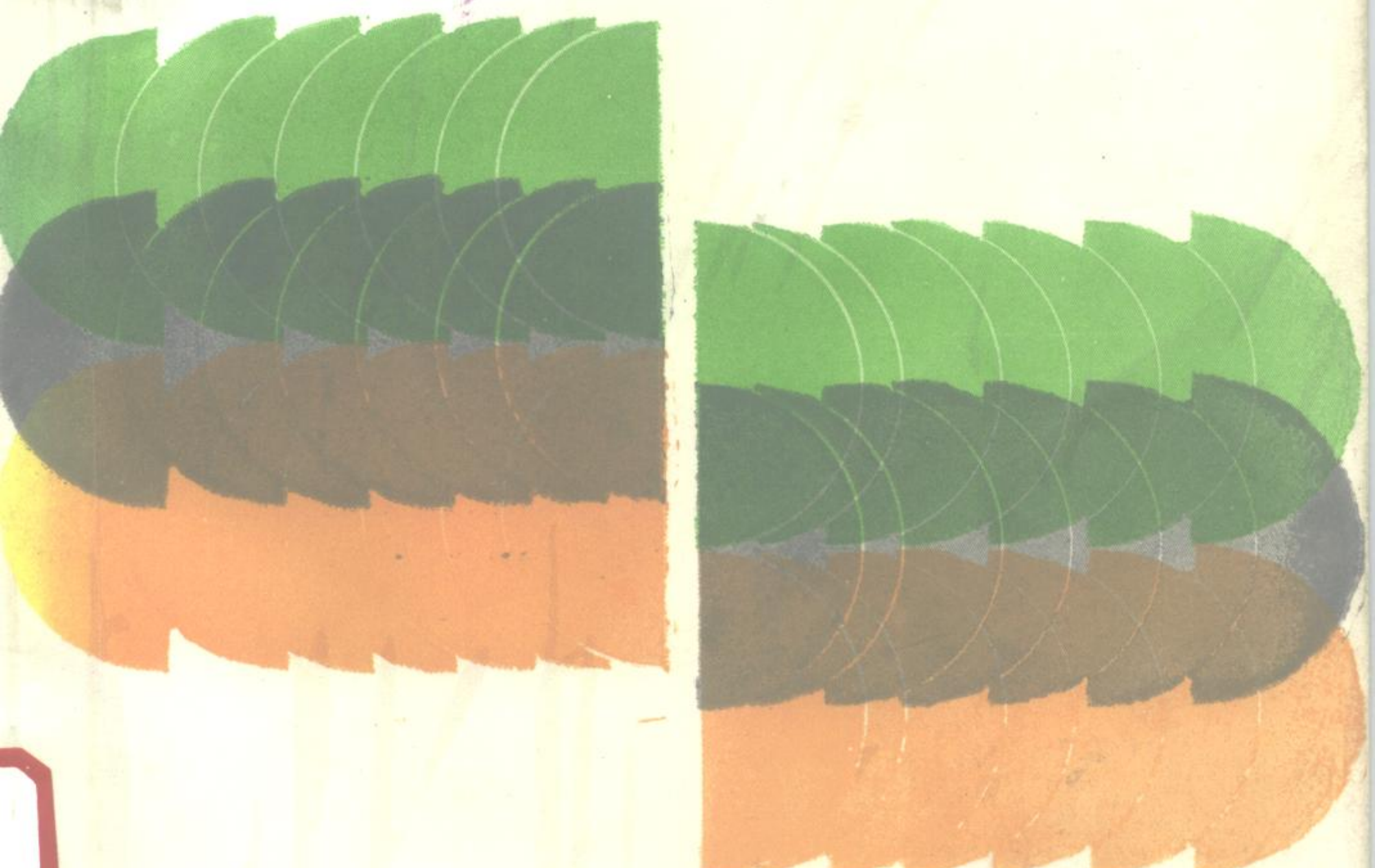
高等学校教材

高等数学

重庆大学高等数学教研室　编

（下册）



重庆大学出版社

高等学校教材

高　等　数　学

下　册

重庆大学高等数学教研室　编

重庆大学出版社

内容提要

本书是由重庆大学高等数学教研室根据国家教委颁布的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》，结合教师们的多年教学经验，在作为讲义使用过多次的基础上修订而成的.

