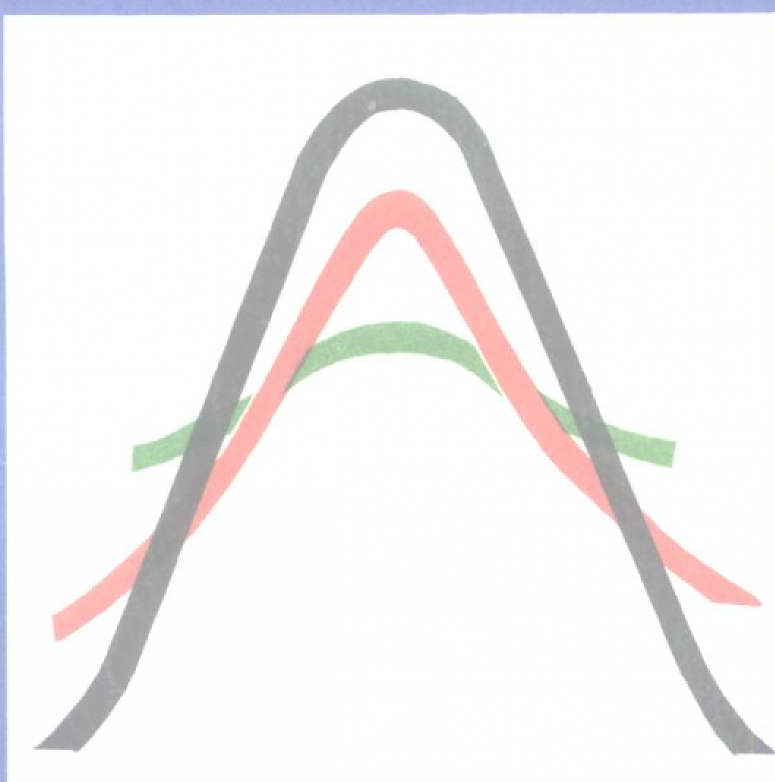
高等学校教材

船体振动学

翁长俭　张保玉　编



大连海运学院出版社

高等学校教材

船体振动学

翁长俭　张保玉　编
赵德有　主　审

大连海运学院出版社

(辽)新登字 11 号

内 容 简 介

本书共六章，分为两部分。前三章为结构振动的基本理论，讨论了单自由度系统、多自由度系统和弹性体的振动，是研究船体振动的理论基础；后三章是船体振动，包括船体振动的特性和计算，船体振动的原因，船体防振、减振措施。书后附有习题。

本书为船舶工程专业大学统编教材，也可供航运与造船及从事其它工程结构振动的技术人员参考。

高等学校教材
船 体 振 动 学
翁长俭 张保玉 编

大连海运学院出版社出版
大连海运学院出版社发行
大连海运学院出版社印刷厂印装

开本：787×1092 1/16 印张：12 字数：300 千
1992 年 7 月第 1 版 1992 年 7 月第 1 次印刷
印数：0001～1500 定价：3.15 元

ISBN 7-5632-0370-2/U·60

前　言

本书是在1985年人民交通出版社出版的《船体振动学》一书的基础上修订改编的，经船舶工程类教材编审组和中国船舶工业总公司教材编审室审定为船舶工程专业统编教材。

原书系根据1978年至1980年几次全国造船专业教材会议所通过的教学大纲，并参考陆鑫森、金咸定、刘涌康编的《船体振动学》(1980年12月国防版)和翁长俭、张保玉编著的《内河船的振动与噪声》(1981年8月交通版)编写的，并由船舶工程类教材编审组审定为造船专业全国统编教材。根据多年的教学实践和近年来船舶振动科学技术的发展，也听取了使用这一教材的兄弟院校的意见，这次修订本作了较多的修改和补充，并删去了船舶噪声部份。

本书适用授课时数为30～40学时，若取低限者，可将目录中带★部份略去，供学有余力者自学。

本书绪论及一、二、三、四章由翁长俭编写，五、六章及习题由张保玉编写。全书由翁长俭统稿，大连理工大学赵德有教授主审。限于水平和经验，不妥之处恳请读者不吝指正。在此向对这次修订提出宝贵意见和建议的主审及海军工程学院、镇江船院、哈尔滨船院等兄弟院校的同行们表示衷心感谢。

