经济学最本质的规律。它以最少量的假定作为基础，利用数学的严密的推理和演绎的方法，导出了一系列的结果。这些结果互相有着逻辑上的联系，有先后，有层次。因此，数理方法赋予经济学以结构，成为数理经济学。传统上认为属于社会科学的经济学，现在由于数学推理方法的引用而具备了自然科学的形态。由于这些原因，数理经济学不妨称之为理论经济学。它将有别于历史的、经验的、记述性的经济学，作为经济学的基础而存在着。

从上个世纪末以来，杰出的经济学家逐渐明确了阐明经济规律必须借助于几何图形和数学。但起初由于经济界对这些方法不熟悉，这类表述方法常作为注解和附录出现。近四、五十年来，情况有了明显地变化。今天正规的经济学教科书已离不开大量图表曲线和数学式子。如果随便翻开一本《美国经济评论》一类的经济学杂志可以发现，几乎没有一篇文章不用到数学公式。从这一点来看，现代经济学的杂志和空

气动力学的杂志已没有什么差别。再看从1969年颁发诺贝尔经济学奖金以来，得奖的经济学巨子几乎全都在数理经济学方面有极高的造诣，或者就是因为发展了数理经济学。这可以从他们在授奖仪式上发表演说的题目而窥其一斑，例如：“分析经济学中的极大原则”（保罗·A·萨缪尔森），“一般经济均衡：目的、分析技巧、集体选择”（肯尼思·J·阿罗），“最优化概念及其应用”（T·C·库普曼），“数学在经济中的应用：成就、困难、前景”（勒·康托罗维奇）。这些题目都是与数理经济学密切有关的课题。现代的经济学就是由这样一批领头人物，沿着这样的方向开拓前进的。

利用数学已经建立起来的一系列公式和定理，特别是利用描述复杂事物之间关系的多元微积分和矩阵代数以及抽象空间的概念来研究经济现象，确实给我们带来了极大的方便。尤其是贯穿在整个数学中的精确而客观的思考方法，使得对经济问题的认识不再模棱两可。数理经济学中推导得出的各种关系，概念清楚、表达精确，因而具有巨大的说服力，由于推导过程中的思路明确而清晰，万一对所得到的结论发生怀疑时，我们可以追溯每一步的前提条件和逻辑关系，因而不难发现任何可能存在的疏忽和漏洞。当经济学家之间意见不一致的时候，依靠数理经济学的解析方法，很容易发现他们之间的分歧所在。这为讨论问题提供了共同的语言，不但可以提高讨论问题的效率，而且明确彼此前提的差别，为进一步澄清问题指出研究方向。

当然，不利用数学方法同样可以学好经济学，可以掌握经济学的要义，但毕竟是事倍而功半。正好象不懂得数学也可以学好力学，只要通过对大量实际力学现象的分析和归纳，再掌握用自然语言表述的各种力学关系。爱因斯坦在他的

《狭义与广义相对论浅说》，冯卡尔曼在他的《空气动力学的发展》中就采用了这种表述方式。现代经济学的论著中也有这样的例子。但如果比较一下借助和不借助数学的两种表述方法，可以肯定前一种方法更为简便有效。正因为如此，现在很少有人不借用数学工具来学力学，后一种方法只有在普及科学知识的场合下，为了方便不熟悉数学的人了解力学才勉强采用。经济学也正处于同样的情况。

数理经济学之所以能得到许多明确的结果，是因为它普遍地采用了形式逻辑的思维方法，然而这一方法同时又给它带来了局限性。由于科学的发展和文化的进步以及社会各成员和集团之间立场的不同，使得经济经常处于变动之中。从而以短期最优作为目标的结果常常与长期的目标矛盾；个体或局部的利益也会与整体利益冲突。例如较高的商品价格对应着较少的需求量，但是涨价往往反而诱导出更多的需求，因为人们预期价格还会升得更高。又如节俭无疑是一种美德，但全社会过度的节俭却会使整个经济周转不灵。这些例子说明经济研究需要从运动中，从各个不同的联系方面去把握其规律，这是我们在学习数理经济学中应当注意的。

回顾数理经济学在我国现状，人们可能会问，何以它的推广和应用如此之迟缓呢？原因是多方面的，但其中最主要的一个原因，或许是人们以为它是总结了资本主义社会的经济规律，我国的社会制度不同，这些规律未必能够应用。但事实并非如此。不论在何种社会制度下，经济现象的最根本的规律是一致的。杨小凯同志在这本书中正在这一点上做出了贡献。他随时注意到将数理经济的原理应用到我国的经济实践，他特别指出应用数理经济学来提高经济效益的各种途径，这正是我国的经济学家们要着重解决的问题。不过，

