机 械 振 动 学

〔美〕S·提摩盛科著

本书有系統的論述工程中的振动問題，是机械振动方面的世界名著。全书从一个自由度的系統、非綫性系統讲起，进而論述两个及多个自由度的系統，最后探討彈性体的振动，对杆、膜、板、环、桥梁、船体、渦輪盘板及其他机械工程中的振动問題作了具体的分析。

中譯本原由徐华舫同志根据1937年第二版譯出，后又由翁心棡同志按照1955年第三版校訂重譯。

本书可作工程师、研究工作者处理振动問題时的重要参考书；也可作大专学校师生工程振动課程的教材或主要参考书。

S.Timoshenko
VIBRATION PROBLEMS IN ENGINEERING
Third Edition, D. Van Nostrand Company Inc.,1955
(根据美国 D.Van Nostrand 公司一九五五年第三版譯出)

*　*　*

机械振动学
〔美〕S·提摩盛科著
翁心棡　徐华舫譯

*

机械工业出版社出版（北京苏州胡同141号）
（北京市书刊出版业营业許可証出字第117号）
机械工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本 850×1168 1/32·印張 13 7/8·字数 352 千字
1963年7月中国工业出版社北京新一版，共印2,304册
1958年7月北京第一版·1965年3月北京第四次印刷
印数　7,001—11,500·定价（科七）2.30元

統一书号：15033·1042(1817)

譯 者 序

現代的工程科学迅速地走向精确計算的道路。这也就是說以前不太清楚的許多因素，現在正在逐个把它弄明白，以便設計时有更确切的把握。振动是这些因素中很重要的一个。这門科学配合着近代高速机器的发展，已經有了很大的成就。作为一个現代的工程师，不懂振动理論已經不行了，不論他是机械、航空、电机、还是土木工程师。就以土木工程师而論，看来他所要設計的結构，根本沒有迴轉的东西，似乎应該沒有什么振动問題。但事实証明振动理論对土木工程师仍是要紧的，普通桥梁之类的結构就有振动問題存在，跨度較长的鋼索桥还可能有自激振动的問題发生（工程史上已經有好几起桥梁被振断的事实了）。至于机械、航空、电机各种工程里的振动問題就更多了。

因此，振动理論在大学工科里，現在已經成为一門普遍修讀（必修或选修）的課程。目前，合适的中文課本还很缺少。提摩盛科这本机械振动学是一本体系比較完整的书。把它譯出来，一方面可供工程师們作参考之用，另一方面可供工科大学作教本用。就后一方面来說，只需在后几章中适当地增加一些习題就很合适了。

这本书原来是1951年由徐华舫按原著1937年第二版翻譯的。因为原著1955年第三版已到书，自然应按新版翻譯。这部分工作是由翁心櫚做的。对于新旧版相同的部分仍用徐华舫的旧稿。增譯部分力求語气与名詞前后一致。近年来力学名詞的翻譯比較統一。本书采用較为流行的譯名。也有一些譯名尙待商榷，在书中保留原名以供参考。

譯文內容如有錯誤，欢迎讀者不吝指正。

翁心櫚　徐华舫

1957年11月

目 次

作者第三版序言

自从本書的第一版在1928年出版以来，振动理論几乎已成为机械工程系的标准課程之一；这个理論也愈来愈引起結構工程师們的兴趣；同时在这时期内，振动的理論，特别在非綫性振动方面有新的發展。为了使本書更适合于教学需要，并且將若干較重要的新理論編入本書，因此作了增訂。这也就是增訂版的主要目的。

第一章关于具有一个自由度系統的振动問題，已作了澈底的增訂工作，使本章包含各方面的广泛应用，并增加了相当数量的習題。研究非綫性振动的第二章也較旧版大为扩展，介紹了处理这类問題的新方法。为了使本書适用于只讀过动力学基本課程的学生們，在第三，四章中应用較为熟知的达倫培尔原理来代替勒格蘭日方程式（Lagrangian Equations）。但在这兩章中关于多自由度系統振动的內容和前二版沒有很大的出入。有关于彈性体振动問題的第五章也經过澈底的改編，有若干新的問題，例如梁的弯曲及扭轉的組合振动，在本章中作了討論。最后，旧版中有关振动仪器的附录已全部删去。近年来关于測量振动的技术有很大的發展，如果把它們全部介紹就要占过多的篇幅。讀者如果对这方面有兴趣可以参看 M. Hetēnyi 所編的应力分析实驗手册（*Handbook of Experimental Stress Analysis*）。

