

FOURIER分析 与 逼近论

第一卷 上册

[德] P. L. Butzer R. J. Nessel 著

郑维行 苏维宜 任福贤 何泽霖 译

高等教育出版社

FOURIER 分析与逼近论

第一卷 上 册

[德] P. L. Butzer R. J. Nessel 著

郑维行 苏维宜 任福贤 何泽霖 译

高等教育出版社

本书(第一卷)据西德 Birkhäuser 出版社 1971 年出版 P. L. Butzer 与 R. J. Nessel 著《Fourier Analysis and Approximation》Vol. 1 译出。内容包括 Fourier 级数、Fourier 积分与逼近论(包括用奇异积分逼近)三个方面。书中强调用基本的、统一的原则平行地处理有关 Fourier 级数与积分的内容,有利于对抽象调和与分析的理解。在各种函数类的表征与饱和理论部分反映了最新成果。本书取材丰富,叙述严谨,论证详明,自给自足。每章都附有“注释与附注”,介绍了历史概况和进一步知识。全书还配备了约 550 个不同水平的习题。

本书可作为高等院校数学专业高年级学生及研究生选修课教材,也可作为物理专业,应用数学专业师生参考书。阅读本书大致需要有数学分析的坚实基础及实变、泛函初步知识,这些预备知识都已集中在第 0 章内。

第一卷中译本分上下册出版。上册包括“用奇异积分逼近”和“Fourier 变换”共两篇。下册包括“Hilbert 变换”、“某些函数类的表征”、“饱和理论”等三篇以及第一卷的参考文献。

FOURIER 分析与逼近论

第一卷 上册

[德] P. L. Butzer R. J. Nessel 著
郑维行 苏维宜 任福贤 何泽霖 译

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷三厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 14.75 字数 352,000

1985 年 1 月第 1 版 1985 年 1 月第 1 次印刷

印数 00,001—6,500

书号 13010·0898 定价 3.70 元

序 言

1965年8月,在Oberwolfach (Black Forest) 数学研究所由作者之一主持召开的“调和分析与积分变换”国际会议上,感到确有必要编写一本侧重以下几个方面的 Fourier 分析的书: (i) 从变换的观点对 Fourier 级数与 Fourier 变换作平行处理, (ii) 在 $L^p(\mathcal{B}^n)$ 空间中讨论 Fourier 变换, 不限于 $p=1$ 与 $p=2$ 的情形, (iii) 具有完全严格论证的偏微分方程的古典解, (iv) 卷积型奇异积分理论, (v) 应用于逼近论, 包括饱和理论, (vi) 乘子理论, (vii) Hilbert 变换, Riesz 分数阶积分, Bessel 位势理论, (viii) 局部紧群上的 Fourier 变换法。本卷的目的就是考虑这些方面, 系统地研究在圆周与无限直线上的 Fourier 分析以及依种种方式与之有关的逼近论领域。第二卷正在准备之中, 它涉及多元函数问题, 超出这里的一维理论的范围。

第一卷以近一半的篇幅用变换的观点讨论了 Fourier 级数与 Fourier 积分的理论, 这种平行的处理对于理解抽象调和分析是很有用的; 因此基本的经典理论以这样的形式出现, 它们是针对第二卷中将要讨论的任意局部紧 Abel 群情形的。另一半则讨论用以构成 Fourier 分析的基本运算即卷积的概念。于是, 逼近论部分的主题是卷积积分理论、函数利用卷积进行“光滑”、以及相应的逼近阶的研究。这种方法看来很特殊, 但它不仅可概括很多经典理论的课题, 而且还可导出一些有意义的新结果, 例如 Fourier 级数求和法, 共轭函数, 分数阶积分与微分, 偏微分方程解的极限性态以及饱和理论等。