本书分上、下两册.下册内容为多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、微分方程.每节后有习题，每章后有总习题，书末附有习题答案.

本书注重教学方法，深入浅出，叙述详细，有较多例题，利于教学，并且在对某些章节内容的处理上作了一些新的尝试.本书可作为高等工科学校教材，也可供工程技术人员自学或参考.

高等学校教材

高等数学

下册

重庆大学高等数学教研室 编

责任编辑 刘茂林

*

重庆大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

重庆大学印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：14.75 字数：368千

1993年4月第1版 1993年4月第1次印刷

印数：1—7000

标准书号：ISBN7－5624－0521－2 / O·73 定 价：5.80元

〔川〕新登字020号

目　录

第八章　多元函数微分法及其应用

上册中研究的函数只含有一个自变量，这种函数叫做一元函数或单元函数. 然而自然现象及客观事物是相互依赖相互制约的，反映在数量上就是一个变量依赖于多个变量的情形，这种函数叫多元函数. 下册将介绍多元函数及其微分、积分的问题. 本章以讨论二元函数为主，因为由一元函数过渡到二元函数，会产生若干新的问题，而对于二元以上的多元函数，只需作类似的推广就行了.

§1　多元函数的概念

一、二元函数的概念

在自然现象和实际问题中，常常会遇到多个变量之间的依赖关系. 如

例 1　圆柱体的体积 V 和其底半径 r、高 h 之间有关系：

$$V = \pi r^2 h$$

当 r、h 在一定范围（$r>0, h>0$）内任取一对值时，V 的对应值就随之确定.

例 2　在一密封而有活塞的容器内充满着一定量的气体，该气体的体积 V、压强 p、绝对温度 T 之间有关系：

$$pV = RT \qquad (R \text{ 为常数})$$

当 V、T 在一定范围（$V>0, T>0°$）内任取一对值时，p 的值就随之确定：$p=\dfrac{RT}{V}$.

例 3　物体的动能 W 和其质量 m、速度 v 之间有关系：

$$W = \frac{1}{2}mv^2$$

当 m、v 在一定范围（$m>0, v>0$）内任取一对值时，W 的值就随之确定.

如果抽去以上各例的具体内容，只研究它们在数量上的共同之处，便得到二元函数的定义：

定义 1　设有变量 x、y 和 z，如果当变量 x、y 在一定范围内任取一对值时，变量 z 按照一定的法则总有确定的值和它们对应，则称变量 z 是变量 x、y 的**二元函数**，记作

$$z = f(x, y)$$

其中变量 x, y 叫做**自变量**，z 叫做**因变量**，自变量 x, y 的取值范围叫做函数的**定义域**.

以后当讨论到一个二元函数而不写出它的定义域时，便认为函数 z 的定义域是使 z 有确定对应值的 (x, y) 的全体. 如果把 x, y 看作平面上点的坐标，那么二元函数的定义域就是使函数 z 有确定对应值的 xoy 平面上的点集.

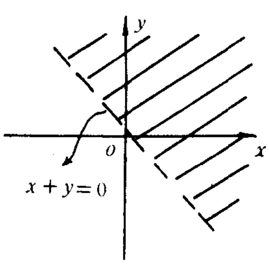


图　8.1

例 4　$z=\ln(x+y)$，其定义域为平面点集：$\{(x, y): x+y>0\}$（图 8.1）.

例 5 $z=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

其定义域为全平面：$\{(x,y):-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$.

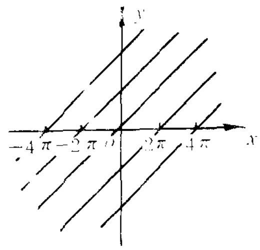


图 8.2

例 6 $z=\sqrt{\lg\cos(x-y)}$ 要使 z 有确定的实数值，则

$$\lg\cos(x-y)\geqslant 0 \text{ 即 } \cos(x-y)\geqslant 1.$$

而余弦值不能大于 1，只有

$$\cos(x-y)=1 \quad \text{即}$$

$$x-y=2k\pi \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

故函数的定义域为平面点集(图 8.2)

$$\{(x,y):x-y=2k\pi,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$$

今后研究的二元函数，常常是在“区域”上给出的. 下面介绍区域的概念

二、区域

为了确切说明区域的概念，先引入以下一些定义：

点 P_0 的邻域：以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，以任意正数 δ 为半径的圆的内部的点 (x,y) 的全体：

$$\{(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$$

叫做平面上点 P_0 的邻域(图8.3).