本书符号表

A 振幅、面积、常数；
a 加速度；
B 船宽；
C 粘性阻尼系数、常数；
D 直径、船舶型深；
d 直径，材料或结构的非弹性阻尼系数；
E 法向弹性模数；
$\overline{E}$ 复数法向弹性模数；
e 偏心距；
F 力；F_I 惯性力；
F_D 阻尼力；
F_S 弹性力；
f 以赫兹(Hz)计的频率；
f_m 以周每分(1/min)计的频率；
G 剪切弹性模数；
$\overline{G}$ 复数剪切弹性模数；
g 重力加速度；
H 高度；
h 高度、板厚；
I 剖面惯性矩、冲量；
J 转动惯量；
k 简谐系数；
K 弹簧刚度；
K_φ 扭簧刚度；
K_j 第j谐调广义刚度；
L 长度、船长；
l 长度；
M 力矩、弯矩、质量；
M_j 第j谐调广义质量；
N 正压力；
m 质量、柴油机冲程系数；
n 转速；
P 荷重；
$P(t)$干扰力；
$p(t)$主坐标、坐标函数；
Q 广义力、品质因子；
$q(t)$广义坐标；
R 半径、阻力；
r 半径、常数；
S 面积；
s 距离；
T 周期、轴向力、螺旋桨推力、动能；
T_D 位移的传递系数；
T_F 力的传递系数；
t 时间、厚度；
V 体积、位能；
v 速度；
W 重力、功；
u、v、w 位移、挠度；
x、y、z 位移、坐标；
α 动力放大系数；
β 相角、剪切角、船舶横剖面系数；
γ 比重、激励频率与固有频率之比；
δ 静伸长、对数衰减率；
ε 应变；
ζ 无因次阻尼系数；
ξ 频率错开系数；
η 隔振效率；
θ 转角、角位移、复数的幅角；
λ 特征值、波长；
μ 泊桑比，干摩擦系数；
ρ 密度；
σ 正应力；
τ 剪应力、时间、形状参数；
φ 相位角；
$\varphi(x)$振形函数；
ψ 振幅衰减系数、能量吸收系数、相角；
ω 圆频率、激励频率、角速度；
ω_n 固有圆频率；
$\{A\}$ 振幅列阵、常数列阵；
$[C]$ 阻尼矩阵；
$\{F\}$ 力列阵；

[F] 场迁移矩阵；

[K] 刚度矩阵；

[M] 质量矩阵；

{P} 对应于主坐标的广义力列阵；

[P] 点迁移矩阵；

{p} 主坐标列阵；

{Q} 对应于广义坐标的广义力列阵；

{q} 广义坐标列阵；

{Z}状态矢量列阵；

[Γ] 柔度矩阵；

[π] 迁移矩阵；

[ρ] 固有振形矩阵；

[φ] 振形矩阵、正则振形矩阵；

[I]单位矩阵；

[λ]特征值对角阵。

目　录

绪　论

早在十九世纪后期，船体振动问题就开始引起人们的注意。近年来，随着航运事业的发展，主机功率和转速的提高，以及船舶吨位加大，肥大船型的出现，致使船体振动问题日益突出。由于造船技术的进步，船体结构减轻，相应地结构刚度也跟着减小，这就更易激起较大的船体振动。近二十年来，在我国亦有不少海洋和江河船舶发生过较严重的振动问题。

过大的船体振动可导致结构产生疲劳破坏，影响船员和旅客的居住舒适性，影响船员的工作效率，甚至身体健康，还会影响船上的设备和仪表的正常工作，降低使用精度，缩短使用寿命。

严重的船体振动的产生，除建造质量及营运因素外，主要是设计问题，因而要求在船舶设计阶段就进行必要的结构动力计算。《船舶结构力学》和《船体强度》这两门课程主要是静力强度计算(后者还包括一部分动强度内容)，为结构静力学。而本课程则属于结构动力学范畴。

结构上所受的荷载可分为静力荷载和动力荷载两类：力的大小、方向和作用位置不随时间而变化或变化极其缓慢的称为静力荷载；力的大小、方向和作用位置随时间的改变而发生明显变化的，称为动力荷载。后者按时间变化的规律又可分为简谐周期荷载、非简谐周期荷载、冲击荷载、突加荷载和随机荷载五类。