另一方面, 我们既不打算提供一部关于 Fourier 级数或 Fourier 积分本身的论著, 也不准备写成一本那样的经典逼近论

的教科书。实际上, Fourier 级数理论是 A. Zygmund(1935, 1959) 与 Н. К. Bari (1961) 的不朽著作的中心课题。而关于 Fourier 积分, 我们的目标仅在于把 E. C. Titchmarsh(1937) 与 S. Bochner-K. Chandrasekharan(1949) 所写的很好的著作中某些部分改得跟上时代, 并补充了圆周上的 Fourier 变换。此外, 几十年来, 讨论逼近论广阔领域的一些优秀书籍已经出现了。作为经典著作, 我们可以提出 Н. И. Ахиезер(1947) 与 И. П. Натансон(1949)。本卷则着重于对上述三个主要领域中的每一个作详细介绍, 强调它们的基本的、统一的原则, 最后在卷积分饱和理论上达到高峰。

逼近论的很多教科书所处理的仅是连续函数(如果包括 L^p 空间的话, 也是分开处理的), 而本书则对 $C_{2\pi}$ 空间与 $L^p_{2\pi}$ 空间($1 \leq p < \infty$) 一起讨论。在谈到 Fourier 变换时已提及, 周期问题与全直线上相应问题是平行讨论的, 这是本书的全部特征所在。它揭示了两种理论间的共同结构(例如, 比较第六章与第十一章的处理), 而一般的书总是分开独立地讨论的。每当在叙述或证明上十分类似时, 我们就把重点放在不同的证法上。然而, 主要对周期情形感兴趣的读者, 可以直接从第一章、第二章与第四章着手, 并接着阅读第六章指出的有关部分与 § 7.1。然后再转到第九章, § 10.1—10.4, § 11.4—11.5, § 12.1—12.2。另一方面, 第四章、第五章连同第一章与第三章 (§ 1.1—1.2, 1.4, 3.1—3.2) 的基本内容一起可以作为(经典) Fourier 分析的简明教程; 关于应用方面, 读者可以参看第六章与第七章。其实, 第七章给出了 Fourier 变换法首要的且最熟悉的应用, 也就是求解偏微分方程。在第十到第十三章中, 这些积分变换法得到了发展与完善, 以致能处理逼近论中更深奥的与更理论性的问题。周期函数经典逼近论的简要入门性的教材, 可以用第一章与第二章作基础。

目前的处理基本上是自给自足的;从初等水平开始,逐渐加深并完全进入高级课题以及这一领域中研究的前缘。很多结果,尤其是第十章到第十三章中的那些,还是头一次发表,至少是第一次用书本的形式发表。虽然从数学观点来看讲解是完全严格的,我们还是采取了最低水平的抽象化而不使精确性有所损失。在很多证明中需要错综复杂的分析,我们都详细地这样做了,这不仅因为我们相信节省读者时间比节省篇幅更为重要,而且也因为我们坚信初学者应能懂得证明的每个步骤。如果把证明的优美简洁这一优点撇开不论,那么,近来很多教科书都走向了这样的极端:除了有关领域中的专家以外,其他人是很难看懂的。虽然我们对深度与广度两个方面尽量注意,但对迅速增长的多样性与发展的问題,仍不可避免地忽略了若干项目。借助于探讨那些已经吸引了我们想象力的课题来指导我们的选材,大概没有必要作解释了;然而,在编写过程中,我们仍试图去说明种种分析技巧。

本卷在叙述上是循序渐进的,因此便于数学、应用数学以及数学物理等有关领域的高年级大学生使用。也希望本书能作为物理科学工作者的参考书。确实,本书的中心课题就是 Fourier 分析与逼近论,这在很多学科中是极为重要的。主要的预备知识应是关于高等微积分的牢固基础以及关于初等 Lebesgue 积分与泛函分析的某些工具性知识。为使本书能自给自足,这些基本知识都收集在预备知识第 0 章中。

总共约有 550 个习题,分别附在每一节之后。很多习题被分成几部分,包括从正文材料的很常规的应用直到超出课本范围的一些内容。很多较困难的习题都附有提示或指出适当的参考文献。习题的结果往往在后面的一些章节中用到。每章最后都有“注释与附注”一节,其中包括历史的参考文献与述评,以及处理或补充该章特殊结果的文章或书籍,共约 650 篇。在正文中没有谈

