高等学校教学用書

數学物理方程講义

吳新謀編

高等教育出版社

本書主要对象是綜合大学數学系学生。可作为研究所研究实習員(微分方程)補課之用。亦可作为力学(連續介質力学)与物理專業学生参考之用。

數学物理方程講义

吳新謀編

高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇号
(北京市書刊出版業營業許可証出字第〇

京華印書局印刷　新華書店總

書号415(課423)　開本850×1168 1/32　印張10 1/
一九五六年一月北京第一版
一九五六年一月北京第一次印刷
印數1—3,000　定價(7)¥1.2

目　錄

序

1954春季，为了給中國科学院數学研究所微分方程小組研究实習員同志們補課，我們編寫了这本講义。經过初步修改後，在同年夏，高等教育部举办暑期綜合性大学教学研究座談会數学物理方程講座時，这部講义被印出作为講座講义的一部分。

講义最主要的目的，是要通过对數学物理方程基本知識的学習，初步明瞭这門学問的若干基本問題，和处理它們的一些方法。

在第一章裏，我們說明了定解問題提出的原因，並給了定解問題較明確的定义，和处理它的一般步驟。

第二章談双曲型方程。通过黎曼方法，直接進入对尤拉-波阿松方程的探討，因而導出 Asgeirsson 恆等式，並利用此恆等式解決了一般波動方程式的兩个定解問題。內容大抵取材於下列各書：

С. Л. Соболев, Уравнения математической Физики. (Г. И. Т. Л., Москва-Ленинград, 1950)。國际書店有影印本。鐵敏同志等已把这書譯为中文，將由高教出版社出版。

E. Picard, Leçons sur quelques types Simples des équations aux dérivées particlles. (Gauthiers-Villars, Paris 1927).

G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. II. (Gauthiers-Villars, Paris, 1889).

R. Couraut und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, t. II. 有俄英譯文，中譯本正在進行中。

但这部分材料的安排，可以看作本講义与一般教科書不同點之一。

第三章談橢圓型方程。除若干次序的調整和材料的補充外，可以說大部分取材於 Соболев 院士書，小部分取材於：

И. Г. Петровский, Лекций об Уравнениях с Частными Производными (Г. И. Т. Л., Москва-Ленинград, 1953).

E. Goursat, Cours d'Analyse Mathématique, t. III. (Gauthiers-Villars, Paris, 1927).

第四章談拋物型方程。只討論了熱導方程，內容取材於 E. Goursat 書。

第五章談線性二級偏微分方程一般理論。由郭西一郭瓦洛甫斯加婭定理出發，接着引進了特徵理論。在这基礎上，对前三章古典結果進行討論，說明分類的重要性，同時提出若干未解决問題。最後定义了基本解，作为三類型的共同性。內容大抵取材於：

J. Hadamard, Problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. (Hermann, Paris 1932)，有英文本(1923 初版，1952 由 Dover Publications 重版)。

这一部分材料，一般教科書介紹比較少，但还是受多數学者重視的，所以我們把它們吸收進來了。

前後共有習題約二百个，可供讀者自己練習之用。

这講义的缺點是顯然的，例如 Соболев 院士書第二十二章以後各章(包含富氏方法，廣义解等)的材料，都是很重要的，我們沒有能吸收到講义裏來。又如 Петровский 院士和 Соболев 院士所提出的各發展方向，我們也沒有能詳加介紹。这些都希望讀者自行多加注意。

講义裏一定还有許多錯誤和缺點，希望讀者們多多加以批評，多提些意見，俾我們能進行修正。

在編輯这本講义時，我們得到了秦元勳，馮康，丁夏畦，王光寅，林坚冰，邱佩璋，孫和生等同志的協助，在修改校訂時，又得董光昌，陈良勁，王光寅，邱佩璋諸同志提出了許多宝貴的意見。我們在这裏向他們致謝。