我们也要注意一点，经济学的基本原理和经济政策不是一回事。同样的空气动力学方程会给出同样的机翼设计，但同样的经济学原理不会得出同样的经济政策，因为这些原理作用的“介质”和“边界条件”不同，因为每个国家的资源禀赋，经济发展的阶段，人民的生活习惯以及政策目标是不同的。

特别值得一提的是杨小凯同志在本书中提出的分工理论，在这门国际上已经相当成熟的数理经济学中还是首次提出来，这是杨小凯同志对数理经济学的的一个创造性的贡献。分工理论解释了分工得到的社会经济效果如何被流通效率所限制。这为研究经济结构、信息流通和经济增长的关系、生产力布局、交通运输业的作用以及国际贸易等一系列经济学中的重要问题开辟了一个新的研究园地。

本书的叙述深入浅出，具有工科大学数学水平的同志就可以看懂，书中还介绍了许多饶有兴味的经济实例。相信读者一定会从这本书的阅读中感到快慰，并得到新的知识。

茅于軾

目 录

引言	1
第一章 经济规律的定性定量描述	10
§ 1.1 经济规律的定性分析	10
§ 1.2 增长函数	14
§ 1.3 复利函数	17
§ 1.4 Gompertz增长曲线	26
§ 1.5 学习曲线	29
§ 1.6 函数的弹性	32
§ 1.7 洛仑兹曲线与基尼系数	35
§ 1.8 分工协作的数学描述	43
第二章 消费者的经济效果及其最优化	59
§ 2.1 效用函数	59
§ 2.2 效用函数的特性及消费者最优经济效果的充分条件	71
§ 2.3 消费者最优经济效果的实证分析	86
§ 2.4 间接效用函数和 AIDS	104
§ 2.5 消费者最优经济效果之比较静态分析和需求函数特性	109
§ 2.6 消费者作为商品需求者和作为劳动时间、储蓄资金供给者的最优经济效果问题	134
§ 2.7 多个消费者的最优经济效果问题	140
§ 2.8 动态需求系统	146
第三章 生产者的最优经济效果	152
§ 3.1 投入产出生产函数	152
§ 3.2 Cobb-Douglas 和 CES 生产函数	156
§ 3.3 生产者的最优经济效果——费用最小化	181

VIII

§ 3.4	拉氏乘数之经济学意义——影子价格和影子费用	186
§ 3.5	生产者追求最优经济效果的行为规律转化为生产者 对投入的需求函数和对产出的供给函数	188
§ 3.6	资源有限的情况下的最优经济效果	193
§ 3.7	多个生产者的最优经济效果	197
§ 3.8	用线性规划研究生产者的最优经济效果和导出数字 式供给函数	205
第四章	消费者和生产者的综合最优经济效果	225
§ 4.1	Pareto 最优境界 (Pareto 均衡)	225
§ 4.2	简单的可计算一般均衡 (CGE) 模型	241
§ 4.3	二阶段 CGE 模型	249
§ 4.4	局部均衡和一般均衡的稳定性	259
第五章	经济结构的最优化	272
§ 5.1	分工度与流通	272
§ 5.2	分工度与生产效率	280
§ 5.3	用线性规划求解最优分工结构	291
§ 5.4	对偶规划解与分工的人为阻力	302
§ 5.5	综合考虑最优经济结构和资源最优分配的模型	308
§ 5.6	可计算工业布局最优集中度的混合整数规划模型	311
第六章	经济体制和竞争效率对经济效果的影响	327
§ 6.1	独家经营企业追求其最优经济效果的一般规律	327
§ 6.2	垄断对实现 Pareto 最优境界的干扰	330
§ 6.3	二元竞争的古诺模型	333
§ 6.4	价格集中控制和配给制对最优经济效果的影响	344
§ 6.5	买方的独家经营	346
参考文献		349

