高等数学简明教程（下册）

张润琦　主编

北京理工大学出版社

高等数学简明教程

下　　册

主　编　张润琦
编　写　毛京中　程杞元
　　　　陈一宏　苏伟宏
审　稿　李心灿　魏光美

北京理工大学出版社

内容简介

本书是根据原国家教委1995年颁布的高等学校工科本科生“高等数学课程教学基本要求”，参考原国家教委1996年制订的研究生入学考试“数学考试大纲”编写的。全书分上、下两册，上册包含函数的极限和连续，一元函数微积分和常微分方程；下册包含向量代数和空间解析几何，多元函数微积分和级数。本书尽量从实际问题引入数学概念，注意培养学生用微积分的思想、方法去观察、解决实际问题的能力。例题、习题题型丰富，有不少题结合实际应用，利于培养学生分析问题、解决问题的能力和应用意识。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学简明教程　下册/张润琦主编．—北京：北京理工大学出版社，1999.11

ISBN 7-81045-609-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．张…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第32441号

责任印制：刘京凤　责任校对：郑兴玉

北京理工大学出版社出版发行

（北京市海淀区白石桥路7号）

邮政编码100081　电话(010)68912824

各地新华书店经售

北京国马印刷厂印刷

*

850毫米×1168毫米　32开本　10.125印张　256千字

1999年11月第1版　1999年11月第1次印刷

印数：1—5000册　定价：14.00元

目　　录

第六章　向量代数与空间解析几何

本章首先建立空间直角坐标系，介绍向量的一些运算，然后以向量为工具讨论空间平面与直线，最后介绍空间曲面与曲线．

§1　空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

过空间一个定点 O，作三条互相垂直且有相同长度单位的数轴，就构成了空间直角坐标系．点 O 叫做坐标原点，三条数轴分别叫做 x 轴、y 轴、z 轴．我们在本章使用的空间直角坐标系都是右手系，它的 x 轴、y 轴、z 轴的次序与方向是按右手法则排列的，即若将右手四个手指从 x 轴正向经过 90°转到 y 轴时，右手姆指刚好指向 z 轴正向．

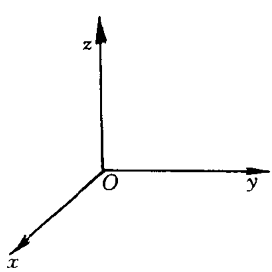

图 6-1

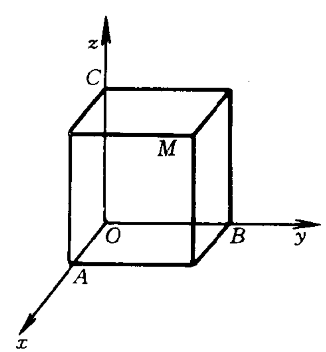

图 6-2

取定了空间直角坐标系后，就可以建立空间的点与三个有序实数之间的对应关系．设 M 是空间中的一个点，过 M 分别作垂直于三个坐标轴的平面，这三个平面与三个坐标轴分别交于 A、B、C 三点，设这三点在三个坐轴上的坐标分别是 x、y、z，则称有序数组 (x,y,z) 为点 M 的坐标．其中 x、y、z 分别叫做点 M 的 x 坐标、y 坐标、z 坐标．反之，任意给定一有序数组 (x,y,z) 在空间中有唯一的一个点以 (x,y,z) 为坐标．因此，空间中的点与有序数之间建立了一一对应关系．

在空间直角坐标系中，每两条坐标轴所确定的平面叫做坐标面．三个坐标平面把整个空间分成八部分，每一部分叫做一个卦限．上半空间的四个依次称为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限；下半空间的四个依次称为Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限．

在每个卦限中，点的坐标符号分别为

Ⅰ(+,+,+)	Ⅱ(−,+,+)
Ⅲ(−,−,+)	Ⅳ(+,−,+)
Ⅴ(+,+,−)	Ⅶ(−,+,−)
Ⅷ(−,−,−)	Ⅸ(+,−,−)

原点的坐标为 $(0,0,0)$；x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$；y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$；z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$．xOy 面上点的坐标为 $(x,y,0)$；yOz 面上点的坐标为 $(0,y,z)$；zOx 面上点的坐标为 $(x,0,z)$．