編者　一九五五年五月於北京

第一章　前言

§1. 微分方程研究的來源

微積分發明後不久，數学家就開始了微分方程的研究，由於微積分在數学其他各分枝和科学技術的其他各部門的应用，这些学問又大量的提出微分方程的問題。

在幾何学裏①要研究剛体的运動情形，就提出了方程組：

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt}&=\beta r-\gamma q,\\ \frac{d\beta}{dt}&=\gamma p-\alpha r,\\ \frac{d\gamma}{dt}&=\alpha q-\beta p.\end{aligned}\tag{1}$$

研究兩組共軛系統曲線時，就提出了方程式

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial\theta}{\partial u}+b\frac{\partial\theta}{\partial v}+c\theta=0.\tag{2}$$

研究某特殊曲面上的共軛系統曲線時，就碰到了方程式

$$(\rho-\rho_1)\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\partial\rho_1}+n\frac{\partial\theta}{\partial\rho}-m\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}=0.\tag{3}$$

最著名的則是研究極小曲面時提出的方程式

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.\tag{4}$$

在函數論方面，为了研究分析函數 $Z=f(z)=P+iQ$, $z=x+iy$；提出了著名的郭西黎曼方程組：

---

① 参閱苏步青：微分幾何学。

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{5}$$

和拉普拉司方程式

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0. \tag{6}$$

在古典力学裏，最一般的运動方程式就是一組二級常微分方程,流体力学裏的一般运動方程式則係一組二級偏微分方程,彈性力学和塑性力学的研究,也是由偏微分方程出發的。

在數学其他各分支中,提出的微分方程还很多,我們不在这裏一一罗列了①。

科学的其他各部門,首先是物理学也提出了很多的微分方程。

在声学和振動学裏碰到了達朗培方程式

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{7}$$

在熱力学裏,提出了熱傳導方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{8}$$

在电磁学裏,提出了拉普拉司方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{9}$$

光学則提出了波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{10}$$

科学技術各部門已經提出了大量的微分方程，並且隨着生產技術不斷地發展,而將繼續不斷提出新鮮的問題出來。

这些方程式的解決，与提出它們的各部門或分枝学問的研究的進展,有着密切的關係,这样就促進了微分方程的研究。

---

① 例如：近幾年來,數理統計方面的研究，需要了解拋物型方程式[和(8)類似的方程],單葉函數論則要考慮一个著名的常微分方程。

§ 2. 解微分方程時增添附加条件的必要性

數学家首先發現的事实就是：一个微分方程或偏微分方程能有無窮个解。在初等的情形，就是說方程式可能用初等方法求解的時候，求得的解，總含有一个或多个任意常數或函數。把这些任意元素变動的時候，那末除掉若干个例外的解以外，我們就可能獲得方程式所有的解。这样一般就說得到了“通解”。在一个較長的時期裏，人們集中精力在求这些“通解”。

但是当我們要明確“通解”定义的時候，就遭遇了許多嚴重的困难①，但这种看法也因为旁的原因，並且是有决定性的原因，而漸漸地被拋棄掉。这就是因为在最重要的应用裏，尤其是那些有關動力学和物理学的应用裏：問題不是在求方程式的任何解，而要求其中一个適合某些補充条件的解，这些補充条件就是定解条件。

理論上講，我們可以想像把这样提出的問題，轉变为上面說的問題，因为假設我們已經有了“通解”，那末只須在它的表達式裏挑选適当的任意元素使它满足定解条件。但事实上，对偏微分方程說，除掉少數幾个特別簡單的例② 以外，剛巧这个挑选就是最困难。相反地，若对含有任意已知元素的定解条件，我們已求得一个解，那末把这些任意已知元素在可能範圍內变動時，在極常有的情況下，我們就可以獲得方程式的任何解，就是所謂“通解”。

就是採取了这种观點，郭西和外伊司得拉司才差不多在同一个時期，在一个廣泛的情況下，解決了当時常微分方程論裏的一个基本問題：就是解的存在的証明。我們要注意一直到他們为止，除

① 參閱 E. Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. T. I. P. 28, Paris, Hermann。

