FOURIER分析与逼近论

第一卷　上册

〔德〕P. L. Butzer　R. J. Nessel 著

郑维行　苏维宜　任福贤　何泽霖　译

高等教育出版社

FOURIER 分析与逼近论

第一卷 上 册

[德] P. L. Butzer R. J. Nessel 著

郑维行 苏维宜 任福贤 何泽霖 译

高等教育出版社

本书（第一卷）据西德 Birkhäuser 出版社 1971 年出版 P. L. Butzer 与 R. J. Nessel 著《Fourier Analysis and Approximation》Vol. 1 译出. 内容包含 Fourier 级数、Fourier 积分与逼近论（包括用奇异积分逼近）三个方面. 书中强调用基本的、统一的原则平行地处理有关 Fourier 级数与积分的内容，有利于对抽象调和分析的理解. 在各种函数类的表征与饱和理论部分反映了最新成果. 本书取材丰富，叙述严谨，论证详明，自给自足. 每章都附有"注释与附注"，介绍了历史概况和进一步知识. 全书还配备了约 550 个不同水平的习题.

本书可作为高等院校数学专业高年级学生及研究生选修课教材，也可作为物理专业，应用数学专业师生参考书. 阅读本书大致需要有数学分析的坚实基础及实变、泛函初步知识，这些预备知识都已集中在第 0 章内.

第一卷中译本分上下册出版. 上册包括"用奇异积分逼近"和"Fourier 变换"共两篇. 下册包括"Hilbert 变换"、"某些函数类的表征"、"饱和理论"等三篇以及第一卷的参考文献.

Z99 /11

FOURIER 分析与逼近论

第一卷 上 册

[德] P. L. Butzer R. J. Nessel 著

郑维行 苏维宜 任福贤 何泽霖 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 14.75 字数 352,000

1985 年 1 月第 1 版 1985 年 1 月第 1 次印刷

印数 00,001—6,500

书号 13010·0898 定价 3.70 元

序　言

1965年8月，在 Oberwolfach (Black Forest) 数学研究所由作者之一主持召开的"调和分析与积分变换"国际会议上，感到确有必要编写一本侧重以下几个方面的 Fourier 分析的书：(i) 从变换的观点对 Fourier 级数与 Fourier 变换作平行处理，(ii) 在 $\mathbf{L}^p(\mathscr{R}^n)$ 空间中讨论 Fourier 变换，不限于 $p=1$ 与 $p=2$ 的情形，(iii) 具有完全严格论证的偏微分方程的古典解，(iv) 卷积型奇异积分理论，(v) 应用于逼近论，包括饱和理论，(vi) 乘子理论，(vii) Hilbert 变换，Riesz 分数阶积分，Bessel 位势理论，(viii) 局部紧群上的 Fourier 变换法．本卷的目的就是考虑这些方面，系统地研究在圆周与无限直线上的 Fourier 分析以及依种种方式与之有关的逼近论领域．第二卷正在准备之中，它涉及多元函数问题，超出这里的一维理论的范围．

第一卷以近一半的篇幅用变换的观点讨论了 Fourier 级数与 Fourier 积分的理论，这种平行的处理对于理解抽象调和分析是很有用的；因此基本的经典理论以这样的形式出现，它们是针对第二卷中将要讨论的任意局部紧 Abel 群情形的．另一半则讨论用以构成 Fourier 分析的基本运算即卷积的概念．于是，逼近论部分的主题是卷积积分理论、函数利用卷积进行"光滑"、以及相应的逼近阶的研究．这种方法看来很特殊，但它不仅可概括很多经典理论的课题，而且还可导出一些有意义的新结果，例如 Fourier 级数求和法，共轭函数，分数阶积分与微分，偏微分方程解的极限性态以及饱和理论等．

另一方面，我们既不打算提供一部关于 Fourier 级数或 Fourier 积分本身的论著，也不准备写成一本那样的经典逼近论

的教科书．实际上，Fourier 级数理论是 A. Zygmund(1935, 1959) 与 Н. К. Бари (1961) 的不朽著作的中心课题．而关于 Fourier 积分，我们的目标仅在于把 E. C. Titchmarsh(1937) 与 S. Bochner-K. Chandrasekharan(1949)所写的很好的著作中某些部分改得跟上时代，并补充了圆周上的 Fourier 变换．此外，几十年来，讨论逼近论广阔领域的一些优秀书籍已经出现了．作为经典著作，我们可以提出 Н. И. Ахиезер(1947) 与 И. П. Натансон (1949)．本卷则着意于对上述三个主要领域中的每一个作详细介绍，强调它们的基本的、统一的原则，最后在卷积积分饱和理论上达到高峰．

