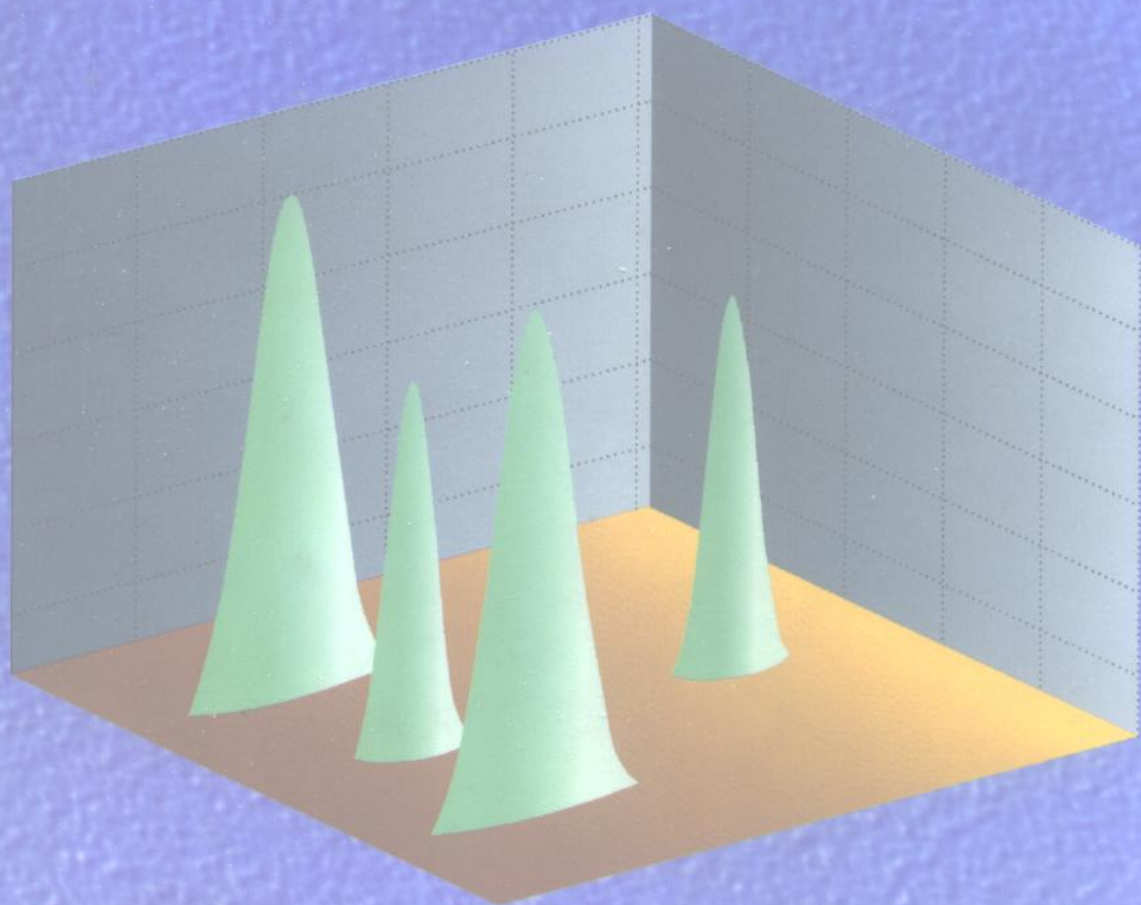


非平稳信号分析与处理

张贤达 保铮 著



国防工业出版社

73.412
590

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

非平稳信号分析与处理

张贤达 保铮 著

国防工业出版社

• 北 京 •

图书在版编目(CIP)数据

非平稳信号分析与处理 / 张贤达, 保铮著. — 北京:
国防工业出版社, 1998. 9
ISBN 7-118-01941-0

I. 非… II. ①张… ②保… III. ①随机信号-信号分析
②随机信号-信号处理 N. TN911. 7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 18804 号

1030/07

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

河北三河市腾飞胶印厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 28 $\frac{3}{4}$ 661 千字

1998 年 9 月第 1 版 1998 年 9 月北京第 1 次印刷

印数: 1—2000 册 定价: 46.00 元

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

8600422

前 言

信号与信息处理是信息科学中近十几年发展最为迅速的学科之一。传统的统计信号处理有三个基本的假设：线性、高斯性和平稳性，而现代信号处理则以非线性、非高斯和非平稳信号作为分析与处理的对象。在现代信号处理中，非平稳信号处理的发展尤其引人注目。

Fourier 分析是以纯粹数学和应用数学为基础建立起来的一门学科，它在科学与技术的所有领域中发挥着十分重要的作用。但是，由于 Fourier 分析使用的是一种全局的变换，因此无法表述信号的时频局域性质，而这种性质恰恰是非平稳信号最根本和最关键的性质。为了分析和处理非平稳信号，人们对 Fourier 分析进行了推广乃至根本性的革命，提出并发展了一系列新的信号分析理论：短时 Fourier 变换、时频分析、Gabor 变换、小波变换、Radon-Wigner 变换、分数阶 Fourier 变换、线调频小波变换、循环统计量理论和调幅 - 调频信号分析等。围绕非平稳信号的分析与处理而发展起来的新理论之丰富，提出的新方法之多，研究发展势头之猛，应用所涉及的部门与领域之广泛，都是在信号与信息处理学科的发展历史中前所未有的。可以毫不夸张地说，非平稳信号处理技术极大地推动了信号处理学科的发展。