② 用達朗培法解弦振動問題可以說是这方面唯一的例，这个方法在後面我們將再討論。

掉若干个初等可積情形外，一个微分方程或偏微分方程有解的事实並不明顯，也完全沒有証明过。为了証明这个事实，郭、外兩氏正是在增添若干適当的定解条件之後，才明確地証明了他們所要求的解的存在。

§ 3. 定解条件、始値条件和边値条件

我們所要考慮的微分方程或偏微分方程

$$F=0$$

是加在含 m 个自变數 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的未知函數 u 上的条件，F 可能包含自变數、未知函數 u 和它的一直到某級的微商。所謂 u 是 $F=0$ 在開域 R_m 的解，就是說当我們把 u 和它的微商的値代入 F 時，F 將在 R_m 內恆等於零。这就無形中要求在 F 內的各微商的存在性，在边上，这些微商就不必要存在。

和这个泛定方程式(就是指 $F=0$)相反，我們加於未知函數 u 上的定解条件，則祇須在 R_m 內一个子集上或 R_m 的边集上滿足。这些子集或边集，普通是 m 維空間的正則曲面，一般被称为支柱。

所謂 u 在支柱上滿足定解条件的意义，有必要說得更明確些。普通地說 u 在支柱上取已与値，就等於說当動點 M 由 R_m 內趨近於支柱上某定點 M_0 時，u 的値就趨近於已与函數在 M_0 的値。否則我們將可能任意在支柱給已与値，而这些値就不需和 u 在 R_m 內的情形有任何關联，这与一般实际情况是不相符的。

但我們有下列二輔定理：

班勒衛輔定理一：設在 xy 平面上一閉曲線 Γ 範圍一開域 S。$f(x,y)$ 在 S 內是連續的，AB 是 Γ 上一連續弧，M 是 AB 上任一點，s 是 AM 的弧長。若 S 內一點 (x,y) 沿 S 內任一路徑趨近於 M 時，$f(x,y)$ 趨近於 $f_1(s)$；則[1] $f_1(s)$ 是 s 的連續函數，[2] 对 AB 上各點說，$f(x,y)$ 的趨近於 $f_1(s)$ 是一致的。

証：由假設对 AB 上任一定點 M 对於任意給定的正數 ε, 我們恆能求得一正數 r, 使在以 M 为心，r 为半徑的圓 C 和 S 的公共部分 S_0 內，恆有

$$|f(x,y)-f_1(s)|\leqslant\varepsilon. \qquad (1)$$

設 C 和 AB 相交於兩點 M_1, M_2。命 M' 是 M_1M_2 弧的一內點。命 S 內任一點 (x, y) 趨近 M', AM' 的弧長是 $s+h$, 則由假設有

$$\lim f(x,y)=f_1(s+h),$$

所以 $$|f_1(s+h)-f_1(s)|\leqslant\varepsilon.$$

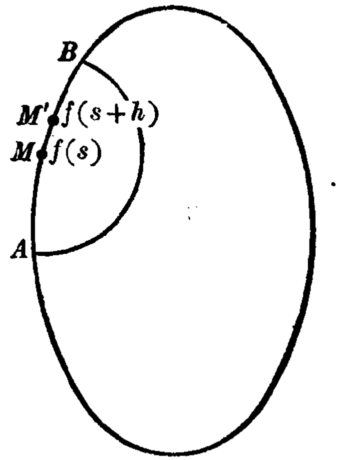

圖 1.

再則，[1] 既在閉弧 AB 上各點成立，則我們一定能找到有限个像 C 一样的圓把 AB 整个覆蓋起來。因此任与一正數 ε, 一定可以求得一正數 l, 使在以 AB 上任一點 M 为心 l 为半徑的圓和 S 的公共部分內就恆有 (1)。所以有[2]。　　証完。