逼近论的很多教科书所处理的仅是连续函数(如果包括 $\mathbf{L}^p$ 空间的话，也是分开处理的)，而本书则对 $\mathbf{C}_{2\pi}$ 空间与 $\mathbf{L}^p_{2\pi}$ 空间($1\leqslant p<\infty$)一起讨论．在谈到 Fourier 变换时已提及，周期问题与全直线上相应问题是平行讨论的，这是本书的全部特征所在．它揭示了两种理论间的共同结构(例如，比较第六章与第十一章的处理)，而一般的书总是分开独立地讨论的．每当在叙述或证明上十分类似时，我们就把重点放在不同的证法上．然而，主要对周期情形感兴趣的读者，可以直接从第一章、第二章与第四章着手，并接着阅读第六章指出的有关部分与 § 7.1．然后再转到第九章，§ 10.1—10.4, § 11.4—11.5, § 12.1—12.2．另一方面，第四章、第五章连同第一章与第三章 (§ 1.1—1.2, 1.4, 3.1—3.2) 的基本内容一起可以作为(经典) Fourier 分析的简明教程；关于应用方面，读者可以参看第六章与第七章．其实，第七章给出了 Fourier 变换法首要的且最熟悉的应用，也就是求解偏微分方程．在第十到第十三章中，这些积分变换法得到了发展与完善，以致能处理逼近论中更深奥的与更理论性的问题．周期函数经典逼近论的简要入门性的教材，可以用第一章与第二章作基础．

目前的处理基本上是自给自足的；从初等水平开始，逐渐加深并完全进入高级课题以及这一领域中研究的前缘．很多结果，尤其是第十章到第十三章中的那些，还是头一次发表，至少是第一次用书本的形式发表．虽然从数学观点来看讲解是完全严格的，我们还是采取了最低水平的抽象化而不使精确性有所损失．在很多证明中需要错综复杂的分析，我们都详细地这样做了，这不仅因为我们相信节省读者时间比节省篇幅更为重要，而且也因为我们坚信初学者应能懂得证明的每个步骤．如果把证明的优美简洁这一优点撇开不论，那么，近来很多教科书都走向了这样的极端：除了有关领域中的专家以外，其他人是很难看懂的．虽然我们对深度与广度两个方面尽量注意，但对迅速增长的多样性与发展的问题，仍不可避免地忽略了若干项目．借助于探讨那些已经吸引了我们想象力的课题来指导我们的选材，大概没有必要作解释了；然而，在编写过程中，我们仍试图去说明种种分析技巧．

本卷在叙述上是循序渐进的，因此便于数学、应用数学以及数学物理等有关领域的高年级大学生使用．也希望本书能作为物理科学工作者的参考书．确实，本书的中心课题就是 Fourier 分析与逼近论，这在很多学科中是极为重要的．主要的预备知识应是关于高等微积分的牢固基础以及关于初等 Lebesgue 积分与泛函分析的某些工具性知识．为使本书能自给自足，这些基本知识都收集在预备知识第 0 章中．

总共约有 550 个习题，分别附在每一节之后．很多习题被分成几部分，包括从正文材料的很常规的应用直到超出课本范围的一些内容．很多较困难的习题都附有提示或指出适当的参考文献．习题的结果往往在后面的一些章节中用到．每章最后都有“注释与附注”一节，其中包括历史的参考文献与述评，以及处理或补充该章特殊结果的文章或书籍，共约 650 篇．在正文中没有谈

到的有关重要课题，也在这里给出它的大意．虽然我们想尽量做到对每个作者都给予充分评价，但对这方面的任何疏漏与不确切之处我们仍然预致歉意．在这方面以及在题材方面，我们都将对来自读者的任何指正表示感激．

第二卷将讨论更抽象的内容．尤其着重于 n 维欧几里德空间的理论．Fourier 变换将在分布理论的基础上进行探讨，并且给出关于多元函数逼近论的系统论述．还包括下述内容：借助于嵌入定理，用 Lipschitz 条件、Riesz 变换与分数阶积分、Bessel 位势理论等等去表征带有径向或乘积核奇异积分的饱和类．