诚然，国内外出版了不少有关非平稳信号处理的著(译)作，而且其中不乏优秀之作。但是，它们基本上只论述某个专题(如时频分析，小波变换)，迄今尚无一书对非平稳信号分析与处理的各种理论和方法展开过系统、全面的论述和介绍。本书旨在填补这一空白，为从事信号处理有关研究与应用的广大科技工作者和研究生奉献一部选材广泛、内容新颖、理论先进、方法实用的非平稳信号处理专著。

本书共分十二章，除第一章为概论外，其它主要内容可概括为

1. 时频分析：用时间 - 频率联合函数分析非平稳信号的方法，其主要内容包括短时 Fourier 变换、模糊函数、Wigner-Ville 分布和 Cohen 类时频分布；

2. Gabor 变换：不是直接用时间 - 频率联合函数，而是转换为另外两个独立参数对非平稳信号进行二维表示的方法，包括临界采样和过采样 Gabor 变换，以及计算 Gabor 变换的解析理论和框架理论两大类方法。

3. 小波分析：用时间 - 尺度联合函数分析非平稳信号的“变焦距”方法，内容包括框架理论、正交基、多分辨分析、滤波器组、基数样条小波和小波包等。

4. Radon-Wigner 变换和分数阶 Fourier 变换：将时间轴和频率轴旋转同一角度，利用转换后的时频平面即 (u, v) 平面分析非平稳信号的两大类方法。Radon-Wigner 变换是对 Wigner 分布在 u 轴上的投影积分，而分数阶 Fourier 变换则是 Fourier 变换的分数幂形式。

5. 循环平稳信号分析与处理：相关函数为时间的周期函数的一大类非平稳信号称为循环平稳信号，对这类信号的分析不是在时频平面或其变换后的平面上，而是在所谓的循环频率 - 滞后平面上进行，这构成了循环统计量理论与方法。

6. 线调频小波变换：上述分析和变换都属于非平稳信号的二维平面表示，线调频小波则是信号的一种多维空间表示。特别地，它可视为小波变换的直接推广。

7. 调幅 - 调频信号分析与处理: 主要是信号调幅规律和调频规律的估计, 以及基于循环平稳和高阶循环平稳性的信号分析方法。

本书试图在以下几个方面形成特点:

(1) 结构体系新, 内容选材广: 本书是第一部系统和全面论述非平稳信号分析与处理所有主要研究领域的理论、方法和应用的著作, 各章之间紧密联系, 构成了一个有机的整体。

(2) 材料新, 学术水平高: 所介绍的非平稳信号分析与处理的理论、方法与应用基本上都选材自国际权威或著名杂志上发表的研究成果, 其中大多数是近十几年尤其是最近几年的研究成果。书中充分反映了我们自己的很多观点, 并以信号的二维表示作为主线贯穿于全书的论述之中。

(3) 可读性强: 一本好的科技或学术著作应该既具有很高的学术水平, 又具有很好的可读性, 让广大读者容易看得懂, 产生浓厚的阅读兴趣。本着这一思想, 本书力求做到在保证高质量、高水平的前提下, 把可读性放在第一位。为此, 我们对本书内容的安排、组织和论述作了一些尝试: 对信号的各种变换, 尽可能先从物理考虑引出变换的有关概念与要求, 然后再给出数学上的严格定义, 讨论其数学性质, 介绍变换的具体计算方法 (本书归纳了大量重要算法, 读者可直接引用)。

(4) 实用性强: 本书用了大量篇幅介绍有关应用。特别地, 对时频分析、小波分析和循环平稳信号分析, 都分别另设一章专题介绍其应用。我们力求选择一些具有代表性的典型应用, 在简要交待有关的工程背景后, 即把重点放在以下问题的论述上: 解决该应用问题的基本思想是什么? 利用的是哪种方法的何种特点和功能? 为什么有效? 我们希望这会有助于读者举一反三, 激发读者运用所学到的理论和方法去解决实际工程问题的浓厚兴趣, 提高研究能力。

概括地讲, 本书力求做到既有学术专著的深度和水平, 又有研究生教材的广度和可读性, 为广大读者奉献一部可读性、学术性和实用性都能够较为满意的著作。但是, 由于本学科发展极其迅速, 我们又希望将最新成果介绍给读者, 因而在内容的选取、安排、问题的分析和论述等方面会存在不少缺点和问题, 敬请读者指正。

李衍达教授、王越教授和张钹教授三位院士热情推荐本书申请国家科学技术学术著作出版基金, 并对本书的写作提出许多宝贵意见, 谨向他们致以衷心的感谢! 西安电子科技大学电子所博士生毛用才、张建康、王根原、邹红、王彤, 清华大学自动化系博士生邹红星、陈滨宁、时宇、赵锡凯和硕士生俞翔、祝捷、孙逸绅等认真地阅读了本书书稿, 并提出了一些很好的改进意见; 邹红星同志还为本书用计算机计算并绘制了大量插图; 清华大学自动化系唐晓英高级工程师帮助做了大量具体工作, 在此一并向他(她)们表示谢意。