结构的动力计算显然要比静力计算复杂。这是因为：

1. 在结构的静力计算中，只需要知道荷载、结构的几何尺寸和弹性特征，便能确定其内力和位移，而结构的动力计算，则还需要知道结构的质量及其分布；

2. 结构静力计算所得的内力和位移是确定的量值，不随时间而改变，而结构动力计算中由于荷载随时间而改变，因此求得的内力和位移也随时间而变化；

3. 在动力荷载作用下，使结构的质量产生了加速度，因而引起了惯性力，所以，在动力荷载作用下，任一瞬时结构的位移应考虑动力荷载和惯性力两者共同作用的影响；

4. 动力荷载与内力、位移之间，即使对弹性结构也不一定是线性关系，有时很小的动力荷载就会引起很大的内力和位移。

结构动力计算的目的是在动力荷载作用下，确定结构的内力、位移等参数随时间变化的规律，从而求出其最大值作为结构设计的依据。

本书作为结构动力学的一部分，其内容分为两部分。第一部分一到三章，为基础部分，以较多的篇幅讨论了单自由度系统、多自由度系统和弹性体的振动理论。这不仅是学好第二部分的基础，而且也是一个现代工科院校毕业生所必须具备的基本知识。第二部分为专业部分，包括引起船体振动的原因，船体结构的动力特性及其响应，船体振动的容许标准，防振与减振方法。前三项相当于结构静力学中的外力、内力与许用应力。

本书主要讨论船体及其局部结构在主机、螺旋桨等产生的周期激励作用下的稳态振动。至于船体与波浪拍击所产生的冲击力，及船舶在波浪上受到的随机载荷所引起的船体强度问题，则在《船体强度》教材中讨论。本教材也不涉及随机振动和非线性振动。

船体振动学科近十年来在国内外发展很快。作为结构振动计算，自从以迁移矩阵法计算船体总振动以来，短短几年已发展用有限元法、模态综合法、动态子结构法等作为实船和模型的

计算方法；随着集装箱船等大开口船舶日益增多，已发展用薄壁梁理论来求解船舶的弯扭耦合振动；工程上实用的近似计算方法和公式也得到不断的发展与完善。在实验技术方面，由于电子技术的发展，激振、测试、记录和分析等实验手段日益更新，利用实验模态的模态分析方法亦已开始在船体振动领域应用。科学技术日新月异，但在教材编写中仍着眼于基本理论和基本知识，以此为基础，读者可进一步阅读有关文献，为发展本学科作出贡献。

第一章　单自由度系统的振动

§1-1　系统的简化与单自由度系统的自由振动

振动是生产实践中经常遇到的一种自然现象，出现于各生产领域之中。除船舶振动外，飞机、车辆等交通工具，房屋、桥梁、水坝、海洋工程等工程建筑，蒸汽机、柴油机、汽轮机等动力机械，以及各种机械设备和精密仪器、仪表，都有振动及防振、减振的问题。此外还有一些利用振动来满足各种不同用途的振动机械（振动打桩机、混凝土捣实器、破碎机、振动筛），以及振动输送带等。

为了研究振动的规律，我们必须将实际的工程振动，即振动系统加以抽象、简化为简单的力学模型。由于影响振动特性的主要因素是质量和弹性，而在实际的工程结构中，质量和弹性的分布都比较复杂。所以在进行振动分析时，需根据所要解决的问题，抓住主要特点加以简化。例如可将实际结构中弹性较小的质量简化成无弹性的集中质量，而将质量较小的弹性元件简化为无质量的弹簧。又如可将杆、板等构件理想化为质量和刚度均布或有规律分布的连续介质。这样实际结构就可简化为由以上这些元件构成的振动系统，并可用相应的坐标来确定其运动。

确定振动系统的运动所需的独立坐标数目即为系统的自由度数，这种确定系统在空间位置的独立参变量称为广义坐标。在系统具有几何约束的条件下，系统的自由度与广义坐标的数目相等。当实际的结构简化成几个没有弹性的集中质量和没有质量的弹簧构成的简化系统时，自由度是有限的。若一个系统，在空间内任何瞬时的位置只需用一个座标来确定，则此系统就称为一个自由度的系统，简称为单自由度系统。反之，若实际系统必须按连续介质来考虑，则有无限个自由度，即系统的瞬时位置必须用函数形式来确定。