过去十年由作者之一主讲另一协助，在亚琛理工学院开设了关于 Fourier 级数、Fourier 变换与逼近论等几个学期的课程，其讲稿便是本书的初稿．第三稿即最后的打字稿是由两位作者合作从 1966 年夏开始的．我们尤其幸运的是能得到我们研究组几位成员的协助．E. L. Stark 博士校阅了全部手稿，提出了有益的建议，对每一章进行编辑加工，帮助校阅了校样并编制了索引．确实，没有他的耐心与不知疲倦的工作，是不可能完成本书的现有规模的．E. Görlich 博士与 W. Trebels 博士提出了宝贵的意见与批评，阅读了部分手稿并对很多重要的地方给予校正；手稿的若干部分，包括第十一章在内，是同 Trebels 博士合写的．F. Esser 先生帮助校阅了校样．我们特别受惠于我们的秘书 U. Combach 女士，她不辞劳苦地欣然为我们打印了最后的样稿；较早的样稿是由 K. Koch 夫人与 D. Ewers 夫人下功夫打印出来的．

我们还要对 Birkhäuser 出版社的 C. Einsele 先生的关注以及对 William Clowes and Sons 公司的全体职员在本书出版中表现出来的技巧与细心表示感谢．

P. L. Butzer 与 R. J. Nessel

1970 年 2 月于亚琛

目 录

第二篇 Fourier 变换

第0章 预备知识

本章列举了实变函数论, Lebesgue 积分, 卷积, 囿变函数, 赋范线性空间, 有界线性算子与泛函分析中的若干基本概念与结果, 以及贯穿全书的一些规定与术语. 为了读者方便, 这些结果都写成正文中实际应用的形式而且只写到那样的程度. 为了今后根据编号来援引概念与命题, 其中某些内容将以各种不同的形式给出, 虽然统一叙述是可能的. 对几个较重要的事实给出了证明或者还给出明确的参考文献; 这使读者便于复习这些内容.

读者还应参看符号表.

0.1 Lebesgue 积分基础

设 $\mathscr{R}$ 是一切实数的集, 也称为实直线或直线群, 而 $\mathscr{C}$ 是一切复数的集即复平面. 除特别声明外, 本书中一切函数 $f, g, \cdots$ 都定义在 $\mathscr{R}$ 上并假定(在 $\mathscr{R}$ 上)是(复值①) Lebesgue 可测的. $\mathbf{C}$ 表示 $\mathscr{R}$ 上所有一致连续且有界的函数的集, 并赋予范数

(0.1.1) $$\|f\|_{\mathbf{C}}=\sup_{x\in\mathscr{R}}|f(x)|.$$

$\mathbf{L}^p$ 当 $1\leqslant p<\infty$ 时是 $\mathscr{R}$ 上 p 幂 Lebesgue 可积函数的集, 而当 $p=\infty$ 时, $\mathbf{L}^\infty$ 就表示 $\mathscr{R}$ 上本性有界(几乎处处有界)的函数集. 若 $1\leqslant p<\infty$, 对于 $f\in\mathbf{L}^p$, 定义

(0.1.2) $$\|f\|_p=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|^p du\right\}^{1/p},$$

① 应当强调, 对本书来说, 从实值函数到复值函数的推广是清楚的: 对于复值函数 f, 某一性质成立当且仅当它的实部 $\mathrm{Re}(f)$ 与虚部 $\mathrm{Im}(f)$ 都成立.

而在$p=\infty$的情形,

(0.1.3) $$\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathscr{R}}|f(x)|.$$

这样, $\mathbf{L}^p$ 正好由范数$\|f\|_p$为有限的那些函数组成. (0.1.2)中的常数因子$1/\sqrt{2\pi}$只是为了在 Fourier 分析中方便而已. 与此相关, $\mathbf{NL}^1$表示用$\int_{-\infty}^{\infty}f(u)du=\sqrt{2\pi}$标准化了的函数$f\in\mathbf{L}^1$的集合. 如果可能发生混淆的话,就使用较系统的记号$\mathbf{C}(\mathscr{R})$, $\mathbf{L}^p(\mathscr{R})$, $\|f\|_{\mathbf{L}^p}$等等. 此外,也用符号$\|f(\circ)\|$代替$\|f\|$,以表示范数是关于什么变量而取的(例如, $\|f(\circ+h)\|$). 如果f有初等表达式,我们就写作$\|f(x)\|$(例如$\|(1+x^2)^{-1}\|$).