我们关于非平稳信号分析与处理的研究是在国家自然科学基金、国家 863 课题、国防科技预研基金、国防科技重点实验室 (西安电子科技大学) 基金和国家教委博士点专项研究基金等的资助下分别完成的, 本书是这些研究工作的一部总结性著作。第一位作者还要感谢智能技术与系统国家重点实验室为他的研究组提供了实验设备的有力支持。

最后, 我们要特别感谢国家科学技术学术著作出版基金对本书给予的专项出版资助。

张贤达

谨识于 1998 年 4 月

保 铮

目 录

第一章 概论	(1)
1.1 非平稳信号分析的主要研究领域	(1)
1.2 本书的结构与内容安排	(9)
1.3 如何使用本书	(10)
第二章 时频表示与时频分布	(12)
2.1 基本概念	(12)
2.1.1 解析信号与基带信号	(14)
2.1.2 瞬时频率和群延迟	(17)
2.1.3 不确定性原理	(18)
2.2 短时 Fourier 变换	(20)
2.2.1 连续短时 Fourier 变换	(20)
2.2.2 短时 Fourier 变换的基本性质	(22)
2.2.3 窗函数 $g(t)$ 的选择	(23)
2.2.4 离散短时 Fourier 变换	(25)
2.3 时频分布的一般理论	(26)
2.3.1 信号的双线性变换和局部相关函数	(26)
2.3.2 时频分布的基本性质要求	(28)
2.3.3 时频分布的二次叠加原理	(30)
2.3.4 特征函数 *	(31)
2.4 模糊函数	(32)
2.5 Cohen 类时频分布	(35)
2.5.1 定义	(35)
2.5.2 时频分布基本性质与核函数的关系	(36)
2.5.3 Cohen 类的四种分布及其相互关系	(40)
2.5.4 Cohen 类分布的类型	(41)
2.5.5 具有复合核的 Cohen 类时频分布	(43)
2.6 Wigner-Ville 分布	(46)
2.6.1 数学性质	(47)
2.6.2 基于 Wigner-Ville 分布的信号重构	(50)
2.6.3 与演变谱的关系	(51)
2.7 时频分布的性能评价与改进	(53)
2.7.1 时频聚集性	(53)

2.7.2 交叉项分析	(54)
2.7.3 交叉项抑制	(56)
2.7.4 几种常用的时频分布	(59)
2.7.5 时频分布的重排	(68)
2.8 多项式相位信号的 Wigner-Ville 分布	(70)
2.9 Zak 变换 *	(73)
2.9.1 连续 Zak 变换	(73)
2.9.2 典型信号的 Zak 变换	(77)
2.9.3 与其它时频表示的关系	(78)
2.9.4 离散 Zak 变换	(79)
2.9.5 在互模糊函数中的应用	(81)
第三章 时频分析的应用	(84)
3.1 瞬时频率估计	(84)
3.1.1 相位差分法	(84)
3.1.2 相位建模法	(86)
3.1.3 基于时频分布的瞬时频率估计	(89)
3.1.4 瞬时频率在雷达信号处理中的应用	(92)
3.2 时频域 Wiener 滤波	(93)
3.2.1 后验 Wiener 滤波	(93)
3.2.2 时频域 Wiener 滤波器	(94)
3.3 时频滤波与时频展开	(96)
3.3.1 时频滤波	(96)
3.3.2 线性信号空间	(97)
3.3.3 线性信号空间的 Wigner-Ville 分布	(98)
3.3.4 时频投影滤波的实现	(100)
3.4 时频综合	(102)
3.4.1 子空间约束综合	(102)
3.4.2 时频综合的实现	(103)
3.5 其它应用	(105)
3.5.1 信号检测	(105)
3.5.2 信号分类	(107)
第四章 Gabor 变换	(109)
4.1 复谱图	(109)
4.2 连续 Gabor 变换: 临界采样	(111)
4.2.1 连续 Gabor 展开	(112)
4.2.2 连续 Gabor 展开系数的确定	(113)
4.2.3 Gabor 基函数选择	(115)