工程中的很多振动问题都可简化为（或近似看作为）单自由度系统的问题。如图 1－1 所示的安装在船底板架上的往复式发动机，可简化为一上下直线运动的质量 M。船底结构有一定的弹性，故它对发动机的作用可简化为一弹簧，即作为一弹性力 F。发动机内部有活塞、连杆、曲柄、飞轮系统；它们在运转过程中的不平衡惯性力是引起发动机振动的原因，因此它们的作用相当于作用在质量 M 上的外力 $F(t)$。此外，船底结构对发动机振动还有阻尼作用，它们相当于作用在质量 M 上的阻尼力 R。当然上述简化仅仅是初步的、近似的，实际上发动机除了上下振动之外，还有其它方向的振动和摆动。且有时发动机与机座之间并非刚性联结，而是装有弹性减振器；发动机本身也非刚体，而是一个弹性体。这时进一步简化模型就不是单自由度系统，而是多自由度系统、连续系统。可见系统的简化不是绝对的，而是随着实际系统的复杂程度和计算精度的要求而异。

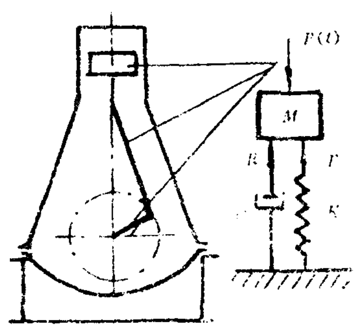


图 1－1

其次，振动系统中各参数的动态特性，严格地说都与系统的运动状态成非线性的复杂关

系，这就给振动的研究带来极大的困难。幸而工程实际中的振动，包括船体振动，大多是微幅振动，因此就有可能将上述非线性关系加以线性化。当振动体的位移和速度较小时，可认为弹性力是位移的一次函数，阻尼力是速度的一次函数。在这些条件下，系统的振动可用常系数线性微分方程来描述，称为线性振动。当然工程中也还有很多振动系统是不能线性化的，这就是非线性振动问题。本课程则限于线性振动。

前已述，工程中很多振动问题可简化为单自由度系统的问题。而单自由度系统的振动又揭示了振动现象的本质，是多自由度系统振动及船体振动的基础，故我们先研究单自由度系统的振动。对于图 1－1 所示的单自由度弹簧质量系统，由理论力学中的达伦倍尔原理可得其运动微分方程为

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P(t) \tag{1-1}$$

式中：C——粘性阻尼系数；

K——弹簧的刚度系数，简称为弹簧刚度。

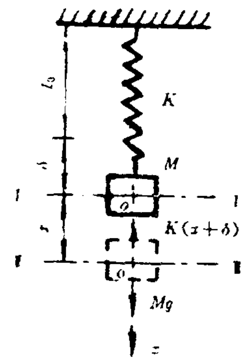


图 1－2

下面我们就以方程(1-1)来研究在给定激励作用下系统的动态特性。一个系统的特性由这些激励所产生的运动来表示，通常称为系统的响应。运动一般用位移来描述，激励可以表现为初始位移和初始速度，或者表现为外部作用力。系统对初始激励的响应通常称为自由振动，而对外部作用力的响应则称为强迫振动。

先研究无阻尼自由振动，如图 1－2 所示，即 $C=0, P(t)=0$。则式(1-1)变为

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \tag{1-2}$$

或

$$M\ddot{x} + K(x + \delta) - Mg = 0$$

其中：

$$\delta = Mg/K \tag{1-3}$$

为弹簧在重力 Mg 作用下的静伸长。这时系统除受常值重力作用外，只受到弹簧恢复力作用，而不受任何其它外力作用，故也称为固有振动。

无阻尼自由振动微分方程(1-2)可简化成：

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{1-4}$$

式中：

$$\omega_n^2 = \frac{K}{M}$$

式(1-4)为一常系数二阶线性齐次常微分方程，它的通解为

$$x = A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t \tag{1-5}$$

或写为

$$x = A\sin(\omega_n t + \varphi) = A\cos(\omega_n t + \varphi_1) \tag{1-6}$$

式中：A_1、A_2——积分常数，由初始条件确定。

$$\left.\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \\ \sin\varphi &= \frac{A_1}{A} \quad \cos\varphi = \frac{A_2}{A} \\ \varphi_1 &= \varphi - \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