S. 提摩盛科

D. H. 楊

波罗阿妥，加利福尼亞 1954 年 12 月

作者初版序言

現在机器的尺寸愈来愈大，轉速愈来愈高，因而机械設計中振动問題的分析也就愈益重要了。許多極重要的实际問題，如机器的均衡，轉軸和齿輪系統的扭振，渦輪叶片及盤板的振动，轉軸的弓狀迴旋（Whirling），鉄路軌道及桥梁在活載作用下的振动，机器底座的振动等，要想澈底了解这些問題，非懂得振动的原理不可。只有运用振动的原理，才能把机器的尺寸設計得使它在正常运轉中远离强烈共振的临界条件。

本書的写法是这样的，逐步建立振动理論的基础，同时配合許多例子，說明怎样用理論来解决实际的技术問題；有些例子是从实际使用中的机器或其他結構上取来的。本書最初的底稿是作者一九二五年給西屋电器制造公司（Westinghouse Electric and Manufacturing Company）的机械工程师們講振动問題时所写的講义，另一部分材料，取自作者早年出版的彈性理論一書[一]。

本書的內容約分为：

第一章論具有一个自由度系統的和諧振动。这里講了自由振动及强迫振动的一般理論，并举均衡机及振动仪器为应用实例。另外講到处理較复杂物系可用的瑞雷（Rayleigh）近似解法，并用它来計算变截面轉軸的弓狀迴旋速度。

第二章是具有一个自由度系統的非諧振动理論。这里講到了分析自由振动及强迫振动的近似解法。仔細分析了柔度（flexibility）随时間改变的物系的振动，并把結果用来研究电动机車平行杆原动系的振动問題。

第三章討論数个自由度的系統。首先建立具有数个自由度系統的一般振动理論，然后講到下列几个应用；車輛的振动，轉軸的扭振，数个支点上的軸的弓狀迴旋速度，以及減振器。

第四章是彈性物体的振动理論。这里談到的是：棱柱形杆的縱振、扭振、横振，变截面杆的振动，桥梁、渦輪叶片和船身的振动，圓环、薄膜、板、以及渦輪盤板的振动。

附录里把各种最重要的振动仪器簡略地介紹了一下，这些仪器在作振动的实驗研究时，都是非常有用的[二]。

S. 提摩盛科

安阿泊，密矢根州 1928 年 5 月 22 日

[一] 彈性理論（*Theory of Elasticity*），第二册（1916）——聖彼得堡，俄国。

[二] 这个附录三版已取消，理由見三版序言。——譯者

第一章

具有一个自由度的系統

1 自由和諧振动 一个彈性系統（如像一根有載荷的梁，或一根扭轉了的軸，或一条压縮的彈簧）在平衡位置上，受到一个冲击，或在其上突然增加一个外力，或者突然除去一个外力，使这个彈性系統脫离原来的平衡位置，在新的位置，系統構件的彈性力就不能再和載荷相平衡，于是振动發生。一般地說来，一个彈性体系能作許多种不同型式的振动。例如，一根弦綫或一根梁，它的振动型式就要看划分全長的节点数目有几个而定。在最簡單的一种情况中，只需用一个座标就可以把振动系統的形态表明了。这种系統称为具有一个自由度的系統（*systems with one degree of freedom*）。

拿圖1的情况来研究，如果把重物 W 安排得只能作上下的移动，而且彈簧的質量比重物 W 的質量小得多的話，那末这个系統便算作是一个自由度的系統。系統的形态只要用重物在鉛垂方向的位移便完全表明了。

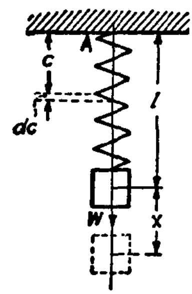

圖 1

对上述系統加一冲击，或突然增加一外力，或突然除去一外力，它就能产生振动。这种只靠彈簧的彈性力所維持的振动称为自由振动或自然振动。这种振动的解析式可以得自运动的微分方程式；只要作用在运动物体上的力全知道的話，运动微分方程式总是可以列出来的。