4.3	过采样连续 Gabor 变换的解析理论	(120)
4.4	过采样连续 Gabor 变换的框架理论	(123)
4.4.1	$L^2(R)$ 空间的框架理论	(123)
4.4.2	框架存在的条件	(127)
4.4.3	计算 Gabor 变换的框架方法	(128)
4.4.4	Gabor 变换的快速计算	(132)
4.5	离散 Gabor 变换的解析理论	(133)
4.5.1	周期序列的离散 Gabor 变换	(133)
4.5.2	非周期序列的离散 Gabor 变换	(135)
4.6	离散 Gabor 变换的框架理论与伪框架理论	(138)
4.6.1	离散 Gabor 变换的框架理论	(138)
4.6.2	伪框架分解与离散 Gabor 变换	(141)
4.7	应用	(144)
4.7.1	暂态信号检测	(144)
4.7.2	图像分析与压缩	(149)
第五章	Radon-Wigner 变换	(153)
5.1	Radon 变换	(153)
5.2	Radon-Wigner 变换的定义	(156)
5.3	Radon-Wigner 变换的计算	(158)
5.3.1	连续 LFM 信号的解线调	(158)
5.3.2	离散 LFM 信号的解线调	(162)
5.3.3	离散 Radon-Wigner 变换的实现	(164)
5.4	性质	(165)
5.5	应用	(168)
5.5.1	信号综合	(168)
5.5.2	多分量 LFM 信号的自适应时频滤波	(174)
5.5.3	LFM 信号检测	(177)
5.5.4	逆合成孔径雷达成像	(180)
第六章	分数阶 Fourier 变换	(186)
6.1	定义	(186)
6.2	分数阶 Fourier 域 *	(190)
6.2.1	分数阶 Fourier 域内的算子	(190)
6.2.2	分数阶 Fourier 域内的不确定性原理	(192)
6.3	基本性质	(193)
6.4	分数阶 Fourier 变换的数值计算	(199)
6.4.1	时间和频率的无量纲化	(199)
6.4.2	计算方法 1	(199)

6.4.3 计算方法 2	(201)
6.5 分数阶 Fourier 变换的二维平面表示 *	(203)
6.5.1 Wigner-Ville 分布的表示	(203)
6.5.2 与短时 Fourier 变换、谱图的关系	(207)
6.6 应用	(209)
6.6.1 滤波与干扰分离	(209)
6.6.2 分数阶域的多路传输	(211)
6.6.3 扫描频率滤波器 (分数阶域滤波的实现)	(213)
6.6.4 具有分数阶 Fourier 变换的带限信号 *	(214)
附录 6.1 分数阶 Fourier 变换算子的存在性	(216)
附录 6.2 分数阶 Fourier 变换的间接定义	(218)
附录 6.3 分数阶 Fourier 变换的光学实现	(222)
第七章 小波分析	(224)
7.1 小波的物理考虑	(224)
7.1.1 小波的物理考虑	(224)
7.1.2 几种母小波	(227)
7.2 小波变换	(228)
7.2.1 连续小波变换	(228)
7.2.2 连续小波变换的离散化	(231)
7.3 小波分析中的 Riesz 基与正交基	(232)
7.3.1 线性独立性与基	(232)
7.3.2 小波分析中的 Riesz 基与正交基	(234)
7.3.3 小波的分类	(236)
7.4 框架理论	(238)
7.4.1 基于框架理论的信号重构	(238)
7.4.2 框架计算	(241)
7.5 多分辨分析	(243)
7.5.1 多分辨分析	(243)
7.5.2 正交小波的构造条件	(247)
7.5.3 Daubechies 小波的构造	(250)
7.5.4 双正交小波的构造条件	(254)
7.5.5 一维 Mallat 算法	(256)
7.5.6 二维 Mallat 算法	(258)
7.6 FIR 滤波器组	(261)
7.6.1 基于 FIR 滤波器组的信号重构	(261)
7.6.2 基于 FIR 滤波器组的正交小波构造	(263)
7.6.3 对偶滤波器与对偶小波	(266)

7.6.4 完全重构 FIR 滤波器组的设计	(270)
7.7 基数样条小波 *	(272)
7.7.1 基数样条函数	(272)
7.7.2 多分辨分析	(274)
7.8 小波包 *	(277)
7.8.1 小波包的物理考虑	(277)
7.8.2 定义与性质	(278)
7.8.3 最佳基搜索	(282)
第八章 小波分析的应用	(285)
8.1 嵌入式图像编码	(285)
8.2 时变线性系统建模	(289)
8.3 小波在分形信号处理中的应用	(291)
8.3.1 $1/f$ 过程	(292)
8.3.2 $1/f$ 过程的小波模型	(295)
8.3.3 $1/f$ 信号估计	(296)
8.4 通信中的分形调制	(297)
8.4.1 齐次信号及其小波表示	(298)
8.4.2 齐次信号的构造	(300)
8.4.3 分形调制波的发射与接收	(301)
8.5 小波在生物医学信号处理中的应用	(302)
8.5.1 心电图的小波压缩	(302)
8.5.2 小波用作多尺度匹配滤波器	(305)
第九章 线调频小波变换	(307)
9.1 物理考虑	(307)
9.2 线调频小波	(308)
9.3 线调频小波变换	(314)
9.3.1 基于时频表示的线调频小波变换公式	(314)
9.3.2 基于 Wigner 分布的线调频小波变换公式	(316)
9.4 线调频小波子集变换 *	(318)
9.4.1 频散变换	(318)
9.4.2 等距二维信号变换	(320)
9.4.3 其它应用	(322)
第十章 循环平稳信号分析	(324)
10.1 引言	(324)
10.2 一阶周期性	(325)
10.3 循环自相关函数	(328)