因为$\mathscr{R}$是非紧的, 有反例(见习题5.2.1)证实: $f\in\mathbf{L}^p$不一定蕴含对任何q, $1\leqslant q\leqslant\infty$, 有$f\in\mathbf{L}^q$. 然而, 若$f\in\mathbf{L}^p\cap\mathbf{L}^\infty$, 借用初等估计就能得到, 对$p\leqslant q\leqslant\infty$的每个$q$, 有$f\in\mathbf{L}^q$. 更一般地, 若对于$1\leqslant p<q<\infty$有$f\in\mathbf{L}^p\cap\mathbf{L}^q$, 则对每个$p\leqslant s\leqslant q$有$f\in\mathbf{L}^s$. 其实, 令

$$\mathscr{E}_1=\{x\in\mathscr{R}\mid |f(x)|\leqslant 1\},$$
$$\mathscr{E}_2=\{x\in\mathscr{R}\mid |f(x)|>1\},$$

则$\mathscr{E}_1\cup\mathscr{E}_2=\mathscr{R}$, 且对$q<\infty$有

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\|f\|_s^s&=\int_{E_1}|f(u)|^s du+\int_{E_2}|f(u)|^s du\\&\leqslant\int_{E_1}|f(u)|^p du+\int_{E_2}|f(u)|^q du\\&\leqslant\sqrt{2\pi}(\|f\|_p^p+\|f\|_q^q).\end{aligned}$$

在本书中, $\mathbf{X}(\mathscr{R})$总表示空间$\mathbf{C}$或$\mathbf{L}^p$ $(1\leqslant p<\infty)$中的一个. 对$f, g\in\mathbf{X}(\mathscr{R})$, 我们写$f=g$ (a. e.), 当$\mathbf{X}(\mathscr{R})=\mathbf{C}$时是表示等式对一切$x\in\mathscr{R}$成立, 而当$\mathbf{X}(\mathscr{R})=\mathbf{L}^p$, $1\leqslant p<\infty$时表示等式几乎处处成立, 也就是, 表示$\|f-g\|_{\mathbf{X}(\mathscr{R})}=0$. 这时我们也写成在$\mathbf{X}(\mathscr{R})$中$f=g$.

实值函数 f 称为偶的，奇的，正的(非负的)与严格正的，如果分别有 $f(x)=f(-x)$，$f(x)=-f(-x)$，$f(x)\geqslant 0$ 与 $f(x)>0$. 称 f 为单调递增的(在 $\mathscr{R}$ 上)，如果对于 $x_1\leqslant x_2$ 有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$；称为严格单调递增的，如果对 $x_1<x_2$ 有 $f(x_1)<f(x_2)$；称为单调递减的，如果对于 $x_1\leqslant x_2$ 有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$. 函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 称为单调递增的，如果对每个 x 与 $n=1, 2, \cdots$，有

$$f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x).$$

命题 0.1.1(**Fatou 引理**) 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{R}$ 上的正函数序列，如果 $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ a. e.，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du\leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(u)\,du.$$

命题 0.1.2(**Lebesgue 单调收敛定理**) 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调递增的正函数序列. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ a. e.，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du. \tag{0.1.4}$$

这结果就是熟知的 Beppo Levi 定理，也可参看命题 0.3.3.

命题 0.1.3 (**Lebesgue 控制收敛定理**) 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset \mathbf{L}^1$，且设 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ a. e.. 如果存在 $g\in\mathbf{L}^1$，使对一切 n 有 $|f_n(x)|\leqslant g(x)$，则 $f\in\mathbf{L}^1$，且(0.1.4)成立.

命题 0.1.4(**Fubini 定理**) 设 $x, y\in\mathscr{R}$，$f(x, y)$ 是二维欧氏空间 $\mathscr{R}^2$ 上定义且可测的二个(实)变元的(复值)函数.

(i) 设 $f\in\mathbf{L}^1(\mathscr{R}^2)$，亦即二重积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy$ 是绝对收敛的. 则对几乎所有的 x，$f(x, y)$ 是 $\mathscr{R}$ 上关于变元 y 的绝对可积函数，亦即 $f(x, \circ)\in\mathbf{L}^1(\mathscr{R})$ a. e. 此外，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\circ, y)\,dy\in\mathbf{L}^1(\mathscr{R}),$$

且有 $\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\right\}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx\,dy.$

(ii) 设 $\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|dy\right\}dx$ 存在，为有限数．则 $f\in \mathbf{L}^1(\mathscr{R}^2)$ 且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\right\}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx\right\}dy.$$