令 k 代表使彈簧产生單位伸延所需要的載荷。这个量称为“彈簧常数”（*spring constant*）。如果載荷用磅作單位，伸延用吋作單位，

則彈簧常数的單位便是磅/吋。在重力W的作用下彈簧的静变位是

$$\delta_{st}=\frac{W}{k}。$$

令x代表振动的重物由平衡位置計算起的鉛垂方向位移，向下定为正值，則当重物在某位置x时彈簧中的張力等于

$$F=W+kx。\tag{a}$$

我們將根据牛頓定律建立重物的运动微分方程式；这条定律說明一个質点的質量与該質点加速度的乘积，等于作用于該質点沿加速度方向的作用力。現在振动物体的質量是W/g，g是重力加速度；物体W的加速度是位移x对时間的二次导数，用$\ddot{x}$表示之；作用在物体上的力有重力W，方向向下，和彈簧的作用力F（方程式a），当重物在圖1所示的位置时，F力向上作用。所以現在可以列出重物的运动微分方程式

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=W-(W+kx)。\tag{b}$$

不論重物W在那个位置上，这个方程式都是对的。譬如，在振动中，物体到了平衡位置的上面，并且彈簧产生压力时，則（a）式的值为負值，代入（b）成为正值，这时（b）式右側二項具有相同的符号。也就是重力和彈簧力相加起来，这显然是理所当然的。

引用下列符号

$$p^2=\frac{kg}{W}=\frac{g}{\delta_{st}},\tag{c}$$

微分方程式（b）可以写成如下的形式

$$\ddot{x}+p^2x=0。\tag{1}$$

我們用 $x=C_1\cos pt$ 或 $x=C_2\sin pt$ 代到方程式（1）里去都能滿足此方程式；这里C_1和C_2是兩个任意常数。將这兩个解答合在一起便是（1）式的通解（*general solution*）：

$$x=C_1\cos pt+C_2\sin pt。\tag{2}$$

由此式可以看出重物W的鉛直运动是一种振动，因为$\cos pt$和$\sin pt$都是周期函数，每隔时間間隔τ就重复一次，因而可以列出关系式

$$p(\tau+t)-pt=2\pi。 \tag{d}$$

这个时間間隔称为振动的周期。其值可由（d）式得到

$$\tau=\frac{2\pi}{p}$$

或用（c）式的符号，

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{W}{kg}}=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}。 \tag{3}$$

可見振动的周期只决定于重量W和弹簧常数k的数值，而与振幅的大小無关。我們也可以这样說；一塊悬在弹簧上的重物W的周期和一个摆長等于弹簧的静变位δ_{st}(statical deflection 或譯为静伸長）的数字摆的周期相等。只要静变位δ_{st}按理論算出或用实驗方法定出，振动的周期τ就可用公式（3）算出来。

單位时間内的振动次数，例如每秒鐘的振动次数，称为振动的频率（*frequency*)。以f代表频率，則

$$f=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}。 \tag{4}$$

方程式（2）所代表的振动称为和諧运动(*harmonic motion*)。要决定积分常数C_1与C_2，必需考虑运动的起始条件。例如，設在初瞬时($t=0$) 重物W离平衡位置的位移是x_0，它的初速是$\dot{x}_0$。

則將$t=0$代入方程式（2），得

$$x_0=C_1; \tag{e}$$

再將方程式（2）对时間微分一次，并將$t=0$代入，卽得

$$\frac{\dot{x}_0}{p}=C_2; \tag{f}$$

將（e）与（f）兩常数的值代入方程式（2），得重物W的振动方程式如下：

$$x=x_0\cos pt+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt。 \tag{5}$$

由这个式子我們看到整个振动包括兩部分；一部分是与$\cos pt$成正比的振动，其值决定于重物的初位移，另一部分与$\sin pt$成正比，其值决定于重物的初速$\dot{x}_0$。这兩部分都可以像圖 2a 与圖 2b 那样用