10.4 谱相关密度函数	(330)
10.4.1 谱相关密度函数	(331)
10.4.2 滤波对谱相关密度函数的影响	(332)
10.4.3 波形相乘对谱相关密度函数的影响	(334)
10.4.4 离散循环平稳信号的二阶循环统计量	(336)
10.5 时变累积量	(336)
10.5.1 正弦波抽取运算	(336)
10.5.2 分时概率分布函数	(337)
10.5.3 时变矩与时变累积量	(339)
10.5.4 几乎周期函数	(343)
10.5.5 循环遍历性	(345)
10.6 循环矩与循环累积量	(346)
10.6.1 循环矩与循环累积量	(346)
10.6.2 循环累积量的性质	(349)
10.6.3 时变和循环统计量的比较	(350)
10.7 循环多谱	(352)
第十一章 循环平稳信号处理与应用	(355)
11.1 循环统计量估计	(355)
11.1.1 循环统计量估计	(355)
11.1.2 循环频率估计	(356)
11.1.3 时变和循环累积量样本估计的统计性能	(357)
11.2 循环功率谱与循环多谱估计	(358)
11.2.1 循环功率谱估计	(358)
11.2.2 循环多谱估计	(360)
11.3 (几乎) 周期移动平均系统辨识	(362)
11.3.1 (几乎) 周期 MA 过程	(362)
11.3.2 闭式辨识法	(363)
11.3.3 法方程方法	(364)
11.4 信道盲辨识与盲均衡	(366)
11.4.1 通信信号的循环平稳性	(367)
11.4.2 时域方法	(368)
11.4.3 多信道方法	(371)
11.5 ARMA 模型辨识	(373)
11.5.1 基于零、极点识别的参数化辨识方法	(373)
11.5.2 循环倒谱法	(374)
11.6 多采样率信号处理	(378)
11.6.1 多采样率系统	(378)

11.6.2 多采样率滤波器组的输出	(380)
11.6.3 双正交滤波器组的优化设计	(382)
11.6.4 双正交线性相位滤波器组的优化设计	(385)
11.7 循环平稳信号的盲自适应波束形成	(386)
11.7.1 波束形成的问题描述	(386)
11.7.2 盲自适应波束形成	(388)
11.8 波达方向估计的循环 MUSIC 方法	(390)
第十二章 调幅 - 调频信号分析	(392)
12.1 非平稳 AM 信号模型辨识	(392)
12.1.1 平稳非高斯 AM 信号分析	(392)
12.1.2 非平稳 AM 信号分析	(394)
12.2 循环平稳 AM 信号模型辨识	(397)
12.2.1 AM 信号的循环累积量	(397)
12.2.2 调制序列的估计	(401)
12.2.3 信号参数估计	(401)
12.3 复 FM 信号模型辨识	(403)
12.3.1 频率估计	(403)
12.3.2 调制指数的估计	(405)
12.4 AM-FM 能量分离法	(406)
12.4.1 能量分离算法	(407)
12.4.2 带通滤波 AM-FM 信号的能量函数	(409)
12.4.3 能量分离算法的滤波器组实现	(411)
12.5 估计 AM-FM 信号的循环平稳方法	(414)
12.6 基于差分方程的 AM-FM 信号分析 *	(417)
12.6.1 时不变正弦波的差分方程	(418)
12.6.2 时变正弦波的差分方程	(418)
12.6.3 差分方程的分析	(421)
12.6.4 瞬时频率与瞬时幅度的估计	(422)
参考文献	(426)
索引	(437)

第一章 概 论

在大量的科学与工程问题中,信号的统计量起着极其重要的作用。最常用的统计量为(平)均值(一阶统计量)、相关函数与功率谱密度(二阶统计量)。此外,还有三阶、四阶等高阶矩、高阶累积量和高阶谱等高阶统计量。

若 $\{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$ 的联合分布函数与 $\{x(t_1 + \tau), \dots, x(t_n + \tau)\}$ 的联合分布函数对所有 $t_1, \dots, t_n$ 和 $\tau \in T$ 都相同,则随机过程 $\{x(t), t \in T\}$ 称为严格平稳随机信号。这意味着分布相对于时间移位是不变的。严格平稳也称狭义平稳。

随机信号 $\{x(t), t \in T\}$ 称为广义平稳过程,若

$$(1) E\{x(t)\} = m = \text{常数};$$

$$(2) E\{|x(t)|^2\} < \infty;$$

$$(3) E\{[x(t) - m][x(s) - m]^*\} = R_x(t - s) - |m|^2, \text{ 其中 } R_x(t - s) = E\{x(t)x^*(s)\}, x^*(t) \text{ 代表 } x(t) \text{ 的复数共轭。}$$

广义平稳也称弱平稳、协方差平稳、二阶平稳等。一个严格平稳的随机过程必定是广义平稳的,但一个广义平稳过程不一定是严格平稳的。如果一个信号不是广义平稳的,则称它是非平稳信号。用统计量来叙述,各阶统计量与时间无关的信号称为平稳信号,而某阶统计量随时间改变的信号则称作非平稳信号或时变信号。最常见的非平稳信号是自相关函数或功率谱密度随时间变化的信号。