到的有关重要课题，也在这里给出它的大意。虽然我们想尽量做到对每个作者都给予充分评价，但对这方面的任何疏漏与不确切之处我们仍然预致歉意。在这方面以及在题材方面，我们都将对来自读者的任何指正表示感激。

第二卷将讨论更抽象的内容，尤其着重于 n 维欧几里德空间的理论。Fourier 变换将在分布理论的基础上进行探讨，并且给出关于多元函数逼近论的系统论述。还包括下述内容：借助于嵌入定理，用 Lipschitz 条件、Riesz 变换与分数阶积分、Bessel 位势理论等等去表征带有径向或乘积核奇异积分的饱和类。

过去十年由作者之一主讲另一协助，在亚琛理工学院开设了关于 Fourier 级数、Fourier 变换与逼近论等几个学期的课程，其讲稿便是本书的初稿。第三稿即最后的打字稿是由两位作者合作从 1966 年夏开始的。我们尤其幸运的是能得到我们研究组几位成员的协助。E. L. Stark 博士校阅了全部手稿，提出了有益的建议，对每一章进行编辑加工，帮助校阅了校样并编制了索引。确实，没有他的耐心与不知疲倦的工作，是不可能完成本书的现有规模的。E. Görlich 博士与 W. Trebels 博士提出了宝贵的意见与批评，阅读了部分手稿并对很多重要的地方给予校正；手稿的若干部分，包括第十一章在内，是同 Trebels 博士合写的。F. Esser 先生帮助校阅了校样。我们特别受惠于我们的秘书 U. Combach 女士，她不辞劳苦地欣然为我们打印了最后的样稿；较早的样稿是由 K. Koch 夫人与 D. Ewers 夫人下功夫打印出来的。

我们还要对 Birkhäuser 出版社的 O. Einsele 先生的关注以及对 William Clowes and Sons 公司的全体职员在本书出版中表现出来的技巧与细心表示感谢。

P. L. Butzer 与 R. J. Nessel

1970 年 2 月于亚琛

目 录

序言

第0章 预备知识	1
0.1 Lebesgue 积分基础	1
0.2 直线群上的卷积	6
0.3 其它的函数类与序列	9
0.4 周期函数及其卷积	13
0.5 直线群上的不变函数	16
0.6 类 $BV_{2\pi}$	21
0.7 赋范线性空间, 有界线性算子	24
0.8 有界线性泛函, Riesz 表现定理	32
0.9 参考文献	38

第一篇 用奇异积分逼近

第一章 周期函数的奇异积分	44
1.0 引言	44
1.1 依范数的收敛性与导数	45
1.1.1 依范数的收敛性	45
1.1.2 导数	49
1.2 Fourier 级数求和法	58
1.2.1 定义	58
1.2.2 Dirichlet 核与 Fejér 核	62
1.2.3 Weierstrass 逼近定理	64
1.2.4 Fourier 级数的可和性	66
1.2.5 行有限 θ 因子	69
1.2.6 共轭级数的可和性	70
1.2.7 Fourier-Stieltjes 级数	72

1.3	关于依范数收敛的检验集	80
1.3.1	某些卷积算子的范数	81
1.3.2	Banach-Steinhaus 定理的某些应用	83
1.3.3	正核	86
1.4	逐点收敛性	92
1.5	正奇异积分的逼近阶	101
1.5.1	连续模与 Lipschitz 类	101
1.5.2	正逼近定理	104
1.5.3	检验函数法	106
1.5.4	渐近性质	109
1.6	进一步的正逼近定理, Nikolskiĭ 常数	119
1.6.1	Fejér-Korovkin 奇异积分	119
1.6.2	进一步的正逼近定理	121
1.6.3	Nikolskiĭ 常数	123
1.7	简单逆逼近定理	130
1.8	注释与附注	134
第二章 最佳逼近多项式及奇异积分的 Jackson 定理与		
	Bernstein 定理	141
2.0	引言	141
2.1	最佳逼近多项式	142
2.2	Jackson 定理	144
2.3	Bernstein 定理	147
2.4	各种应用	154
2.5	奇异积分的逼近定理	161
2.5.1	Abel-Poisson 奇异积分	161
2.5.2	de La Vallée Poussin 奇异积分	166
2.6	注释与附注	171
第三章 直线群上的奇异积分		
3.0	引言	176
3.1	依范数的收敛性	177
3.1.1	定义与基本性质	177
3.1.2	Fejér 奇异积分	179