反之，班勒衛輔定理二：設在 xy 平面上閉曲線 Γ 範圍一域 S。$f(x, y)$ 在 S 內是連續的。AB 是 Γ 上一連續弧。对 AB 上任一點 M, 在 S 內有一連續地隨着 M 而变的路徑 MN。若当點 (x, y) 沿着 MN 趨近 M 時，对 AB 上的點說，$f(x, y)$ 一致趨於 $f_1(s)$；則 [1] $f_1(s)$ 是 s 的連續函數，[2] 当 (x, y) 沿任一在 S 內的途徑趨於 M 時 $f(x, y)$ 恆趨於 $f_1(s)$。

証：当 M 在 AB 上变動時，MN 既連續变易，則当 M 移動時 MN 上离 M 有一定距离 l 的 P 的軌跡將是一連續弧 σ: 当 $M'M$ 適当接近時，PP' 也將適当接近。因之在 σ 上 f 是 P 的連續函數。

在 AB 上 $f(x, y)$ 的趨近 $f_1(s)$ 既是一致的，那末任与一正數 ε 則一定可以取得 l 適当小，对 AB 上所有的點 M 与 M 相当的 P 恆

有 $$|f(P)-f_1(M)|<\varepsilon,$$

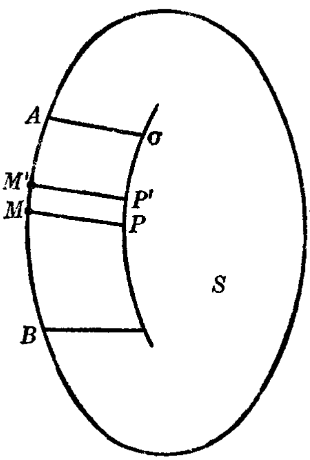

圖 2.

如是則有

$$|f_1(s+h)-f_1(s)|\leqslant|f_1(s+h)-f(P')|+$$
$$+|f(P')-f(P)|+|f(P)-f_1(s)|<3\varepsilon.$$

所以 $f_1(s)$ 在 AB 上是連續的。

再則命 P' 是在 M 附近的 S 内任一點，M' 是 AB 上和 P' 相当的點。我們又有

$$|f(P')-f_1(M)|\leqslant|f(P')-f_1(M')|+$$
$$+|f_1(M')-f_1(M)|<4\varepsilon.$$

証完。

因之，除特殊假定外，若支柱是連續的時，則已与函數一定是支柱上點的連續函數。

若定解条件裏含有 u 的微商，則首先必需假定 u 在支柱上是定义的，並当 M 由 R_m 内趨近於支柱上某定點 M_0 時，u 趨於定义值，而 u 的微商 $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ 在支柱 $x_1=0$ 上取已与值的意义可能有兩种解釋。第一种解釋：当 $(x_2, x_3, \cdots, x_m)$ 是 R_m-P 内一任意點時 $\lim\limits_{h=0}\frac{u(h, x_2, x_3, \cdots, x_m)-u(0, x_2, x_3, \cdots, x_m)}{h}$ 等於已与值。第二种解釋：当 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m)$ 是 R_m 任一内點時 $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ 恆連續，並当 $x_1=0$ 時也是連續的；即当 x_1 趨近於零時 $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ 趨近於已与值，在通常情况下，我們採取第二种解釋，顯然，適合第二种解釋時，就也適合第一种解釋。

为了適应動力学和物理学的需要，定解条件又可以分为兩种：始值条件和边值条件。在動力学和物理学裏，我們常要考慮一个 n 維介質的平衡性，或这个介質隨着時間演变的情况。在第一种情

形，$m=n$，在第二种情形，$m=n+1$。这時有一个自变數是時間。在第一种情形，定解条件的支柱可以是这介質內部的一个曲面或者就是它的边集，相应的条件就叫做边値条件。在第二种情形，定解条件的支柱，普通就是原始時間，相应的条件就叫做始値条件，它描述在某一定瞬間（也可能就是原始瞬間）整个介質的情况。

这兩种条件，不僅在物理意义上起着不同的作用，就是在分析方面看，它們也有本質上的不同。

求一函數使適合泛定方程和定解条件，就叫做定解問題。定解問題將是我們此後主要对象。

§ 4. 举例説明

例一：常微分方程的定解問題　对一个一級常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

説，關域 R_m 一般地是 x 軸上一个間隔，这个間隔可能一端趨於無窮也可能兩端都趨於無窮。郭西第一个提出並解決了下列始値問題：求 y 使適合

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x, y) & (\text{泛定方程}),\\ y=c \text{ 当 } x=a & (\text{定解条件})。\end{cases}$$