1.1 非平稳信号分析的主要研究领域

分析和处理平稳信号的最常用也是最主要的方法是 Fourier 分析。Fourier 变换建立了信号从时(间)域到频(率)域的变换桥梁,而 Fourier 反变换则建立了信号从频域到时域的变换桥梁,这两个域之间的变换为一对一映射,如图 1.1.1 所示。图中^①:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.1.1a)$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft} df \quad (1.1.1b)$$

从图中可看出,时域和频域构成了观察一个信号的两种方式。Fourier 变换是在整体上将该信号分解为不同的频率分量,而缺乏局域性信息,即它并不能告诉我们某种频率分量发

^① 使用角频率 $\omega = 2\pi f$ 表示的 Fourier 变换与反变换有所谓对称和非对称两种形式。对称形式就是在 Fourier 变换和反变换中都乘以系数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 。一般文献最常用的是非对称的定义形式,即 Fourier 变换取 $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt$, 而 Fourier 反变换取 $s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega$ 。当代入 $\omega = 2\pi f$ 后,非对称的 Fourier 变换和反变换可以统一为用圆频率 f 表示的对称形式(相乘系数均为 1),即如式 (1.1.1) 所示。

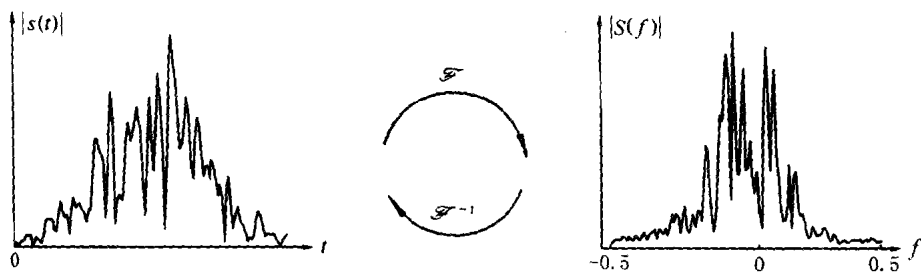


图 1.1.1 信号的时域表示与频域表示之间的关系

生在哪些时间内，而这对非平稳信号是十分重要的。其实，从 $s(t) \rightarrow S(f)$ 的 Fourier 变换式可以看出，频谱 $S(f)$ 等于信号和无穷区间的正弦波基函数的内积，即

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt = \langle s(t), e^{j2\pi ft} \rangle \quad (1.1.2)$$

因此，基于无穷区间的平稳基函数不可能表现出非平稳信号 $s(t)$ 的局域性。Fourier 分析的这些缺陷表明，非平稳信号的分析与处理需要比 Fourier 变换具有更多、更严格的要求。如果仍采用信号分解的概念，则必须使用具有局域性的基函数。

1. 短时 Fourier 变换

非平稳信号分析的研究工作最早是从 40 年代开始的。1946 年，Gabor^[70] 在他那篇题为“通信理论”的经典论文中强调指出：

“迄今为止，通信理论的基础一直是由信号分析的两种方法组成的：一种将信号描述成时间的函数，另一种将信号描述成频率的函数（Fourier 分析）。这两种方法都是理想化的……。然而，我们每一天的经历——特别是我们的听觉——却一直是用时间和频率两者来描述信号的。”

信号频率分量随时间变化快而且复杂的典型例子当推人的语音。为了分析语音信号，Koenig 等人^[111] 和 Potter 等人^[171] 相继提出了声谱图方法。信号 $s(t)$ 的谱图定义为其短时 Fourier 变换的模的平方：

$$\text{SPEC}(t, f) = |\text{STFT}(t, f)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} [s(u)g^*(u-t)]e^{-j2\pi fu} du \right|^2 \quad (1.1.3)$$

式中

$$\text{STFT}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} [s(u)g^*(u-t)]e^{-j2\pi fu} du \quad (1.1.4)$$

因此，谱图方法又称短时 Fourier 变换方法，在很长时间内成了非平稳信号分析的一种标准的和有力的工具。短时 Fourier 分析的基本思想是：假定非平稳信号在分析窗函数 $g(t)$ 的一个短的时间间隔内是平稳（伪平稳）的，并移动分析窗函数，使 $s(u)g(u-t)$ 在不同的有限时间宽度内为不同的伪平稳信号，从而计算出各个不同时刻的功率谱。这种方法的主要缺陷是：对应一定的时刻，只是对其附近窗口内的信号作分析，若选择的 $g(t)$ 窄（即时间分辨

率高), 则频率分辨率低; 而如果为了提高频率分辨率使 $g(t)$ 变宽, 伪平稳假设的近似程度便会变差。许多自然界的信号和人工信号, 它们的谱分量变化是如此之快和不规则, 以致难于找到一个合适的短时窗函数 $g(t)$, 能够使信号在其时间宽度内或多或少满足平稳性的假定, 而又不使窗宽过窄。

从本质上讲, 短时 Fourier 变换是一种单分辨率的信号分析方法, 因为它使用一个固定的短时窗函数。后来, 短时 Fourier 变换发展成用自适应的方法对不同的信号段选择长度不一的合适窗函数, 即短时 Fourier 变换也可以是多分辨率的。