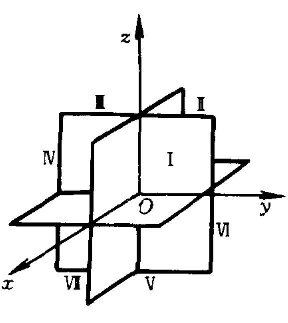

图 6-3

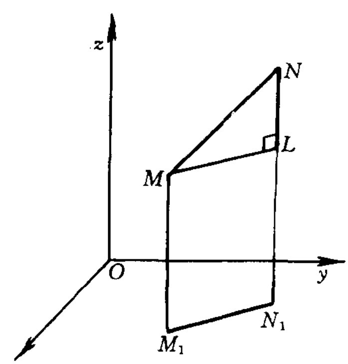

图 6-4

2. 空间两点间的距离

设 $M(x_1,y_1,z_1)$ 和 $N(x_2,y_2,z_2)$ 是空间中两点，过 M 和 N 分别作垂直于 xOy 面的直线，它们分别与 xOy 面交于 M_1,N_1，过 M 作 NN_1，的垂线 ML，故 M 到 N 的距离

$$d=\sqrt{ML^2+NL^2}$$
$$=\sqrt{M_1N_1^2+NL^2}$$

由于 $M_1(x_1,y_1,0)$，$N_1(x_2,y_2,0)$，因此由平面解析几何可知 $M_1N_1^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$，又 $NL=|z_2-z_1|$，故

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特别，点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 间的距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

与平面解析几何中两点间的距离公式相比较，空间中两点间的距离公式中只是增加了一项 $(z_2-z_1)^2$. 此外，空间直角坐标系平移后点的新旧坐标之间的关系式与平面情形相比较也只是增加了一项，即

$$\begin{cases}x=a+x'\\ y=b+y'\\ z=c+z'\end{cases}$$

其中 (a,b,c) 是新原点 O' 的坐标，(x',y',z') 与 (x,y,z) 分别是点在新旧坐标系中的坐标．证明略．

习　题 6-1

1. 求点 $(2,-1,3)$ 关于原点、各坐标轴及各坐标平面的对称点的坐标．

2. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离．

3. 证明以 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形．

4. 在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点．

§2 向量及其线性运算

1. 向量概念

在实际问题中，我们常遇到两类不同性质的量．一类是只具有大小的量，称为数量，例如时间、质量、温度等．另一类是不仅具有大小而且还有方向的量，称为向量（或矢量），例如力、速度等．向量可以用有向线段表示．有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．（如图 6-5）以 A 为起点，B 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\boldsymbol{a}$.

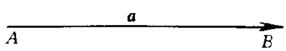

图 6-5

向量 $\overrightarrow{AB}$（或 $\boldsymbol{a}$）的大小叫做向量的模，记作 $|\overrightarrow{AB}|$（或 $|\boldsymbol{a}|$）. 模为零的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$，零向量没有确定的方向，或者说它的方向是任意的．模为 1 的向量称为单位向量，与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^0$. 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反模相等的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所在的线段平行，则称此二向量平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 我们这里讨论的都是自由向量，即若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 模相等且方向相同，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，它们经过平移后能够完全重合．在这个意义上，相互平行的向量又可称为共线的向量．为了讨论的方便起见，常常把向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行移动得一以原点为起点的向量 $\overrightarrow{OM}$（$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$）. 以 M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 叫做点 M 的向径．

2. 向量的加减法

根据力学中力、速度等的合成法则，我们对一般的向量加法有如下定义

定义　设向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以这两个向量为邻边作平行四

边形，其对角线向量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和向量，记作$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，这种求和的法则叫做平行四边形法则．

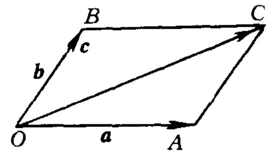

图 6-6

由于$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，因此也可以用三角形法则定义两向量的和，即将向量$\boldsymbol{b}$平移，使其起点与$\boldsymbol{a}$的终点重合，则$\boldsymbol{a}$的起点到$\boldsymbol{b}$的终点的向量就是$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 求两个平行向量的和或多个向量的和时利用三角形法则较方便．

向量加法有以下运算规律：

（1）交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

（2）结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

这两个运算规律可由图 6-7 和图 6-8 得到证明．

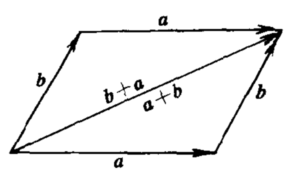

图 6-7

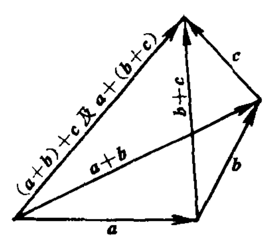

图 6-8

利用加法的逆运算便可定义向量的减法．

定义　若$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$则称$\boldsymbol{c}$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差向量，记作$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

也可以利用$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$定义$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差．以下图 6-9 中的$c$都表示$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差向量．

3. 数与向量的乘积

定义　实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的乘$\lambda\boldsymbol{a}$（叫做数乘向量）是一个向量，它的模$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向为，当$\lambda>0$时$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$同向；当$\lambda<$

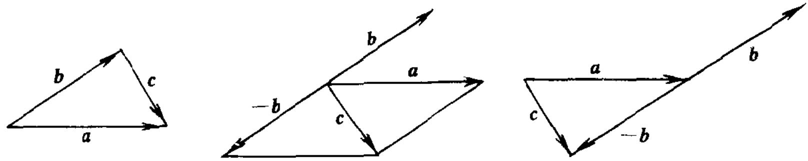

图 6-9

0 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

数乘向量有下列运算规律：

(1) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

证明略.