若已与 a, c，則根据 $f(x, y)$ 在點 (a, c) 附近的某些正則性，我們就能証明 y 在某間隔 $[a_1, b_1]$ 內的存在性和唯一性。这間隔 $[a_1, b_1]$ 可能以 a 为其边點也可能以 a 为其內點，同時，也可能对某对 $a, c, f(x, y)$ 喪失它的正則性，那末上面的結論就不一定正確，而 (a, c) 就称为方程的異點。除掉这个情形外，$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ 任何一个定解 y 旣必須在 a 取一个定値 c，因此，我們就一定可能用解決上述問題來求得这个解 y。因此命 a, c 在可能範圍內任意变化，就與

正得到了通解。

二級常微分方程

$$y''=f(x,y,y')$$

在力学中常碰到。这是研究一質點在一直線或一曲線上运動的方程式，在这裏 x 表示時間，而力学上的問題就是已知質點在 $x=0$ 時的位置和速度，求質點在任何時間的位置。这就是說要解決下列問題：

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y'), \\ \left.\begin{array}{l} y\ =c \\ y'\ =d \end{array}\right\} \text{当 } x=a, \end{cases}$$

这時定解条件顯然是始值条件。

但对这个二級微分方程，这样的定解問題並非唯一的，我們还可提出下列的問題：

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y'), \\ y(x_0)=A, \\ y(x_1)=B, \end{cases}$$

其中 A, B 是常數。畢加氏①証明：当 $|x_0-x_1|$ 適当小，$f(x,y,y')$ 在 (x_0,x_1) 適当正則時，上問題有一解並只有一解。这時 x 已不再代表時間，而是一个幾何变數，而定解条件則是边値条件。这个問題和下面著名問題類似。

例二：狄立克雷問題　求定 u 使在 R_3 內適合方程式

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

而在 R_3 的边界上取已与値，这裏顯然是边値問題。这样的問題在任意維空間都可能提出。特例，当 $m=2$ 時，R_2 就是一平面域。

① E. Picard: Traité d'Analyse, T. III.

牛孟問題　求定 u 使在 R_3 內適合方程式

$$\Delta u=0,$$

而在 R_3 的边界 S 上 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 取已与值，其中 n 是 S 的內法線。这裏顯然也是边值問題。

例三：弦振動問題(声管問題)　設一長度为 l 的均匀弦，緊張在二定點上，弦上任一點都拿它和二端點之一的距离 x 來定义，弦的形狀隨時間而变，假定 x 點的位移 u 是橫的(和振動傳播方向垂直)並且是很小的，要定这个函數 u。我們首先有方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中 ω 是已与常數。此外，弦在原始瞬間的形狀为已知，卽：

$$u(x,0)=g(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=h(x).$$

这些顯然是始值条件，但弦旣固着於兩端，我們又必有

$$u(0,t)=u(l,t)=0,$$

这就顯然是边值条件了。

§ 5. 適定問題

定解問題旣提出，接着就应該考慮下列三个主要問題：

1. 这問題是否有解，这就是存在問題。

2. 这問題如有解，那麼这个解是否是唯一的，这就是唯一性問題。

3. 若我們对定解条件的已与值作極細微的变動，是否所得的解也就只有極細微的变動，这就是穩定性問題。

後面兩个問題的提出都是为了適应实际的需要。例如就第三个問題說，力学或物理学所提出的定解問題，無論泛定方程式或定解条件的已与值，可以說永远只是近似的，假使已与值有細微变化