2. 时频分析

以 Gabor^[70], Ville^[205] 和 Page^[162] 等人的研究工作为开端, 诞生了时变谱的另外一种分析工具, 这就是信号的时频分析方法。虽然现在流行的说法是, 时频分析的起源是为了改善谱图或短时 Fourier 变换方法, 然而其实际动机却是为了弄清楚时变谱的物理意义和数学解释^[41]。时频分析的基本思想是设计时间和频率的联合函数, 用它同时描述信号在不同时间和频率的能量密度或强度。时间和频率的这种联合函数简称时频分布。假定我们已知一群人的体重和身高的联合密度分布, 该联合分布对体重积分就能得到身高的分布, 进而也可以从联合分布知道体重在 60~65 kg 之间、而身高在 1.6~1.65 m 之间的人所占的比例。类似地, 还可以得到某一特定身高的体重分布, 以及身高与体重之间的相关函数等等。设计联合时频分布的基本要求是能够用相同的方式使用和处理它。具体说来, 如果有了某信号的这样一种分布, 我们就会问该信号在某个频率和时间范围究竟有多少能量; 要求能够计算出信号在某个频率的能量; 能够计算分布的总体和局部均值 (例如平均频率及其局部宽度) 等等。为了满足这些要求, 连续信号 $s(t)$ 的时频分布定义为

$$P(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s\left(u + \frac{1}{2}\tau\right) s^*\left(u - \frac{1}{2}\tau\right) \alpha(\tau, \nu) e^{-j2\pi(\nu t + f\tau - \nu u)} du d\nu d\tau \quad (1.1.5)$$

$P(t, f)$ 将信号的联合时频分布与信号联系在一起, 我们把基于 $P(t, f)$ 的信号分析方法称作时频分析。时频分析方法是我们在构造具有某些所希望性质的信号时的有力数学工具。为做到这一点, 我们可以先针对某些所希望的数学性质设计联合时频分布 $P(t, f)$, 然后重构具有该时频分布的信号。也就是说, 综合出的信号具有我们所希望的时频分布。时频分布的典型例子有 Page 分布、Wigner-Ville 分布、Choi-Williams 分布等。Wigner-Ville 分布和 Choi-Williams 分布等多种分布又可以归属为 Cohen 类时频分布^[40]。

时频分析本身的特点以及为改善其特性所作的一系列工作 (例如不确定性原理、核函数选择、交叉项抑制等) 大大地丰富了非平稳信号分析与处理领域的内容, 也大大增加了这一领域的挑战性。

3. 小波分析

非平稳信号的表示方法除了短时 Fourier 变换和直接在联合时频平面上表征该信号外, 也可以将频率域的表征改为另外一个域 (如尺度域), 而用联合的时间和尺度平面来描述信号。这正是小波分析的基本思想。小波变换最早是由法国地球物理学家 Morlet 于 80 年代

初在分析地球物理信号时提出来的, 它定义为

$$\text{WT}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} h^* \left(\frac{t-b}{a} \right) s(t) dt \quad (1.1.6)$$

式中, $a \neq 0$ 为尺度因子, b 为时移因子, 函数 $h(t)$ 称为母小波。用不同的 a 和 b 构成下面的小波基函数:

$$h_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} h \left(\frac{t-b}{a} \right) \quad (1.1.7)$$

当尺度因子 a 取大于 1 的值时, $h_{a,b}(t)$ 对应为展宽的小波, 其频谱缩窄并下移; 而当 a 值小于 1 时, $h_{a,b}(t)$ 则成了缩窄的小波, 其频谱展宽并上移。由于时移参数 b 与时间 t 自然对应, 而尺度 a 实际上与频率对应, 因此我们可以这样来理解小波分析与时频分析之间的关系: 时频分析中的时频平面 (t, f) 在小波分析中变成了时间 - 尺度平面 (b, a) 。

“小波”是目前许多科学和工程技术问题中常用的术语, 有人认为小波可以作为信号表示的基函数, 也有人认为小波变换是时间 - 频率分析的一种技术, 还有人将小波变换视为一种多分辨(率)分析, 另外有些人则把小波分析看作是一门新的数学学科。毋庸置疑, 这些看法都是正确的。与 Fourier 分析类似, 在小波分析中, 也存在“积分小波变换”、“小波级数”和“离散小波变换”。小波分析与 Fourier 分析的本质区别在于: Fourier 分析只是考虑时域和频域之间的一对一映射, 它以单个变量(时间或频率)的函数表示信号; 小波分析则利用联合时间 - 尺度函数分析非平稳信号。小波分析与时频分析的区别则在于: 时频分析在时频平面上表示非平稳信号, 小波分析描述非平稳信号虽然也是在二维平面上, 但不是在时频平面上, 而是在所谓的时间 - 尺度平面上。短时 Fourier 变换是以同一种分辨率(即统一的窗函数)来观察信号的, 而在小波分析中, 人们则以不同的“尺度”(或“分辨率”)来观察信号。信号分析中的这种多尺度(或多分辨率)的观点乃是小波分析的基本点。小波分析的目的在于“既要看到森林(信号的概貌), 又要看到树木(信号的细节)”。应当指出, 传统小波分析的多分辨率是对低频分量为高分辨, 而对高频分量为低分辨, 这与人的视觉和听觉相适应, 但不一定适用于其它信号。后来发展的多层小波包则可对各种频率作不同的分辨率选择, 这又与短时 Fourier 变换殊途同归, 但小波分析在理论上更完整。