由数乘向量定义及结合律可知 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$，因此

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

由此可以推出，对任意两个互相平行的向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 与 $\boldsymbol{b}$，必存在数 λ 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$；反之，若上式成立则必有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

4. 向量的坐标表示

以上向量的概念及线性运算都是用几何方法定义的，但是有些问题仅靠几何方法很难解决，下面要引进向量的坐标，把向量与数组联系起来，把向量的运算化成数的运算.

设$\overrightarrow{OM}$是起点为原点终点为 $M(x,y,z)$的向量. 由向量加法知

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

在 x、y、z 轴的正方向分别取单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{j}$(称为基本单位向量)，则有$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$，于是有

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

此式称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式，它也可以简写为

$$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$$

其中 x、y、z 称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标．

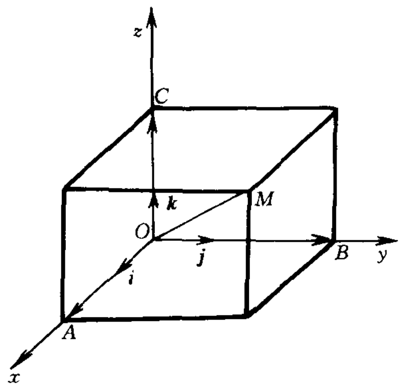

图 6-10

利用向量的坐标表示式，可以将前面用几何方法定义的向量的模及线性运算化成向量的坐标之间的运算(其中用到加法及数乘向量的运算规律)．

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{i}_2+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(x\boldsymbol{i}_1+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\pm(x\boldsymbol{i}_2+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}\\\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(x\boldsymbol{i}_1+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

当$\overrightarrow{M_1M_2}$是起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$的向量时，由于

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$$

$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$$

因此有

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

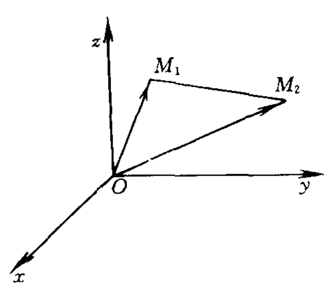

图 6-11

此式即为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式，

其中 x_2-x_1、y_2-y_1、z_2-z_1 为$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标．因此若将$\overrightarrow{M_1M_2}$平移使 M_1 与原点重合时，则 M_2 被移到点$(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$.

利用向量的坐标，可以把 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 表示为

$$x_2=\lambda x_1 \qquad y_2=\lambda y_1 \qquad z_2=\lambda z_1$$

或

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

在此式中，若某个分母为零，则相应的分子也应取为零．例如 $z_2=0$ 则表示向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点为终点的 z 坐标相同，即向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直于 z 轴，由于 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{a}$ 也垂直于 z 轴，因此相应的 z_1 应是零．

5. 向量的方向余弦

这里要讨论如何用向量的坐标表示向量的方向．

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴正向的夹角分别为 α、β、γ，则 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，而 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦．方向余弦唯一地确定了向量的方向．设 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，将 $\boldsymbol{a}$ 的起点移至原点使$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，则

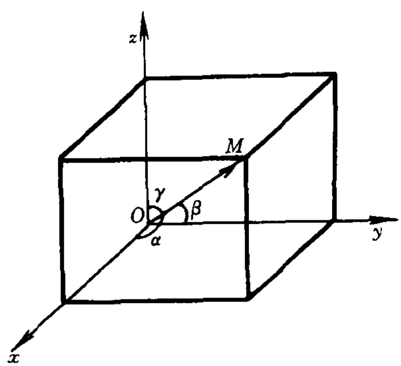

图 6-12

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

由以上三式可以得到方向余弦之间的关系式

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

且

$$\boldsymbol{a}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

例 1 已知 $M_1(1,-2,3)$，$M_2(0,2,-1)$，求$\overrightarrow{M_1M_2}$的模及方向余弦．

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(0-1)\boldsymbol{i}+(2-(-2))\boldsymbol{j}+(-1-3)\boldsymbol{k}$

$$=-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{33}$$

$$\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{33}} \qquad \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{33}} \qquad \cos\gamma=\frac{-4}{\sqrt{33}}$$

例 2 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 5，它与 x、y 轴正方向的夹角都是 $60°$，与 z 轴正方向的夹角是钝角，求向量 $\boldsymbol{a}$.