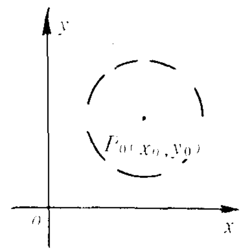


图 8.3

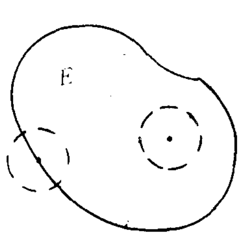


图 8.4

内点：设 E 为平面上一点集，P 为 E 中一点，若存在点 P 的某一邻域，使此邻域内的点都属于 E，则称点 P 为点集 E 的内点(图8.4).

边界点：设 E 为平面上一点集，如果点 P 的任意一个邻域内都有属于 E 的点，也有不属于 E 的点(点 P 可以属于 E，也可以不属于 E)，则称点 P 为点集 E 的边界点. E 的边界点的全体称为 E 的**边界**(图 8.4).

如在例4中，点集 $E_1=\{(x,y):x+y>0\}$ 中每点都是 E_1 的内点，直线 $x+y=0$ 为 E_1 的边界；又如点集 $E_2=\{(x,y):1<x^2+y^2<4\}$ 中的每点都是 E_2 的内点，圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 是 E_2 的边界，点集 $E_3=\{(x,y):0<(x-1)^2+(y-1)^2<1\}$ 中的每点都是 E_3 的内点，点(1,1)及圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 是 E_3 的边界.

开集：如果点集 E 的每点都是 E 的内点，则称点集 E 为开集.

上面说的 E_1、E_2 及 E_3 都是开集.

区域：如点集 D 为开集，若对于 D 中任意二点，都可作一条位于 D 内的折线连接此二点(点集 D 的这种性质称为连通性)，则称 D 为开区域或区域. 即是说，**区域就是连通的开集**.

闭区域：区域连同它的边界一起，称为闭区域.

例如，点集 $E_1=\{(x,y):x+y>0\}$ 和 $E_2=\{(x,y):1<x^2+y^2<4\}$ 都是区域，而点集 $E_4=\{(x,y):1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭区域.

有界区域、无界区域：若区域可以被包含在一个以原点为中心半径适当大的圆内，则称此区域为有界区域，否则称为无界区域.

例如：$\{(x,y):1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$是有界闭区域，$\{(x,y):x+y>0\}$是无界开区域，$\{(x,y):x+y\geqslant 0\}$是无界闭区域；全平面$\{(x,y):0\leqslant x^2+y^2<+\infty\}$既是无界开区域，也是无界闭无域，这是唯一具有两重性的区域，因为全平面没有边界点，所以可以说它包含了全部边界点，也可以说它不含边界点.

今后讨论的函数$z=f(x,y)$都是定义在区域上的，按照上面的定义，区域指的是开区域，是不包含边界点的；但在不需要区分开区域和闭区域时，统称它们为区域或简称为域，并用字母D表示.

三、二元函数的几何表示

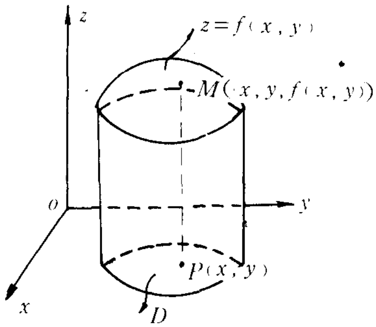


图 8.5

设函数$z=f(x,y)$的定义域为空间直角坐标系中xoy平面上的域D，则对于D内任一点$P(x,y)$，在空间可以作出一点$M(x,y,f(x,y))$与之对应(图8.5)，当点P在域D内变动时，相应的点M就在空间变动，当点P取遍域D时，点M在空间一般就描绘出一曲面，称此曲面为函数$z=f(x,y)$的图形. 故二元函数的几何表示为一空间曲面. 例如函数$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的几何表示为一中心在原点半径为1的上半球面. 由方程$x^2+y^2+z^2=1$表示的几何图形是中心在原点半径为1的球面，在定义域$D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$内任一点$(x,y)$处，函数有两个对应值$\sqrt{1-x^2-y^2}$及$-\sqrt{1-x^2-y^2}$，这是多值函数，将其分为两个单值函数：

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}\text{ 及 }z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$$

它们分别表示中心在原点半径为1的上半球面及下半球面. 一般总假定函数$z=f(x,y)$是单值函数，若遇到多值函数的情形，则把它折成若干个单值函数再分别讨论.