圖綫表示出来，表示位移对应于时間的关系。振动物体W在某一时間t的总位移x就是把瞬时t时圖2a与圖2b两条曲綫的縱座标加在一起而求得。由此就得到曲綫如圖2c所示。

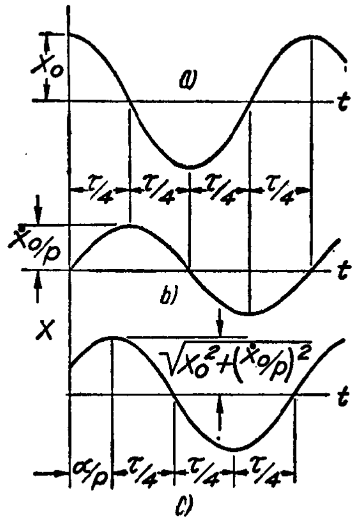

圖　2

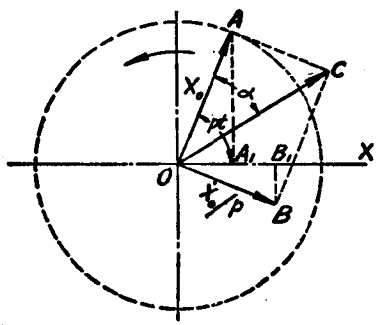

圖　3

另一种方法是用迴轉的矢量来表示振动。試設想一个模为x_0的矢量$\overline{OA}$以等角速度p繞定点O迴轉(圖3)。这个角速度p称为振动的角頻率 (*angular frequency*)。如果在初瞬时($t=0$)矢量与x軸重合，則在任一瞬时t，該矢量与x軸的夾角就等于pt。矢量在x軸上的投影OA_1等于$x_0\cos pt$，就代表了式(5)的第一項。現在再取一个矢量$\overline{OB}$垂直于矢量$\overline{OA}$，其模为$\frac{x_0}{p}$，它在x軸上的投影便是式(5)的第二項。这样，振动物体的总位移x便等于这兩个以角速p迴轉着的互相垂直的矢量$\overline{OA}$及$\overline{OB}$在x軸上的投影的和。

不用$\overline{OA}$及$\overline{OB}$兩个矢量，而用这兩矢量的几何和，亦即矢量$\overline{OA}$与$\overline{OB}$所組成的平行四边形的对角綫矢量$\overline{OC}$也是一样，$\overline{OC}$在x軸上的投影便是重物W的总位移。从圖3可以看出矢量$\overline{OC}$的模等于

$$\overline{OC}=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{x_0}{p}\right)^2},\qquad (8)$$

它与 x 軸的夾角是

$$pt-\alpha,$$

这个 α 角是

$$\alpha=\arc\tan\frac{\dot{x}_0}{px_0}。\qquad (h)$$

由上面的討論，显然方程式（5）也可以用下列的形式来表达

$$x=\overline{OC}\cos(pt-\alpha)。\qquad (6)$$

式中 $\overline{OC}$ 与 α 如式（g）与（h）所表示，是取决于运动的起始条件的兩个新的常数。这里可以看出，兩个簡諧运动，其中一个与 $\cos pt$ 成正比，另一个与 $\sin pt$ 成正比，加在一起的結果仍是一个与 $\cos(pt-\alpha)$ 成正比的簡諧运动，如圖 2c 所示。这条曲綫最大的縱座标等于圖 3 矢量 $\overline{OC}$ 的模。它代表振动物体离其平衡位置的最大位移，称为振幅（*amplitude of vibration*）。

由于兩个迴轉矢量 $\overline{OA}$ 及 $\overline{OC}$ 之間有一夾角 α，圖 2c 曲綫的最大縱座标所在点和圖 2a 曲綫的最大縱座标所在点相差 α/p 时間。这种情形，可以說圖 2c 所代表的振动落在圖 2a 所代表的振动之后，α 角称为这兩种振动的位相差（*phase difference*）。

例 題

1. 重物 $W=30$ 磅鉛直挂在一根長 $l=50$ 吋，截面积 $A=0.001$ 吋^2 的鋼絲上。鋼的彈性模数 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2，試求重物自由振动的頻率。設初位移 $x_0=0.01$ 吋，初速 $\dot{x}_0=1$ 吋/秒，求自由振动的振幅。

〔解〕 鋼絲的靜伸長 $\delta_{st}=30\cdot50/(30\times10^6\times0.001)=0.05$ 吋。按方程式（4）：$f=3.13\sqrt{20}=14.0$ 秒$^{-1}$。由方程式（g）振幅为 $\sqrt{x_0{}^2+(\dot{x}_0/p)^2}=\sqrt{(0.01)^2+[1/(2\pi\times14)]^2}=0.01513$ 吋。