引 言

“科学的本质是数学”。

——Descartes

“科学产生于用数学解释自然这一信念”。

——John Herman Randall

毕达哥拉斯学派认为“数是万物之本原”，这种断语听来近乎荒谬，但很多有成就的科学大师的确是从“科学的本质是数学”这一信念出发而做出成绩来的。伽俐略与笛卡尔都相信自然界是用数学设计的。伽俐略曾说：“宇宙这本书是用数学语言写出的，没有它们，人就在一个黑暗的迷宫里劳而无功地游荡着”。很多人都知道伽俐略在实验科学方面的建树，但伽俐略对文明史的主要贡献却是他用数学思维方法对科学方法论的变革。他认为科学工作中的演绎数学部分所起的作用比实验部分所起的作用大。刻卜勒梦寐以求的就是将行星运动规律变成数学，他坚信行星运动可以还原成数学。事实证明他的信念是正确的。刻卜勒行星运动三定律正是大自然对他这种数学信念的回报。牛顿也相信任何自然现象都能变成数学。最初他并没有企图创建物理学的体系，而只是想用数学自由地处理苹果落地（自由落体运动）这类现象。他发觉传统的数学工具用来研究自由落体运动不够用，但他没有象某些庸人那样埋怨数学不能描述复杂的事物，埋怨数学预测不准。他出于“科学的本质是数学”这一信念，发展出

一套全新的数学理论——微积分，来研究自由落体运动，一旦小问题可以自由地用数学来处理，经典物理学体系就脱颖而出。

爱因斯坦相信“世界无非是一堆微分方程”。他的成就当然与他对数学的嗜好直接有关。

可以说，很多新的科学是伴随着那些看来不能变成数学的事物变成数学而出现的，新的科学的创建与数学的发展是同步的。

很多民族的思想史都经过了从崇尚自然语言到崇尚哲学语言，而最后到崇尚数学语言的阶段。近代科学史就是一大批嗜好数学的人物发狂地把各种研究对象变成数学的历史。他们百折不挠，冥思苦想，梦寐以求的就是将各种事物变成数学化的系统。这个历史从十六世纪以来继续了数百年，其势头历久不衰。

数学的触角近年伸入生物学，最复杂的生物分类学如今也被“数量分类学”所占据。物种分类这种纯定性分析的学科中，目前光是测度种间抽象距离的数学公式就有数十个。

心理学这个过去最敌视数学的领域，也开始大量使用数学，专门用于心理学的数学教科书亦逐渐增多。

但是在传统的社会科学领域中，数学取得成就最大的是在经济学领域。1969年诺贝尔经济学奖金的设立承认了这一事实。经济学是社会科学中最早成功地实现数学化的学科。

经济学数学化的重要标志，是它不限于仅仅应用现有的数学工具，而是与数学融为一体，同步发展。例如线性规划的出现谁也说不清这是数学的突破还是经济学的突破。点集拓扑学中的效用函数存在定理既可以说是纯数学定理，也可以说是经济学定理。

现代数理经济学不但是一门应用数学的经济科学，而且很有点“数学物理方法”的味道，在其学术著作中，人们几乎分不清它究竟是数学还是经济学。

很多数学家惊讶地发现，极其抽象的拓扑学最有用的地方竟是经济学领域。正如冯·诺依曼所料，经济现象最复杂，它要用的数学理论也最高深，因为越是抽象的数学工具越适于分析实际上十分复杂的事物。正如初等代数不能用来描述自由落体运动，而必须要用微积分一样。一般数学分析用来描述经济现象也不够，而需要拓扑学这类抽象的工具。