四、多元函数及点函数的概念

二元函数的定义可以类似地推广到三元函数$u=f(x,y,z)$以及更多个自变量的函数. 区域的概念也可以推广到三维空间以及更多维(如n维)的空间区域. 不过对于三元及三元以上的函数，已经不能从几何上来解释了. n元函数$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$当$n\geqslant 2$时统称为多元函数.

若把一元函数或多元函数中的自变量都看作是动点P的坐标，则$u=f(x)$中的自变量x是x轴上点P的坐标；$u=f(x,y)$中的自变量x、y是xoy面上点P的坐标；$u=f(x,y,z)$中的自变量x,y,z是三维空间中点P的坐标；$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中的自变量x_1、x_2、$\cdots$，x_n是n维空间中点P的坐标. 这样就可以把一元函数及多元函数统一地看作动点P的函数：$u=f(P)$，称为**点函数**. 有了点函数的概念，就可以将一元函数及多元函数统一起来进行研究.

习 题 8-1

1. 用不等式表示下列各平面区域：

(1)中心在$(a,0)$半径为a的圆的内部及圆周$(a>0)$；

(2)上半平面(不含x轴)；

(3)除去原点的全平面.

2. 作出下列不等式所表示的图形，并指出是开区域或是闭区域？是有界区域或是无界区域？

(1) $xy>0$；　(2) $y\geqslant x^2,|x|\leqslant 1$；

(3) $x^2+y^2>0$；　(4) $y^2<x-1,x+y<2$；

(5) $1<x^2+y^2<4$；　(6) $x^2+y^2\geqslant 2x$.

3. 确定下列函数的定义域：

(1) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；　(2) $z=\sqrt{y-\sqrt{x}}$；

(3) $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$；　(4) $z=\ln(1-x-y)$；

(5) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$；(6) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$；

(7) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$；　(8) $u=\ln(1-x^2-y^2-z^2)$；

(9) $u=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$.

§2 极限与连续

一、二元函数的极限

用点函数的概念将一元函数极限定义中的 $|x-x_0|$ 换成 $|PP_0|$ 便可得到点函数的极限定义：

设点函数 $f(P)$ 在点 P_0 的某一去心邻域内有定义，如果对任意给定的一个正数 ε，总相应地存在着一个正数 δ，使得对满足不等式 $0<|PP_0|<\delta$ 的一切点 P，都有 $|f(P)-A|<\varepsilon$，其中 A 为一常数，则称 A 为点函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限.

对于二元函数 $z=f(x,y)$，动点 $P(x,y)$ 与定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离 $|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，于是可给出二元函数极限的定义如下：

定义1　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某一去心邻域内有定义，如果对任意给定的一个正数 ε，总相应地存在着一个正数 δ，使得满足不等式

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \tag{1}$$

的一切 (x,y)，都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，其中 A 为常数，则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的**极限**. 记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

或

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A^{*} \tag{2}$$

读者应特别注意：上述极限定义要求，凡在定义域中满足(1)式的点 (x,y) 都要满足 $|f(x,$

* 如果在点 (x_0,y_0) 的任一去心邻域中，既有属于 $f(x,y)$ 定义域中的点，也有不属于该定义域的点，则只要定义域中满足不等式(1)的一切点 (x,y)，均有不等式 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立. 也称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限. 在后面讨论函数的连续性及偏导数时，对于这类情形，也作同样的规定，不另作说明.

$y)-A|<\varepsilon$. 也就是要求动点(x,y)以任意方式趋于定点(x_0,y_0)时，函数$f(x,y)$都趋于同一常数A. 因此，即使(x,y)沿某几个特殊路径趋于(x_0,y_0)时，函数$f(x,y)$趋于同一确定值，也不能断定$f(x,y)$的极限存在；但是反之，只要点(x,y)沿两条不同的路径趋向(x_0,y_0)时，函数趋于不同的值，就可以断定函数的极限不存在.

例1 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\quad(x\neq 0,y\neq 0)$，证明$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$.