2. 重物 W 放在一根長度为 l 的梁上，如圖 4 所示。不計梁的質量，試定彈簧常数，以及物体在鉛直方向作自由振动的頻率。

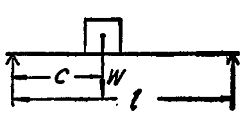

圖 4

〔解〕 梁在重荷下的靜变位等于

$$\delta_{st}=\frac{Wc^2(l-c)^2}{3lEI}.$$

式中 c 是荷重与梁左端的距离，EI 是梁在鉛垂面內的抗撓剛度。假定这个鉛垂面包含梁的截面的兩个主軸之一，这样鉛垂荷重便只能产生鉛垂方向的变位。按彈簧常数的定义，現在的

$$k=\frac{3lEI}{c^2(l-c)^2}。$$

將 δ_{st} 代入方程式（4）便可求得所要的頻率。关于梁的質量对于振动頻率的影响將在下文中加以討論。

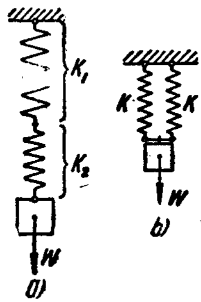

圖　5

3. 荷重 W 鉛直地挂在兩根彈簧下如圖 5 a 所示。这兩根彈簧的彈簧常数分别为 k_1 与 k_2，試計算这彈簧組合的彈簧常数及荷重作鉛直振动时的頻率。將重物 W 改悬在兩根相同的平行彈簧上，如圖 5 b 所示，再求振动的頻率。

〔解〕　按圖 5 a 的情形，荷重 W 的靜变位是

$$\delta_{st}=\frac{W}{k_1}+\frac{W}{k_2}=\frac{W(k_1+k_2)}{k_1k_2}。$$

即彈簧組合的彈簧常数是 $k_1k_2/(k_1+k_2)$。將 δ_{st} 代入方程式（4），得振动頻率

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gk_1k_2}{W(k_1+k_2)}}。$$

按圖 5 b 的情形，

$$\delta_{st}=\frac{W}{2k}，\ 而 f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2gk}{W}}。$$

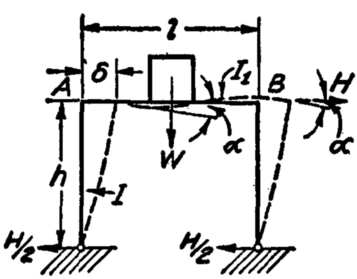

圖　6

4. 圖 6 的間架（*frame*）中間載一荷重 W，求架子在水平方向的振动周期。在計算中略去內架本身的質量。

〔解〕　我們首先处理靜力学的問題，使一个水平力 H 作用在荷重 W 的作用点上，求架子的水平变位 δ。不計各杆由于張力及压力所产生的变形，而仅計算弯曲所生的变形，則水平杆 AB 受兩个相等力偶 $Hh/2$ 的弯曲。节点 A 及 B 的角变位是

$$\alpha=\frac{Hhl}{12EI_1}。$$

現在把鉛直的兩杆都作为肱梁 (cantilevers)来研究，受水平力$\frac{H}{2}$的作用而生弯曲。这样水平变位 δ 便由兩部分組成，一部分是由于肱梁弯曲的結果，另一部分是由于上面計算过的 A，B 节点的角变位 α 而产生。因此

$$\delta=\frac{Hh^3}{6EI}+\frac{Hh^2 l}{12EI_1}=\frac{Hh^3}{6EI}\left(1+\frac{1}{2}\frac{l}{h}\frac{I}{I_1}\right)。$$

彈簧常数便是

$$k=\frac{H}{\delta}=\frac{6EI}{h^3\left(1+\frac{1}{2}\frac{l}{h}\frac{I}{I_1}\right)}。$$

代入方程式（3），得

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{Wh^3\left(1+\frac{1}{2}\frac{l}{h}\frac{I}{I_1}\right)}{6gEI}}。$$

如果水平杆的剛度比鉛直杆的剛度大很多，那末$\frac{I}{I_1}$便很小，可以略去。于是

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{Wh^3}{6gEI}},$$

因而頻率是

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6gEI}{Wh^3}}。$$

5. 圖 7 中荷重W代表一升降机的吊籠。它以等速 v_0 下降。升降机的鋼繩相当于一根彈簧，如在下降时鋼繩的上端 A 突然停止，求鋼繩所受之最大应力。設 $W=10{,}000$ 磅，$l=60$ 呎，鋼繩的截面积 $A=2.5$ 方吋，鋼繩的彈性模数 $E=15\times10^6$ 磅/方吋，$v_0=3$呎/秒，鋼繩的質量可以略去不計。