经过十几年的发展, 小波分析在理论和方法上取得了突破性的进展, 多分辨分析、框架和滤波器组三大理论为其典型代表。现在, 人们已经公认: 计算机视觉中的多分辨处理, 语音和图像压缩中的子带编码, 基于非均匀采样网格的非平稳信号分析和应用数学中的小波级数展开只不过是同一种理论(即小波理论)的不同观点罢了。

4. Gabor 展开

同时利用时间和频率表示一个非平稳信号的另外一类方法是半个世纪前提出的 Gabor 展开^[70]。Gabor 通过信号的时间平移和频率调制形式建立非平稳信号的联合时间 - 频率函数, 然后对时间 - 频率平面进行采样划分, 将时频平面 (t, f) 转换成另外两个离散采样网格参数 m 和 n 的平面, 在二维平面 (m, n) 上表征非平稳信号。信号 $s(t)$ 的 Gabor 展开定义为

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} g_{mn}(t) \quad (1.1.8)$$

式中, a_{mn} 称作 Gabor 展开系数, 而

$$g_{mn}(t) = g(t - mT)e^{j2\pi(nF)t}, \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1.9)$$

称为 Gabor 基函数。Gabor 展开系数可以用下面的 Gabor 变换表示:

$$a_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\gamma_{mn}^*(t)dt \quad (1.1.10)$$

其中 $\gamma_{mn}(t)$ 是 Gabor 基函数 $g_{mn}(t)$ 的对偶函数。

由上述定义知: 1) Gabor 展开就是利用联合 m - n 函数形式表示时间信号 $s(t)$ 的一种信号分析方法, 其逆问题是利用 Gabor 展开系数 a_{mn} 重构出原信号 $s(t)$; 2) 基于 Gabor 展开的非平稳信号分析需要解决的两个基本问题是 Gabor 基函数 $g_{mn}(t)$ 的选择和 Gabor 变换式 (1.1.10) 的计算。若使 Gabor 基函数的功率谱 $G_{mn}(f)$ 按照倍频程分布 (即所谓的塔式采样), 则 Gabor 展开也是一种类似于传统小波变换的多分辨分析方法。稳定的 Gabor 展开要求临界采样或过采样。Gabor 变换的计算方法可分为解析法和框架理论法两大类。多分辨分析和框架理论揭示了 Gabor 展开与小波分析之间的密切联系。注意, 由于 $g_{mn}(t)$ 是一种时间平移加调频因子的函数, 而参数 m 和 n 分别为时移因子和频率调制因子, 所以时频分析中的时频平面 (t, f) 在 Gabor 展开中变成了 (m, n) 平面, 这一事实揭示了 Gabor 展开与时频分析间的内在关系。

5. Radon-Wigner 变换

线性调频 (LFM) 信号是一种有着特殊意义的非平稳信号, 它常常用作衡量一种时频分析方法是否有效的手段, 因而受到特别的关注。在雷达等探测系统中, 当目标作等加速运动时, 其回波即为 LFM 信号。对于空间线性阵列, 若信号源位于近场, 则沿阵列分布的信号也近似为 LFM 信号, 合成孔径雷达利用了这一特性。

由于理想 LFM 信号的 Wigner 分布为直线冲激函数, 有限长 LFM 信号的 Wigner 分布呈背鳍状, 所以用 Wigner 分布研究 LFM 信号是十分有利的。但是, 多分量的 Wigner 分布存在比较严重的交叉项。因此, Wigner 分布的交叉项平滑成了 LFM 信号分析中重点考虑的问题。

在时频平面上, 如果我们沿时间 t 轴作积分, 便得到信号的功率谱; 对不同 t 值平行于频率 f 轴作积分, 则此边缘积分给出信号的瞬时功率。推而广之, 将 t - f 直角坐标逆时针旋转 α 角度得到新的直角坐标 u - v 后, 以不同 u 值沿平行于 v 的直线上的积分 (变换) 即是 Radon 变换, 如图 1.1.2 所示。

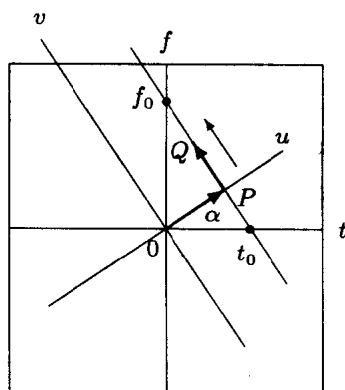


图 1.1.2 Radon 变换的几何关系

Radon 变换是 Radon 于 1917 年首先定义的, 作为一种广义边缘积分, 它本质上是一种对 u 轴的投影积分。根据 LFM 信号的 Wigner 分布的特点, 如果把 Radon 变换用于 Wigner