证
$$|f(x,y)-0|=\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|$$
$$\leqslant|x|\cdot\left|\sin\frac{1}{y}\right|+|y|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|+|y|,$$
对任给的$\varepsilon>0$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当$0<|x|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}<\delta,0<|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，都有
$$|f(x,y)-0|\leqslant|x|+|y|<\varepsilon,$$
故
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0.$$

例2 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

问$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$存在否？

解 当(x,y)沿$y=0$或$x=0$而趋于$(0,0)$时：
$$\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}f(x,0)=\lim_{x\to 0}0=0,\qquad \lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{y\to 0}f(0,y)=\lim_{y\to 0}0=0,$$
但当(x,y)沿直线$y=kx$趋于$(0,0)$时
$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$
上式的值依赖于k，即沿不同的直线$y=kx$而趋于$(0,0)$时，$f(x,y)$趋于不同的值，故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在.

例3 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\qquad(x,y)\neq(0,0).$

问$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$存在否？

解 显然，$\lim\limits_{x\to 0}f(x,0)=0,\lim\limits_{y\to 0}f(0,y)=0.$

且当点(x,y)沿直线$y=kx$而趋于$(0,0)$时
$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=0,$$
仍不能确定函数的极限为0. 因为当点(x,y)沿抛物线$y=x^2$趋于$(0,0)$时
$$\lim_{\substack{y=x^2\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2},$$
故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在.

以上诸例，除用定义验证函数的极限外，后二例都是介绍判断二元函数的极限不存在的方

法；至于如何计算二元函数的极限，一般是用四则运算的极限法则及无穷小量与有界函数的乘积为无穷小量的定理等，有时也将二元函数的极限向一元函数的极限转化.

例4 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} \ln(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$.

解 可以看出，此极限是 $0\cdot\infty$ 型未定式.

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} \ln(1+xy)^{\frac{1}{x+y}} = \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} \left(\frac{xy}{x+y}\cdot \ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right)$$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} \dfrac{xy}{x+y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} \dfrac{1}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}} = 0$,

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} \ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}} \overset{\text{令}xy=t}{=} \lim_{t\to 0^+} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} = \ln \lim_{t\to 0^+} (1+t)^{\frac{1}{t}} = \ln e = 1$$

故 $$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} \ln(1+xy)^{\frac{1}{x+y}} = \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} \frac{xy}{x+y}\cdot \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} (1+xy)^{\frac{1}{xy}} = 0.1 = 0.$$

从上例看到，二元函数的极限有时也会出现未定式的问题，此时可利用变量代换，将二元函数的极限向一元函数的极限转化.

上面讨论的二元函数的极限，是当动点 (x,y) 的坐标 x,y 同时分别趋于 x_0 及 y_0 时得到的，这种极限（即 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$）又称为**二重极限**. 若令 x,y 先后趋于 x_0 及 y_0 所得到的极限，即 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$，称为**累次极限**. 累次极限实际上是连续地进行两次一元函数的极限运算，它与二重极限是不同的概念.

二元函数的极限四则运算法则与一元函数的类似，读者可自行写出.

二、二元函数的连续性

定义2 如果当点 $P(x,y)$ 趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 的极限存在，且等于函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的函数值. 即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0). \tag{3}$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ **连续**.

若令 $x=x_0+\triangle x, y=y_0+\triangle y$，则函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续的定义(3)又可写为等价的形式：

$$f(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y) = f(x_0,y_0)+\varepsilon \tag{4}$$

其中 ε 仅依赖 $\triangle x$ 及 $\triangle y$ 且 $\lim\limits_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}} \varepsilon = 0$.

若二元函数在域 D（包括开域、闭域）各点都连续，则说函数在域 D 连续. 二元连续函数的图形是一个无孔隙、无裂缝的曲面.

函数的不连续点称为**间断点**. 如例2中的函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

当$(x,y)\to(0,0)$时极限不存在，所以点$O(0,0)$是函数的间断点；又如$z=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$在圆周$x^2+y^2=1$上无定义，所以该圆周上各点都是函数的间断点. 由此看出，二元函数的间断点比一元函数的复杂. 这些间断点有时可以形成曲线.

与一元连续函数类似，多元连续函数经四则运算(对商的运算要求分母不为零)及函数复合后所得的函数仍是连续函数. **多元初等函数**也是由多个自变量的基本初等函数经有限次四则运算及函数复合且可由一个式子表示的函数，并有与一元函数类似的结论：**一切多元初等函数在其定义区域内都是连续的**.