命题0.1.4的第二部分也与 Tonelli-Hobson 的名字有关．

命题 0.1.5(Minkowski 不等式) 设 $f,g\in\mathbf{X}(\mathscr{R})$，则 $f+g\in\mathbf{X}(\mathscr{R})$，且

$$\|f+g\|_{\mathbf{X}(\mathscr{R})}\leqslant\|f\|_{\mathbf{X}(\mathscr{R})}+\|g\|_{\mathbf{X}(\mathscr{R})}.$$

若 p 满足 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$p$ 的共轭数 p' 当 $1<p<\infty$ 时通过式 $1/p+1/p'=1$ 来定义；当 $p=1$ 时，$p'=\infty$；而当 $p=\infty$ 时，$p'=1$．

命题 0.1.6(Hölder 不等式) 设 $f\in\mathbf{L}^p$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，且 $g\in\mathbf{L}^{p'}$，则 $fg\in\mathbf{L}^1$ 并成立 $\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_{p'}$．

着重指出，我们写 $f\in\mathbf{L}^p$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，指的是对某个固定的 $p(1\leqslant p\leqslant\infty)f\in\mathbf{L}^p$(并非对这个区间中一切 p)．全书都是这样做的．对于 $p=2$，命题0.1.6的结论就是熟知的 Cauchy-Schwarz-Bunjakowski 不等式．

命题 0.1.7 (Hölder-Minkowski 不等式) 设 $f(x,y)$ 是 $\mathscr{R}^2$ 上定义的可测函数．若 $\|f(\circ,y)\|_{\mathbf{X}(\mathscr{R})}\in\mathbf{L}^1$，则

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty}f(\circ,y)dy\right\|_{\mathbf{X}(\mathscr{R})}\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\|f(\circ,y)\|_{\mathbf{X}(\mathscr{R})}dy.$$

这是熟知的广义 Minkowski 不等式(参看 Hardy-Littlewood-Pólya [1, p. 148])．

命题 0.1.8($\mathbf{X}(\mathscr{R})$的完备性) 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbf{X}(\mathscr{R})$ 是 $\mathbf{X}(\mathscr{R})$ 中的 Cauchy 序列，亦即

$$\lim_{n,m\to\infty}\|f_n-f_m\|_{\mathbf{X}(\mathscr{R})}=0.$$

则存在 $f\in\mathbf{X}(\mathscr{R})$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{\mathbf{X}(\mathscr{R})}=0$. 在 $\mathbf{L}^\infty$ 中同样的论断成立.

设 $f, f_1, f_2, \cdots\in\mathbf{L}^p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0$, 则 f 称为序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 的强极限或 $\mathbf{L}^p$ 极限或依 p 幂平均意义下的极限；也可说成序列 $\{f_n\}$ 依 $\mathbf{L}^p$ 范数或依强拓扑趋于 f, 并记为

$$f=\text{s-}\lim_{n\to\infty}f_n=\overset{(p)}{\text{l.i.m.}}\,f_n.$$

在 $\mathbf{C}$ 空间中，强收敛就是一致收敛.

命题 0.1.9(平均连续性) 若 f 属于 $\mathbf{X}(\mathscr{R})$, 则

$$\lim_{h\to0}\|f(\circ+h)-f(\circ)\|_{\mathbf{X}(\mathscr{R})}=0.$$

如果以 $\mathbf{L}^\infty$ 代替 $\mathbf{C}$, 上面的论断不再成立. 因此，本书考虑强收敛性时，通常只讨论空间 $\mathbf{X}(\mathscr{R})$.

命题 0.1.10 (i) 设 f, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Lebesgue 可测函数，使依测度有 $f_n\to f$, 亦即对每个 $\delta>0$,

$$\lim_{n\to\infty}[\text{meas}\,\{x|\,|f(x)-f_n(x)|>\delta\}]=0.$$

则存在子序列 $\{f_{n_k}\}$, 使 $\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=f(x)$ a. e.

(ii) 设 f, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 属于 $\mathbf{L}^p$, $1\leqslant p<\infty$. 若

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p=0,$$

则存在子序列 $\{f_{n_k}\}$, 使

$$\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=f(x)\ \text{a. e.}$$

命题 0.1.11 设 f, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 属于 $\mathbf{L}^p$, $1<p<\infty$. 若存在常数 M, 使 $\|f_n\|_p\leqslant M$ 对所有 $n=1, 2, \cdots$ 成立，且若

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\ \text{a. e.},$$

则对每个 $g\in\mathbf{L}^{p'}$ 有