時,解就会有很大的变動,那末就等於說已与值並沒有知道。更淸楚地說,这种力学或物理現象就好像並不服从明確的規律。

为了明確第三个問題(即穩定性)的意义,我們必需引進各級鄰近和泛函的各級連續性的概念①。

各級鄰近的定义:設已与一函數 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 內是定义的,並有 K 級微商,若已与一正數 η,則凡適合条件

$$|x(t)-x_1(t)|<\eta,\ |x'(t)-x_1'(t)|<\eta\cdots$$
$$|x^{(k)}(t)-x_1^{(k)}(t)|<\eta \qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

的函數構成 $x_1(t)$ 的相当於 η 的 k 級隣近。

泛函的定义:若对在 $[a, b]$ 內定义的函數 $x(t)$,u 恆有一值与之相当,則謂 u 是 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 內的泛函,而以 $F[x(\overset{b}{\underset{a}{t}})]$ 來表示它,其中 $x(t)$ 称为自变函數。这个定义可以推廣到 R_m,这時自变函數,一般地將是在 R_m 內定义的函數 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$。

顯然,定解問題的唯一解,就是定解条件已与值的泛函,这時泛函又同時是 R_m 內點的函數,我們用 $F\{[x(\overset{b}{\underset{a}{t}})], t_1\}$ 表示这个解。

泛函的 (p, k) 級連續性 設 u 是 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 內的泛函,同時又是 t_1 在 $[a', b']$ 內的函數,就是說 u 可寫作 $F\{[x(\overset{b}{\underset{a}{t}})], t_1\}$。若任与一正數 ε,我們一定能求得一正數 η,使当 $x(t)$ 在 $x_1(t)$ 的相当於 η 的 k 級鄰近時,$u=F\{[x(\overset{b}{\underset{a}{t}})], t_1\}=G(t_1)$ 就在 $u_1=F\{[x_1(\overset{b}{\underset{a}{t}})], t_1\}=G_1(t_1)$ 的相当於 ε 的 p 級隣近,那末 u 就称为 $x(t)$ 的在 $x_1(t)$ 处为 (p, k) 級連續的泛函。

这个定义也很容易推廣到 R_m。

在这裏我們用了兩函數差的絕对值來說明隣近,但顯然也可以用兩函數差的平方的積分來說明隣近。

在这样的定义下,穩定性的意义是說,是否能找到二自然數 p

① 参閱 С. Л. Соболев: Уравнения Математической Физики,第 33—34 頁。

和 k，使定解問題的解是定解条件已与值的 (p, k) 級連續泛函，如可能，就說这个解是穩定的。

若一个定解問題有唯一而穩定的解，則称这問題是適定問題。

我們应該注意，適定問題的前兩个性質不是完全沒有關联的，我們大家都熟悉解一个含幾个未知數的 n 个代數線性方程的組，只有兩种情形：

1）一般地講，这組有一組解並只有一組解。

2）例外地可能無解或不定，但这時，若設係數不变而命已知項任意变動，則这問題只能在变成不定時，才中止为無解問題，也只能在变成無解時才中止为不定問題。

因此，若我們能証明这組不可能有多於一組解，那末我們也就預見了这組的有解，这种情形在線性積分方程的理論裏也同样被發現。在線性微分方程論裏也常有这种情形，就是：如証明唯一性，一般也就有可能証明存在性。反之如能証明存在性，則有時解的唯一性也就証明了。

我們也应該談一下处理定解問題的具体步驟。一般地說，總有三个步驟。首先根据已与的泛定方程和定解条件求出解应有的形式，这就是分析；其次要証明求得的函數是方程的解，並滿足定解条件，这就是所謂綜合；最後就要考慮解的唯一性和穩定性。

定解問題若証明是適定的，那就可以被原來提出問題的科学技術部門所採用，而直接为它們服务。而在微分方程論方面工作还沒有完全，还应該進而研究解的性質，这方面的研究，常微分方程和偏微分方程的發展不平衡，常微分方程較佔先，苏联數学家在这方面貢献最大。若証明不是適定的，那末就要研究定解条件在怎样变更下，問題才会是適定的。这样，微分方程論常可能对數学其他分支和它自己提供新的問題。

總之，微分方程的研究是由实际需要（數学其他分枝或其他科