3.1.3 Gauss-Weierstrass 奇异积分	184
3.1.4 Cauchy-Poisson 奇异积分	185
3.2 逐点收敛性	193
3.3 逼近的阶	200
3.4 进一步的正逼近定理	208
3.5 逆逼近定理	214
3.6 保形性质	220
3.6.1 Gauss-Weierstrass 奇异积分	220
3.6.2 变号减少核	225
3.7 注释与附注	230

第二篇 Fourier 变换

第四章 有限 Fourier 变换	241
4.0 引言	241
4.1 $L^1_{2\pi}$ 理论	241
4.1.1 基本性质	241
4.1.2 反演理论	246
4.1.3 导数的 Fourier 变换	247
4.2 $L^p_{2\pi}$ 理论, $p > 1$	251
4.2.1 $p=2$ 的情形	251
4.2.2 $p \neq 2$ 的情形	254
4.3 有限 Fourier-Stieltjes 变换	257
4.3.1 基本性质	257
4.3.2 反演理论	262
4.3.3 导数的 Fourier-Stieltjes 变换	263
4.4 注释与附注	266
第五章 直线群上的 Fourier 变换	269
5.0 引言	269
5.1 L^1 理论	269
5.1.1 基本性质	269
5.1.2 反演理论	271
5.1.3 导数的 Fourier 变换	276

5.1.4	Fourier 变式的导数, 正函数的矩, Peano 导数与 Riemann 导数	280
5.1.5	Poisson 求和公式	287
5.2	L^p 理论, $1 < p \leq 2$	296
5.2.1	$p=2$ 的情形	296
5.2.2	$1 < p < 2$ 的情形	298
5.2.3	基本性质	301
5.2.4	Fourier 反演积分的求和法	303
5.2.5	导数的 Fourier 变换	305
5.2.6	Plancherel 定理	307
5.3	Fourier-Stieltjes 变换	311
5.3.1	基本性质	311
5.3.2	反演理论	315
5.3.3	导数的 Fourier-Stieltjes 变换	318
5.4	注释与附注	322
第六章 表现定理		328
6.0	引言	328
6.1	充要条件	330
6.1.1	序列表现为有限 Fourier 或 Fourier-Stieltjes 变式	330
6.1.2	函数表现为 Fourier 或 Fourier-Stieltjes 变式	333
6.2	Bochner 定理	342
6.3	充分条件	351
6.3.1	拟凸性	351
6.3.2	表现为 $L^1_{2\pi}$ 变式	355
6.3.3	表现为 L^1 变式	358
6.3.4	还原定理	361
6.4	对奇异积分的应用	368
6.4.1	一般 Weierstrass 奇异积分	368
6.4.2	典型平均	374
6.5	乘子	381
6.5.1	周期函数类的乘子	382
6.5.2	L^p 上的乘子	385
6.6	注释与附注	395

第七章 Fourier 变换法与二阶偏微分方程	401
7.0 引言	401
7.1 有限 Fourier 变换法	404
7.1.1 热传导问题的解	404
7.1.2 单位圆盘的 Dirichlet 问题与 Neumann 问题.....	409
7.1.3 弦振动问题	413
7.2 L^1 中的 Fourier 变换法	423
7.2.1 在无限长杆上的扩散	423
7.2.2 关于半平面的 Dirichlet 问题.....	427
7.2.3 无限弦的运动	429
7.3 注释与附注	432
符号表	435
Fourier 变换表	444
索引	449

第0章 预备知识

本章列举了实变函数论, Lebesgue 积分, 卷积, 不变函数, 赋范线性空间, 有界线性算子与泛函分析中的若干基本概念与结果, 以及贯穿全书的一些规定与术语. 为了读者方便, 这些结果都写成正文中实际应用的形式而且只写到那样的程度. 为了今后根据编号来援引概念与命题, 其中某些内容将以各种不同的形式给出, 虽然统一叙述是可能的. 对几个较重要的事实给出了证明或者还给出明确的参考文献; 这使读者便于复习这些内容.