与闭区间上一元连续函数的性质类似，在有界闭区域上的多元连续函数也有如下性质：

性质1(最大值和最小值定理) 在有界闭区域D上的多元连续函数，在D上至少取得其最大值及最小值各一次.

性质2(介值定理) 在有界闭区域D上的多元连续函数，必取得界于函数最大值与最小值之间的任何值至少一次.

习 题 8—2

1. 求下列二元函数的极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\ln(x+e^y)$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 0}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$；

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$；　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$，

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$；　(8) $\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ y\to 0^-}}\dfrac{xy}{x+y}$；

(9) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　(10) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

2. 下列函数的极限存在吗?

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$.

3. 考察下列函数在点$(0,0)$的连续性：

(1) $f(x,y)=\begin{cases}x^2y^2\ln(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0.\end{cases}$

4. 求下列函数的间断点：

(1) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sin x\cdot\cos y}$；

(2) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sin^2\pi x+\cos^2\dfrac{\pi}{2}y}$；

(3) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{y^2-x}$.

§3 偏 导 数

一、偏导数的定义及其计算

在研究一元函数时，导数概念起着重要的作用. 对于二元函数，同样要研究函数对自变量的变化率. 二元函数的自变量有两个，它们是相互独立的，可以令其中一个自变量变化而将另一自变量固定，这时的二元函数实际上就是一元函数，它的导数称为二元函数的偏导数.

定义1 设函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，将y固定在y_0，如果函数$z=f(x,y_0)$在点x_0的导数存在，即极限

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\triangle x}$$

存在，则称其为函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)**对x的偏导数**，记作

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\triangle x},$$

亦可记作

$$f'_x(x_0,y_0),z_x(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)},\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}.$$

类似地，函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)对y的偏导数为

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\triangle y)-f(x_0,y_0)}{\triangle y}$$

亦可记作

$$f'_y(x_0,y_0),z_y(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)},\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}.$$

若函数$z=f(x,y)$在区域D内每点(x,y)对x的偏导数都存在，则此偏导数是区域D内x,y的二元函数，称为函数$z=f(x,y)$**对自变量x的偏导函数**. 记作

$$f_x(x,y),f'_x(x,y),z_x,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x}$$

类似地可定义函数$z=f(x,y)$**对y的偏导函数**. 记作

$$f_y(x,y),f'_y(x,y),z_y,\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial y}.$$

和一元函数的导函数及其在一点的导数值间的关系一样，偏导数$f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$分别是偏导函数$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$在点(x_0,y_0)的函数值. 以后在不会引起混淆的地方也把偏导函数称为偏导数.

计算二元函数对某一自变量的偏导数时，只须把另一自变量看作常量，应用一元函数的求导法，包括求导公式及求导法则，对该自变量求导即可.

例1 求$z=x^2\sin y$在点$(1,\frac{\pi}{2})$的偏导数.

解 求$\frac{\partial z}{\partial x}$时，把$y$看作常量，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y$$

求$\frac{\partial z}{\partial y}$时，把 x 看作常量，有

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y$$

再将$(1,\frac{\pi}{2})$代入$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$，即得

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,\frac{\pi}{2})}=2\cdot 1\cdot \sin\frac{\pi}{2}=2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,\frac{\pi}{2})}=1^2\cdot \cos\frac{\pi}{2}=0.$$

例2 求 $z=x^y(x>0,x\neq 1)$的偏导数.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

例3 求§2例2中的函数在点$(0,0)$的偏导数.

解 函数 $z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

点$(0,0)$是分段函数$f(x,y)$的分界点，故必须按定义求偏导数. 由(1)有

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(0+\triangle x,0)-f(0,0)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}0=0,$$

即 $f_x(0,0)=0$. 同理 $f_y(0,0)=0$. 故函数 $z=f(x,y)$在点$(0,0)$的两个偏导数都存在，但由§2例2知，此函数在点$(0,0)$并不连续. 因此二元函数的偏导数和连续的关系与一元函数可导必连续的结论不同：在点(x_0,y_0)，即使两个偏导数都存在，函数在该点也不一定连续. 这是因为由偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$的存在，只能保证动点(x,y)沿 $x=x_0$及 $y=y_0$趋于定点(x_0,y_0)时，$f(x,y)$趋于 $f(x_0,y_0)$，并不能保证动点(x,y)沿任意路径趋于定点(x_0,y_0)时，$f(x,y)$都趋于 $f(x_0,y_0)$.