〔解〕 在等速下降时鋼繩的張力等于 $W=10{,}000$ 磅当發生意外的一瞬时鋼繩的伸長 $\delta_{st}=Wl/AE=0.192$ 吋。由于吊籠具有速度 v_0，它不能立时停止，而將在繩上振动。从意外發生的一瞬时起計算时間，在該瞬时吊籠离其平衡位置之位移为零而速度为 v_0。从方程式（5）我們可决定振动的振幅等于 v_0/p，其中 $p=\sqrt{g/\delta_{st}}=44.8$ 秒$^{-1}$而 $v_0=36$ 吋/秒。因此鋼繩的最大伸長为 $\delta_d=\delta_{st}+v_0/p=0.192+36/44.8=0.192+0.803=0.995$ 吋，而繩的最大应力为 $(10{,}000/2.5)(0.995/0.192)=20{,}750$ 磅/方吋。可以看出，由于上端的突

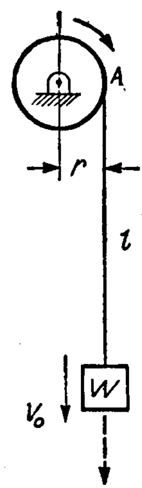

圖 7

然停止，鋼繩的应力几乎增大了五倍。

習 題

1. 圖 1 所示螺旋彈簧的螺圈平均直徑 $D=1$ 吋，簧絲直徑 $d=0.1$ 吋，圈数 $n=20$ 圈。簧絲的剪切彈性模数为 $G=12(10)^6$ 磅/方吋，悬挂物体重量 $W=30$ 磅。計算自由振动的周期。

答：$\tau=0.64$ 秒。

2. 圖 4 所示的梁，具有跨度 $l=12$ 呎及如圖 8 所示的 T 形截面。梁用鋁制成，鋁的彈性模数 $E=10(10)^6$ 磅/方吋。荷重 $W=500$ 磅。如重物 W 放于 $c=4$ 呎处，并且不計梁本身的質量，求重物在鉛垂方向自由振动的頻率。

答：$f=6.47$ 次/秒。

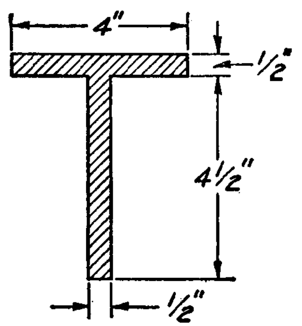

圖 8

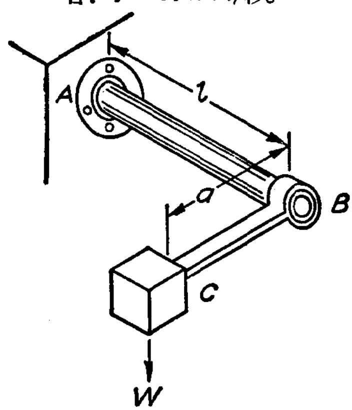

圖 9

3. 如果上題的重物 W 从梁的中央位置高于支座水平綫 $h=1$ 吋处自由下墜落于梁上时，問所产生的最大动变位 (dynamical deflection) δ_{max} 將为若干？

答：$\delta_{max}=1.125$ 吋。

4. 計算圖 9 中重物 $W=10$ 磅的鉛垂振动頻率。实心圓鋼軸 AB 的一端 A 固結在牆內，其長度 $l=3$ 呎，直徑 $d=1$ 吋。鋼条 BC 一端与鋼軸固結在 B 处，其長度 $a=1$ 呎，寬 $b=1$ 吋，厚 $t={}^1/_4$ 吋。鋼的 $E=30(10)^6$ 磅/方吋，$G=12(10)^6$ 磅/方吋。

答：$f=5.74$ 次/秒。

5. 为了減低例題 5 中鋼繩的最大由于动力作用的应力，引用一根彈簧常数 $k=2000$ 磅/吋的彈簧装置在繩的末端与吊籠之間。再求当繩的上端突然停