解 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0=|\boldsymbol{a}|\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$

由

$$\alpha = \beta = 60° \qquad \cos\alpha = \cos\beta = \frac{1}{2}$$

得

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}$$

由于 γ 是钝角，故

$$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{a} = 5\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$= \left\{\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right\}$$

习 题 6-2

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=60°$，且 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=8$，计算 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 和 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

2. 设向量 $\overrightarrow{AB}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$，其中点 A 的坐标为 $(2,-1,7)$，求点 B 的坐标.

3. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$ 的单位向量.

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,3\}$，$\boldsymbol{b}=\{-4,5,8\}$，$\boldsymbol{c}\{-2,1,0\}$，求向量 $\boldsymbol{d}$ 使 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$ 是零向量.

5. 设点 A、B、M 在一直线上，$A(1,2,3)$，$B(-1,2,3)$，且 $AM:MB=-\frac{3}{2}$，求点 M 的坐标.

6. 设一向量与 x 轴和 y 轴的夹角相等，而与 z 轴的夹角是前者的两倍，求此向量的方向角.

7. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与单位向量 $\boldsymbol{j}$ 成 $60°$角，与单位向量 $\boldsymbol{k}$ 成 $120°$角，且 $|\boldsymbol{a}|=5\sqrt{2}$，求向量 $\boldsymbol{a}$.

8. 向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于两向量 $\boldsymbol{b}=\{7,-4,-4\}$ 和 $\boldsymbol{c}=\{-2,-1,2\}$ 的夹角平分线，且 $|\boldsymbol{a}|=5\sqrt{6}$，求 $\boldsymbol{a}$.

§3 向量的乘积

1. 向量的数量积

(1) 数量积的概念

在物理学中我们知道，当质点在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿某一直线由 A 移动到 B，若记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{s}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}) \tag{6-1}$$

其中 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{s})$ 表示 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角. 两个向量之间的这种运算在其它实际问题中也会遇到，故给出如下定义：

定义 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两向量，则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的

数量积(又称点积或内积,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,其中$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

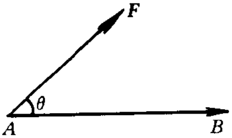

图 6-13

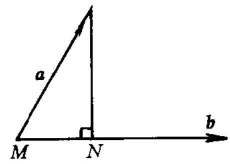

图 6-14

由定义知,(6-1)式中的功可以表示成 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两向量且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,称$|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影,记作$(\boldsymbol{a})_b$,即$(\boldsymbol{a})_b=|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. 若将 $\boldsymbol{a}$ 平移,使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点同为 M(图 6-14),是线段 MN 的长等于$|(\boldsymbol{a}_b)|$. 由数量积定义有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{a})_b=|\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{b})_a$$

$$(\boldsymbol{a})_b=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\qquad(\boldsymbol{b})_a=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$$

数量积有下列运算规律:

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(2) 结合律　$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$　(λ 是数量)

(3) 分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

其中(1)(2)可利用数量积定义加以证明,由于$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_c$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a})_c+|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{b})_c=|\boldsymbol{c}|((\boldsymbol{a})_c+(\boldsymbol{b})_b)$,易证$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_c=(\boldsymbol{a})_c+(\boldsymbol{b})_c$,故运算规律(3)即得证.

(2) 数量积的坐标表示式

设向量

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$$

由数量积运算规律

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\
&= x_1x_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+x_1y_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+x_1z_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})+\\
&\quad y_1x_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+y_1y_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})+y_1z_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})+\\
&\quad z_1x_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+z_1y_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})+z_1z_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})
\end{aligned}
$$

由数量积定义有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0$$

故 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

此式为数量积的坐标表示式．由此有

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

且有两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \Longleftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$（其中 $\Longleftrightarrow$ 表示充分必要条件）

例 1 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 $A(2,1,3)$，$B(1,2,1)$，$C(3,1,0)$，求 BC 边上的高 AD 的长．

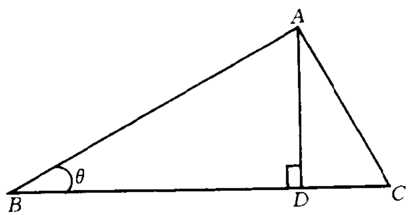

图 6-15

解 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}\\
&= \frac{1\times 2+(-1)(-1)+2(-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}}\\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
AD &= |\overrightarrow{BA}|\sin\theta\\
&= \sqrt{6}\sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{35}{6}}
\end{aligned}
$$