这也证明了数学家的预言：“从长远观点看，越是抽象的数学理论，其应用前景越是广阔”。

微积分刚出现时，当时的学术界将其斥为异端邪说，直到牛顿同时代的人几乎全部不在人世时，微积分才被新起的一代人普遍接受。

而数理经济学的创始人瓦尔拉斯等人在世时，大多数经济学家都不能接受这些理论，并且对它诸多责难，例如：

“经济学涉及复杂的人的心理和行为，不能变成数学”；

“经济现象太复杂，现有数学不足以用来分析经济问题”；

“经济变量不具备连续性，经济问题不确定性大，用数学分析只能是简化的数学游戏，不可能准确预测”；

“经济学主要是定性分析，定量分析至少不能代替定性分析”。

早在二十多年前，伟大的数学家，现代计算机之父、数理经济学家冯·诺依曼就有力地批驳了以上观点。

在牛顿那个时代，把苹果落地问题变成数学的困难比我们今天将需求量和价格的关系变成数学模型的困难要大得多。在热力学的史前时期，人们把冷热概念变成可测度的温

度比我们今天测度商品的效用（使用价值）也要困难得多。冯·诺依曼认为，类似反对在经济中应用数学的论调在物理学的早期就出现过，也早就被历史所驳倒。他认为关键并不在于研究的对象过于复杂不便于应用数学，而在于这种对数学的被动态度。正因为研究对象复杂才需要我们研究出应用数学的新手段。如果现有的数学不足以描述复杂的研究对象，则应该发展出新的数学理论来，这个过程中就会有新的科学产生。冯·诺依曼强调牛顿研究自由落体运动的例子，如果没有牛顿企图将自然现象变成数学的不懈努力，就不会有微积分这种数学上的突破，也不会有物理科学的创立。

说经济变量不具备连续性，经济现象不确定性太大，这正说明经济学应强调运用离散数学和概率论等数学工具，例如随机差分方程就是在经济中最有用的数学工具之一。

认为数理经济学只搞定量分析忽视定性分析的人，对数学显然缺乏了解。数学正是定性分析的最有力的工具。真正科学的定性分析，必须依靠数学语言。力学、电子学、高能物理学、空气动力学、生物学等学科中都有很多纯定性分析的研究，这些定性分析正是用数学方法进行的。数理经济学是经济学的定性分析学科，而经济计量学才是定量分析的学科。数理经济学用定性分析提供基础理论，而经济计量学根据这些定性分析去定量地计算各种参数。经济现象非常复杂，没有数学工具，进行定性分析就没有一个严格的逻辑推理手段，所以没有数学的定性经济分析，不但不严格，而且根本无法清晰地处理复杂的研究对象。所以数学对于经济学的意义主要在于定性分析而其次才是定量分析。至今数理经济用定性分析得出的有关经济机制、价格制度功能的一整套理论远比具体的经济计量模型对现代经济社会的影响大。

任何研究对象都能用无穷多种定性的系统去处理,例如,在伽俐略之前,研究物理现象也有一些定性分析的系统,亚里士多德学派用流动性、刚性、自然位置、要素等概念定性描述自然现象。而伽俐略却创造出一套全新的定性概念来革新传统的定性系统,如速度、加速度、力、质量等等。这在当时可说是对经典的大逆不道了,但这些定性概念全可以定量测度,因而可以用数学公式联系起来。特别是微积分的创立,可以把一些看来不能写成不变的规律的复杂事物变成了封闭单值的数学公式系统,所谓“封闭单值”就是“放之四海而皆准”。历史证明这种能量化的定性系统才是不朽的,而不能量化的各种定性系统终究会随历史长河之流逝而黯然失色。

在瓦尔拉斯那个时代,应用高等数学的经济学叫数理经济学,以示与自然语言进行分析的经济学之区别。但在我们这个时代,经济学几乎已全部数学化,国际经济学术界中,完全用自然语言讨论经济问题的文献已经很少了。当代没有不应用数学的物理学,从这个意义上我们可以说,今天不应用数学的“经济学”也算不上经济学了。今天的经济学就是上个世纪人们称为数理经济学的东西。广义的数理经济学就是“高级经济分析”。它与初级经济分析和中级经济分析的区别在于更系统地运用高等数学来阐述经济理论。而初级、中级经济分析主要是用几何图形浅显(但不严格)地解释这些用高等数学推出的理论。

现代数理经济学主要是指狭义数理经济学,它用规范化的方法研究瓦尔拉斯创立的一般均衡理论,使用的数学工具主要是集合论、群论、拓扑学。它与新古典主义边际分析主要使用微积分方法不同,其学术文献完全是公理化的。与古

典数理经济学的实证分析不同,现代数理经济学从一套公设、假定、定义出发,导出若干引理、定理和系。

所谓一般均衡就是全社会的综合最优经济效果,其中分为消费者均衡和生产者均衡及协调二者的 Pareto 最优分配。消费者均衡就是消费者在预算约束下的最优经济效果问题,测度这种消费者经济效果的综合指标就是效用函数。这种综合经济效果指标是否存在,如何测度,这正是数理经济学的效用函数存在定理和需求函数理论要解决的问题。