于是质量的速度与加速度为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_n A\cos(\omega_n t + \varphi) \\ \ddot{x} &= -\omega_n^2 A\sin(\omega_n t + \varphi) \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

设在 $t=0$ 时，质量 M 产生的初始位移和初始速度分别为

$$x(0)=x_0, \quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0$$

则由式(1-5)、(1-6)可得

$$A_1=x_0, \quad A_2=\dot{x}_0/\omega_n \tag{1-9}$$

于是得式(1-4)的特解为

$$x=x_0\cos\omega_n t+\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t \tag{1-10}$$

而式(1-7)中的值为

$$\left.\begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/\omega_n)^2} \\ \sin\varphi &= \frac{x_0}{A}, \cos\varphi = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n A} \end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

由式(1-10)可见，单自由度系统的自由振动包括两个部分：一部分与 $\cos\omega_n t$ 成正比，其值决定于振动体的初始位移 x_0；另一部分与 $\sin\omega_n t$ 成正比，其值决定于振动体的初速度 $\dot{x}_0$。这种随时间按正弦或余弦函数变化的运动称为简谐振动。

为了说明 ω_n、φ 和 A 的物理意义，今用旋转矢量来表示简谐振动。为此引进一半径为 A 的参考圆，质点 M 在此圆周上以匀角速度 ω_n 沿逆时针方向作匀速圆周运动(图 1－3(a))。可以看到，当 M 点作圆周运动时，它在 x 轴上的投影点 M' 在 x 轴上以圆心 O 为平衡位置作上下来回振动。如果开始时($t=0$)质点 M 位于 M_0，$\overline{OM_0}$与 y 轴的夹角为 φ。经过时间 t 后，$\overline{OM_0}$转过角度 $\omega_n t$，M 点在 x 轴上的投影点 M' 离开平衡位置的距离，即位移 x 为

$$x = \overline{OM}\sin(\omega_n t + \varphi) = A\sin(\omega_n t + \varphi)$$

得到与式(1-6)同样的结果。如以 x 为纵坐标，$\omega_n t$ 为横座标，就可得 M' 的振动曲线(图 1－3(b))。

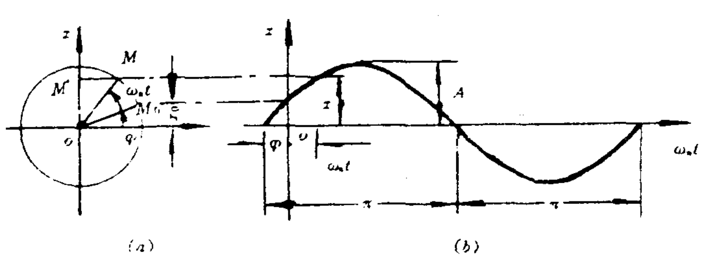


图 1－3

所得的结果表明质量的自由振动为简谐振动。其中旋转矢量的模 A 称为振幅，即质量的最大位移，为峰值(mm)；$\omega_n t+\varphi$ 称为振动的相角，φ 为初相角；旋转角速度 ω_n 称为圆频率或角

频率，即质量每秒内振动的弧度数，或 2π 秒内振动的次数，单位为 rad/s(弧度每秒)或 s^{-1}(每秒)，它仅取决于系统的固有性质(质量 M 及弹簧刚度 K)，而与运动的初始条件无关，故称为系统的固有频率，是表征振动系统固有性质的一个重要的特征值。

振动一周所需的时间为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} \tag{1-12}$$

称为周期，单位为 s(秒)工程上习惯用每秒振动的次数来表示频率，即

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}} \tag{1-13}$$

单位为 Hz(赫)。今后如无特殊的说明，本章所指频率均为圆频率。

系统固有频率除了用上述运动微分方程求得外，还可采用下列方式求取。对质量在铅垂方向的直线运动，其固有频率可用简便的静伸长法(或称静变形法)求得。由式(1-3)可得

$$K = \frac{Mg}{\delta}$$

故

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{Mg}{M\delta}} = \sqrt{\frac{g}{\delta}} \tag{1-14}$$

例 1－1　用静伸长法决定具有并联弹簧与串联弹簧直线振动系统的固有频率。

(1)并联情况(图 1－4(a))