读者还应参看符号表.

0.1 Lebesgue 积分基础

设 \mathcal{R} 是一切实数的集, 也称为实直线或直线群, 而 \mathcal{C} 是一切复数的集即复平面. 除特别声明外, 本书中一切函数 f, g, \dots 都定义在 \mathcal{R} 上并假定(在 \mathcal{R} 上)是(复值①) Lebesgue 可测的. \mathbf{C} 表示 \mathcal{R} 上所有一致连续且有界的函数的集, 并赋予范数

$$(0.1.1) \quad \|f\|_{\mathbf{C}} = \sup_{x \in \mathcal{R}} |f(x)|.$$

\mathbf{L}^p 当 $1 \leq p < \infty$ 时是 \mathcal{R} 上 p 幂 Lebesgue 可积函数的集, 而当 $p = \infty$ 时, \mathbf{L}^∞ 就表示 \mathcal{R} 上本性有界(几乎处处有界)的函数集. 若 $1 \leq p < \infty$, 对于 $f \in \mathbf{L}^p$, 定义

$$(0.1.2) \quad \|f\|_p = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^p du \right\}^{1/p},$$

① 应当强调, 对本书来说, 从实值函数到复值函数的推广是清楚的: 对于复值函数 f , 某一性质成立当且仅当它的实部 $\operatorname{Re}(f)$ 与虚部 $\operatorname{Im}(f)$ 都成立.

而在 $p = \infty$ 的情形,

$$(0.1.3) \quad \|f\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathcal{R}} |f(x)|.$$

这样, \mathbf{L}^p 正好由范数 $\|f\|_p$ 为有限的那些函数组成. (0.1.2) 中的常数因子 $1/\sqrt{2\pi}$ 只是为了在 Fourier 分析中方便而已. 与此相关, \mathbf{NL}^1 表示用 $\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = \sqrt{2\pi}$ 标准化了的函数 $f \in \mathbf{L}^1$ 的集合. 如果可能发生混淆的话, 就使用较系统的记号 $\mathbf{C}(\mathcal{R})$, $\mathbf{L}^p(\mathcal{R})$, $\|f\|_{\mathbf{L}^p}$ 等等. 此外, 也用符号 $\|f(\circ)\|$ 代替 $\|f\|$, 以表示范数是关于什么变量而取的 (例如, $\|f(\circ+h)\|$). 如果 f 有初等表达式, 我们就写作 $\|f(x)\|$ (例如 $\|(1+x^2)^{-1}\|$).

因为 \mathcal{R} 是非紧的, 有反例 (见习题 5.2.1) 证实: $f \in \mathbf{L}^p$ 不一定蕴含对任何 q , $1 \leq q \leq \infty$, 有 $f \in \mathbf{L}^q$. 然而, 若 $f \in \mathbf{L}^p \cap \mathbf{L}^{\infty}$, 借用初等估计就能得到, 对 $p \leq q \leq \infty$ 的每个 q , 有 $f \in \mathbf{L}^q$. 更一般地, 若对于 $1 \leq p < q < \infty$ 有 $f \in \mathbf{L}^p \cap \mathbf{L}^q$, 则对每个 $p \leq s \leq q$ 有 $f \in \mathbf{L}^s$. 其实, 令

$$\mathcal{E}_1 = \{x \in \mathcal{R} \mid |f(x)| \leq 1\},$$

$$\mathcal{E}_2 = \{x \in \mathcal{R} \mid |f(x)| > 1\},$$

则 $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 = \mathcal{R}$, 且对 $q < \infty$ 有