生产者均衡就是生产者最优经济效果问题,即在技术条件和资源约束下怎样达到最大利润的问题。

一般均衡研究怎样找到一组最优价格,使生产者最优经济效果与消费者最优经济效果自动协调。这是“核存在定理”和不动点定理要解决的问题。

数理经济学是主要进行定性分析的理论经济学,它研究最优经济效果、利益协调和最优价格的确定这些经济学基本理论问题,为经济计量学、管理科学、经济控制论提供模型框架、结构和基础理论,它实在是经济学的基础之基础。如果对这一经济学的基础理论学科不重视,而只注重经济计量学和运筹学等方法学科,那就容易犯生吞活剥的毛病,不能很好地结合我国的具体情况,灵活地运用他人的具体方法。尤其是忽视了掌握先进思维方法的重要性,在理论方面就上不去,不能利用已有的大量文献成果。例如将误认供给函数为需求函数,不能正确设计计量经济模型的结构,不善于用经济理论检验和解释估计出的模型和参数;不能精细地区别均衡价格、影子价格、最优价格与生产价格的概念差别。

数理经济学的先驱是法国学者 A. A. Cournot, 他于 1838 年发表《以数学原理研究财富的理论》,提出了需求函数理

论，把人们熟视无睹的商品需求量与价格之间的关系写成了函数形式。

H. H. Gossen 和 W. S. Jevons 用函数理论研究消费者经济效果的综合指标即效用函数，并将导数概念引入经济学，这就是著名的边际概念。这在经济学史上有划时代的意义，它使经济学使用的数学工具从初等数学进入到高等数学，使经济学研究的对象从常量（以平均成本、平均利润、不变使用价值等概念为代表）进入变量（边际成本，边际收益、边际效用等）。Gossen 用条件极值法研究消费者的最优经济效果问题，得出了著名的“Gossen 第二法则”，又称边际效用均等法则。

瓦尔拉斯在前人研究的基础上提出了影响经济学界达一世纪之久的一般均衡理论。他证明了瓦尔拉斯定理，但对一般均衡的大多数理论问题，他并没有解决。

V. F. D. Pareto 和 F. Y. Edgeworth 批判了效用函数的基数论，创立了效用函数的序数论，进一步将消费者经济效果问题的研究推向前进，并提出了著名的“Pareto 最优分配律”。J. R. Hicks 将 Pareto 提出的序数论和“无差异曲线”进一步阐述，使经济学界广泛接受。

现代最著名的数理经济学家应首推 Von Neuman，他开创了用集合论、群论、拓扑学研究所谓规范经济理论的新时代。很多数理经济学的重要定理都是由他证明或提出的。

现代在数理经济学方面作出杰出贡献的还有：

日本数学家角谷静夫（1943年证明一般均衡存在的不动点定理）；

K. J. Arrow（1951年证明效用函数的存在定理）；

G. Debreu（1954年证明效用函数的存在定理）和

H. Scarf (二人 1963 年证明竞争均衡与经济核关系定理);

T. C. Koopmas (证明了均衡与最优经济效果之间的关系以及最优经济效果问题与最优价格的对偶)。

上述学者大多是在狭义数理经济学方面作出杰出贡献的人物, 在广义数理经济学方面做出杰出贡献的人物如今已达到多不胜数的地步, 在此不一一列举。

数理经济学所研究的根本问题与我们所关心的问题, 内容实质上是相同的, 但因语义上的歧异, 造成理解的困难, 加上我们有些读者对数学语言陌生, 感到数理经济学难以理解, 也有个别人并没有吃透数理经济学反而随意批判它 (其实没有批到点子上)。希望此书能使读者真正理解数理经济学的内容, 在吃透它的基础上进一步发展它。因此本书对数理经济学的一些基本概念结合我们的经济学术语作了一些解释, 例如再生产理论在数理经济学的辞典中就是投入产出等均衡概念; 消费者综合经济效果指标就是效用函数概念; 消费者最优经济效果和生产者最优经济效果的协调就是一般均衡概念; 最优积累率、最优轻重工业比例问题就是最优经济增长概念; ……。

这些我们经常讨论的重大经济问题, 数理经济学中都有十分成熟的理论和定理、定律。千万学者在这些问题上已积累了多不胜数的文献, 如果我们能系统地继承这些成果, 我们的经济学界可以避免重复别人的工作, 少走弯路。

重视文献积累与综述, 这不但是一种学术道德和学风问题, 而且也是建立文化秩序的需要。研究任何经济问题应该综述有关的重要文献。例如研究最优积累率问题, 就要叙述谁最早提出这个问题 (例如 1928 年 F. P. Ramsey 用变分法导出最优积累率公式); 后来谁又发展了它 (例如 R. Dorfman