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数，例如对三元函数 $u=f(x,y,z)$在点(x,y,z)对 x 的偏导数定义是：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x(x,y,z)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x,y,z)-f(x,y,z)}{\triangle x}$$

其偏导数的求法也与二元函数的完全类似.

例4 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$的偏导数.

解 引入中间变量 $v=x^2+y^2+z^2$，则 $r=\sqrt{v}$，这样 r 便是 x,y,z 的复合函数. 由于只有一个中间变量 v，求偏导时可用类似于一元复合函数的求导法则：

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r};$$

类似地有

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}.$$

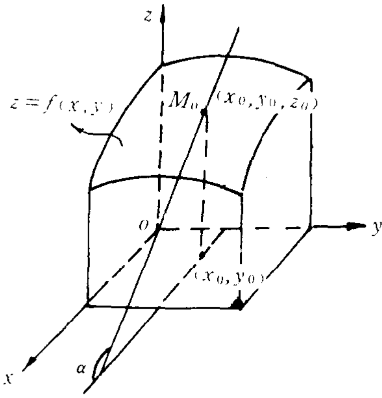


图 8.6

二、二元函数偏导数的几何解释

因为偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $z=f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 对 x 的导数值，所以偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就表示平面曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=y_0 \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 的切线对 x 轴的斜率，即 $f_x(x_0,y_0)=\mathrm{tg}\alpha$（图 8.6）. 同理，偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 表示平面曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ x=x_0 \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 的切线对 y 轴的斜率：即 $f_y(x_0,y_0)=\mathrm{tg}\beta$.（$\beta$ 为此平面曲线在点 M_0 的切线与 y 轴正向所夹的倾角）.

三、高阶偏导数

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)$、$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$ 的偏导数也存在，则称其为函数 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**. 按求导次序有四个二阶偏导数. 记作

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=f_{yx}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

同理可求出三阶、四阶……偏导数，二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**. $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 称为一阶偏导数，二阶偏导数中的 $f_{xy}(x,y)$ 及 $f_{yx}(x,y)$ 又称为**混合偏导数**，它们二者只是对 x,y 求偏导的次序不同. 可以证明：若在域 D 内 $f_{xy}(x,y)$ 及 $f_{yx}(x,y)$ 连续，则在此域内有 $f_{xy}(x,y)\equiv f_{yx}(x,y)$，即求偏导的结果与求偏导的次序无关（证明从略）.

例5 求函数 $z=\mathrm{e}^{xy}$ 的二阶偏导数.

解 因 $\frac{\partial z}{\partial x}=y\mathrm{e}^{xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x\mathrm{e}^{xy}$，

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\mathrm{e}^{xy},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\mathrm{e}^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\mathrm{e}^{xy}+xy\mathrm{e}^{xy}=(1+xy)\mathrm{e}^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\mathrm{e}^{xy}+xy\mathrm{e}^{xy}=(1+xy)\mathrm{e}^{xy}.$$

例6 证明函数 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

证 因 $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

故
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

例7 证明函数 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 满足方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

证 为计算方便，引入中间变量 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $u=\frac{1}{r}$，由例4知：$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$

由于函数 u 对 x,y,z 是对称的，故只需将上式中的 x 换成 y 及 z 便可得到：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$$

因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0$$

例6和例7中的两个方程都叫做拉普拉斯方程.

习 题 8—3

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$；　(2) $z=\sqrt{\ln(xy)}$；

(3) $z=e^{x+2y}\sin(xy^2)$；　(4) $z=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$；

(5) $u=\operatorname{arctg}(x-y)^z$；　(6) $u=x^{y^z}$；

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$；　(8) $z=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(9) $u=(xy)^z$；　(10) $u=\frac{1}{r}e^{-r}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2. 求函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 的偏导数.

3. 曲线 $\begin{cases}z=\frac{x^2+y^2}{4}\\ y=4\end{cases}$ 在点(2,4,5)的切线与正向 x 轴所夹倾角是多少？

4. $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

5. $z=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$，验证：$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

6. 验证函数 $z=f(\ln x+\frac{1}{y})$（f 为可微函数）满足方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

7. 验证函数 $z=x^nf(\frac{y}{x^2})$（f 为可微函数）满足方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$.