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \|f\|_q^q &= \int_{\mathcal{E}_1} |f(u)|^q du + \int_{\mathcal{E}_2} |f(u)|^q du \\ &\leq \int_{\mathcal{E}_1} |f(u)|^p du + \int_{\mathcal{E}_2} |f(u)|^q du \\ &\leq \sqrt{2\pi} (\|f\|_p^p + \|f\|_q^q). \end{aligned}$$

在本书中, $\mathbf{X}(\mathcal{R})$ 总表示空间 \mathbf{C} 或 \mathbf{L}^p ($1 \leq p < \infty$) 中的一个. 对 $f, g \in \mathbf{X}(\mathcal{R})$, 我们写 $f = g$ (a. e.), 当 $\mathbf{X}(\mathcal{R}) = \mathbf{C}$ 时是表示等式对一切 $x \in \mathcal{R}$ 成立, 而当 $\mathbf{X}(\mathcal{R}) = \mathbf{L}^p$, $1 \leq p < \infty$ 时表示等式几乎处处成立, 也就是, 表示 $\|f - g\|_{\mathbf{X}(\mathcal{R})} = 0$. 这时我们也写成在 $\mathbf{X}(\mathcal{R})$ 中 $f = g$.

实值函数 f 称为偶的, 奇的, 正的(非负的)与严格正的, 如果分别有 $f(x)=f(-x)$, $f(x)=-f(-x)$, $f(x)\geq 0$ 与 $f(x)> 0$. 称 f 为单调递增的(在 \mathcal{R} 上), 如果对于 $x_1\leq x_2$ 有 $f(x_1)\leq f(x_2)$; 称为严格单调递增的, 如果对 $x_1<x_2$ 有 $f(x_1)<f(x_2)$; 称为单调递减的, 如果对于 $x_1\leq x_2$ 有 $f(x_1)\geq f(x_2)$. 函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 称为单调递增的, 如果对每个 x 与 $n=1, 2, \dots$, 有

$$f_n(x)\leq f_{n+1}(x).$$

命题 0.1.1 (Fatou 引理) 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 \mathcal{R} 上的正函数序列, 如果 $\liminf_{n\rightarrow\infty} f_n(x)=f(x)$ a. e., 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du\leq\liminf_{n\rightarrow\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(u)du.$$

命题 0.1.2 (Lebesgue 单调收敛定理) 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是单调递增的正函数序列. 如果 $\lim_{n\rightarrow\infty} f_n(x)=f(x)$ a. e., 则

$$(0.1.4) \quad \lim_{n\rightarrow\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(u)du=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du.$$

这结果就是熟知的 Beppo Levi 定理, 也可参看命题 0.3.3.

命题 0.1.3 (Lebesgue 控制收敛定理) 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbf{L}^1$, 且设 $\lim_{n\rightarrow\infty} f_n(x)=f(x)$ a. e. 如果存在 $g\in\mathbf{L}^1$, 使对一切 n 有 $|f_n(x)|\leq g(x)$, 则 $f\in\mathbf{L}^1$, 且(0.1.4)成立.

命题 0.1.4 (Fubini 定理) 设 $x, y\in\mathcal{R}$, $f(x, y)$ 是二维欧氏空间 \mathcal{R}^2 上定义且可测的二个(实)变元的(复值)函数.

(i) 设 $f\in\mathbf{L}^1(\mathcal{R}^2)$, 亦即二重积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx dy$ 是绝对收敛的. 则对几乎所有的 x , $f(x, y)$ 是 \mathcal{R} 上关于变元 y 的绝对可积函数, 亦即 $f(x, \circ)\in\mathbf{L}^1(\mathcal{R})$ a. e. 此外,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\circ, y)dy\in\mathbf{L}^1(\mathcal{R}),$$

且有
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy.$$

(ii) 设 $\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dy \right\} dx$ 存在, 为有限数. 则 $f \in$

$L^1(\mathcal{R}^2)$ 且

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right\} dy. \end{aligned}$$

命题 0.1.4 的第二部分也与 Tonelli-Hobson 的名字有关.