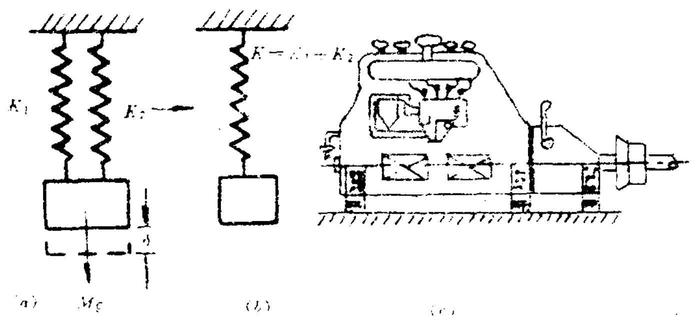


图 1－4

解：设弹簧系数分别为 K_1 和 K_2，在重力 Mg 作用下静位移为 δ，则有

$$Mg = K_1\delta + K_2\delta = (K_1 + K_2)\delta$$

固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{M}}$$

说明并联弹簧可以用一个弹簧的刚性系数为

$$K = K_1 + K_2$$

的弹簧来代替(图 1－4(b))。这一结果表明并联后总的弹簧系数是加大了。机械隔振经常用多个弹簧支承，如船舶主机就可由多个减振垫隔振(图 1－4(c))，这些隔振弹簧(或减振垫)就是并联弹簧的实例。

(2)串联情况(图 1－5(a))

解：设串联弹簧的系数分别为 K_1 和 K_2，质量的静位移 δ 等于每一弹簧的静伸长之和。

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

由于弹簧是串联的，因此每个弹簧都受到相同的重力 Mg，于是

$$\delta_1 = \frac{Mg}{K_1}, \delta_2 = \frac{Mg}{K_2}$$

这样有

$$\delta = Mg\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) = Mg\,\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2}$$

固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_1 K_2}{M(K_1 + K_2)}}$$

上式说明串联弹簧可以用一个弹簧刚性系数为

$$K = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

的弹簧来代替（图 1－5(b)）。这一结果表明串联后总的弹簧系数是降低了。图 1－5(c)示一隔振用的橡皮弹簧，它是由两块相同的橡胶叠合而成，设每一块的弹簧刚性系数为 K_0，则叠合后的系数为 $K_0/2$。

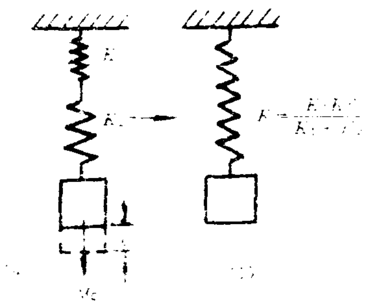


图 1－5

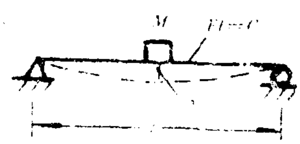


图 1－6

例 1－2、求图 1－6 所示带有集中质量的简支梁的固有频率。

解：集中载荷为 Mg，梁的分布质量相对较小，故忽略不计。由材料力学中的公式，简支梁中点的挠度为

$$\delta = \frac{Mgl^3}{48EI}$$

故

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{\frac{48EI}{Ml^3}}$$

若在质量下装弹簧（减振器）K，则

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = Mg\left(\frac{l^3}{48EI} + \frac{1}{K}\right)$$

所以

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{\frac{1}{M\left(\frac{l^3}{48EI} + \frac{1}{K}\right)}} = \sqrt{\frac{48EI}{Ml^3}}\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{48EI}{Kl^3}}}$$

因

$$\sqrt{\frac{1}{1+\frac{48EI}{Kl^3}}} \leqslant 1$$

故装设减振器后，使系统固有频率降低。

对于较复杂的单自由度系统，还可利用能量法来求解固有频率。仍考虑图 1－2 中的弹簧质量系统。质量 M 在振动时，它的速度是时刻在变化的，通过平衡位置时速度最大，这时质量 M 的动能也最大。当质量离开平衡位置继续向前运动时，它就要受到和运动方向相反的弹性恢复力的作用。这个力使它作减速运动，速度减小，动能也减小。在这个过程中，质量克服弹性恢复力做功，动能转化为弹性位能而储于弹簧内。质量达最大位移停止前进后，弹性力迫使质量向平衡位置作加速运动，同时弹簧释放其弹性位能为质量的动能。随着速度的增大，动能也增大，当质量达到平衡位置时，弹性位能全部转化为动能。在谐振动过程中，动能和弹性位能总是不断地相互转化的。在没有能量损耗时（即不考虑系统的阻尼），按能量守恒定律，系统在任何瞬间的位能 V 与动能 T 之和应恒为常数，即 $V+T=$ 常数，或可写作

$$\frac{d}{dt}(V+T)=0 \tag{1-15}$$

由于在任一瞬时（如图 1－2 中的位置 Ⅱ－Ⅱ）弹簧被拉长了 $(x+\delta)$，则弹簧具有的变形位能为

$$V_1=\frac{1}{2}K(x+\delta)^2=\frac{1}{2}Kx^2+Kx\delta+\frac{1}{2}K\delta^2$$

在计算质量的重力位能时，可令质量在静力平衡位置（图 1－2 中的 $I-I$ 位置）时的位能为零，于是可知在质量获得位移 x 时，重力位能为

$$V_2=-Mgx$$

所以系统的总位能为

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{2}Kx^2+Kx\delta+\frac{1}{2}K\delta^2-Mgx$$

计及 $K\delta=Mg$，可将上式简化为

$$V=\frac{1}{2}Kx^2+\frac{1}{2}K\delta^2=\frac{1}{2}Kx^2+C \tag{1-16}$$

式中：C—常数，$C=\frac{1}{2}K\delta^2$。

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2 \tag{1-17}$$

将公式(1-16)、(1-17)代入方程(1-15)，同样可导得系统的自由振动微分方程为

$$M\ddot{x}+Kx=0$$

其解同样可为

$$x=A\sin(\omega_n t+\varphi)$$

当质量经过平衡位置时，$x=0$，$\dot{x}=\dot{x}_{max}=\omega_n A$，故由式(1-16)、(1-17)系统的能量为

$$V+T=\frac{1}{2}M\omega_n^2A^2+C$$

而在最大振幅时，$x=A$、$\dot{x}=0$，故由式(1-16)、(1-17)，系统的能量为

$$V+T=\frac{1}{2}KA^2+C$$

应用能量守恒定律，此两瞬时的能量应相等，故得

$$\frac{1}{2}M\omega_n^2A^2=\frac{1}{2}KA^2$$

所以自由振动频率(即系统的固有频率)为

$$\omega_n^2=\frac{K}{M}$$

由上面的推导可见，系统位能中的常数 C 在计算过程中是不起作用的，因此在以后计算时，可将系统的位能写作

$$V=\frac{1}{2}Kx^2 \tag{1-18}$$

即只需考虑系统中弹簧的变形位能。此弹簧的变形位能由静力平衡位置算起，而不需考虑质量的重力位能。

在这种情况下，当系统振动过程中质量在静力平衡位置时，位能为零，动能最大。故

$$V+T=\frac{1}{2}M\omega_n^2A^2=T_{max}$$

质量在最大位移时，动能为零，位能最大。故

$$V+T=\frac{1}{2}KA^2=V_{max}$$

于是计算系统频率的公式可写作

$$V_{max}=T_{max} \tag{1-19}$$

下面是用能量法求系统自由振动频率的例子。

例 1－3：在图 1－6 所示的、带有集中质量 M 的简支梁中，梁的单位长度质量为 m，用能量法求其固有频率。

解：在例 1－2 中，忽略了梁的质量，求得梁的固有频率为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{48EI}{Ml^3}}$$

如果梁的质量比起集中质量不是甚小的话，上述解就不够精确。而在考虑梁的分布质量后，严格说来，系统应作为弹性体振动来考虑。但在某些场合，根据被解问题的性质与要求，也可简化为多自由度、甚至单自由度系统。这里我们考虑了梁的质量，但将问题仍然简化为单自由度系统来考虑。

在用能量法解题时，首先要根据边界条件，假定一个梁在振动时的挠度曲线。对简支梁可假定为

$$y(x)=A\sin\frac{\pi}{l}x$$

即认为在振动时，梁的中点振幅为 A，梁上其它点的振幅按正弦曲线分布。如梁按简谐规律振动，则梁上各点的振动位移为

$$v(x,t)=A\sin\frac{\pi}{l}x\sin(\omega_nt+\varphi)$$