命题 0.1.5 (Minkowski 不等式) 设 $f, g \in \mathbf{X}(\mathcal{R})$, 则 $f+g \in \mathbf{X}(\mathcal{R})$, 且

$$\|f+g\|_{\mathbf{X}(\mathcal{R})} \leq \|f\|_{\mathbf{X}(\mathcal{R})} + \|g\|_{\mathbf{X}(\mathcal{R})}.$$

若 p 满足 $1 \leq p < \infty$, p 的共轭数 p' 当 $1 < p < \infty$ 时通过式 $1/p + 1/p' = 1$ 来定义; 当 $p=1$ 时, $p'=\infty$; 而当 $p=\infty$ 时, $p'=1$.

命题 0.1.6 (Hölder 不等式) 设 $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, 且 $g \in L^{p'}$, 则 $fg \in L^1$ 并成立 $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

着重指出, 我们写 $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, 指的是对某个固定的 p ($1 \leq p < \infty$) $f \in L^p$ (并非对这个区间中一切 p). 全书都是这样做的. 对于 $p=2$, 命题 0.1.6 的结论就是熟知的 Cauchy-Schwarz-Bunjakowski 不等式.

命题 0.1.7 (Hölder-Minkowski 不等式) 设 $f(x, y)$ 是 \mathcal{R}^2 上定义的可测函数. 若 $\|f(\circ, y)\|_{\mathbf{X}(\mathcal{R})} \in L^1$, 则

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} f(\circ, y) dy \right\|_{\mathbf{X}(\mathcal{R})} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|f(\circ, y)\|_{\mathbf{X}(\mathcal{R})} dy.$$

这是熟知的广义 Minkowski 不等式(参看 Hardy-Littlewood-Pólya [1, p. 148]).

命题 0.1.8 ($\mathbf{X}(\mathcal{R})$ 的完备性) 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{X}(\mathcal{R})$ 是 $\mathbf{X}(\mathcal{R})$ 中的 Cauchy 序列, 亦即

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_{\mathbf{X}(\mathcal{R})} = 0.$$

则存在 $f \in \mathbf{X}(\mathcal{R})$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathbf{X}(\mathcal{R})} = 0$. 在 \mathbf{L}^∞ 中同样的论断成立.

设 $f, f_1, f_2, \dots \in \mathbf{L}^p, 1 \leq p < \infty$. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$, 则 f 称为序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 的强极限或 \mathbf{L}^p 极限或依 p 幂平均意义下的极限; 也可说成序列 $\{f_n\}$ 依 \mathbf{L}^p 范数或依强拓扑趋于 f , 并记为

$$f = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \overset{(p)}{\text{l.i.m.}} f_n.$$

在 \mathbf{C} 空间中, 强收敛就是一致收敛.

命题 0.1.9 (平均连续性) 若 f 属于 $\mathbf{X}(\mathcal{R})$, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f(\circ + h) - f(\circ)\|_{\mathbf{X}(\mathcal{R})} = 0.$$

如果以 \mathbf{L}^∞ 代替 \mathbf{C} , 上面的论断不再成立. 因此, 本书考虑强收敛性时, 通常只讨论空间 $\mathbf{X}(\mathcal{R})$.

命题 0.1.10 (i) 设 $f, \{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Lebesgue 可测函数, 使依测度有 $f_n \rightarrow f$, 亦即对每个 $\delta > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\text{meas} \{x \mid |f(x) - f_n(x)| > \delta\}] = 0.$$

则存在子序列 $\{f_{n_k}\}$, 使 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ a. e.

(ii) 设 $f, \{f_n\}_{n=1}^\infty$ 属于 $\mathbf{L}^p, 1 \leq p < \infty$. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0,$$

则存在子序列 $\{f_{n_k}\}$, 使

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \text{ a. e.}$$

命题 0.1.11 设 $f, \{f_n\}_{n=1}^\infty$ 属于 $\mathbf{L}^p, 1 < p < \infty$. 若存在常数 M , 使 $\|f_n\|_p \leq M$ 对所有 $n=1, 2, \dots$ 成立, 且若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ a. e.},$$

则对每个 $g \in \mathbf{L}^{p'}$ 有