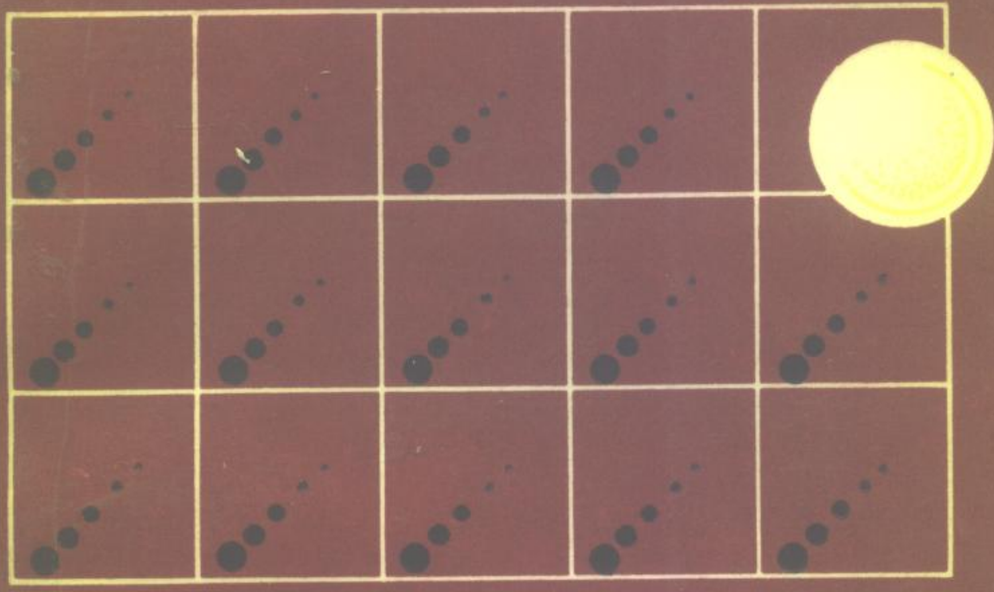

数学分析教程

（上册）

许绍溥　姜东平　宋国柱　任福贤

南京大学出版社

数 学 分 析 教 程

·上 册·

许绍溥　姜东平　宋国柱　任福贤

南京大学出版社

1992·南 京

内容提要

本书是按照1980年理科数学分析教学大纲并结合南京大学的实际情况而编写的．全书概念准确，论证严谨，文字浅显易懂，便於自学．丰富多彩的例题与多层次的习题大大加强了传统的分析技巧的训练，同时又注意适当引进近代分析的概念．本书可作为综合性大学、师范院校数学系各专业的教材，也可作为其他对数学要求较高的专业的教材或教学参考书，还可作为高等学校数学教师以及其他数学工作者参考用书以及硕士生报考者的复习用书．

全书分上下两册出版．上册共9章，包括极限理论，一元函数微积分，多元函数及其微分学．下册共10章，包括级数理论，傅里叶级数，反常积分与含参变量积分，线积分、面积分与重积分，囿变函数与RS积分，场论等．

数学分析教程

上册

许绍溥　姜东平
宋国柱　任福贤

南京大学出版社出版
（南京大学校内）
江苏省新华书店发行　丹阳市新华印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32　印张 18.5 字数 495 千
1990年4月第1版　1992年9月第2次印刷
印数 1501—4500
ISBN 7-305-00493-6/O·30
定价 6.80元

编者的话

《数学分析教程》是按照原教育部1980年5月制订的高等学校理科数学分析教学大纲并考虑到南京大学的实际情况为数学系各专业编写的基础课教材。在编写过程中，编者们力求做到：

使读者获得广博而坚实的分析基础。为此，不但对数列的极限，实数系的基本定理，函数的一致连续性，欧几里得空间的基本性质，向量值函数，函数项级数和含参变量积分，一致收敛性等部分作了适当的加强，而且还增加了连续性的拓扑学定义，上下连续和霍尔德连续以及凸函数的性质。此外，在第18章增加了囿变函数和RS积分的内容，这不但使得傅里叶级数的某些定理叙述得更为完美，证明更为简单，而且还为实变函数论中的LS积分打下了基础。在第6章增加了一节“简单的微分方程”，这既可以增加不定积分的训练，又可以使后行的常微分方程课得以删去过于简单的内容。

对各种概念的叙述准确严谨，全书的论证严密，具有科学性、逻辑性。例如，在极限理论中一开始就给出了极限的严格定义，并由此展开数学分析的全部内容．极限及连续性的理论都一次完成，而不采用一度流行过的先方法后理论的两步走方案。在阐述定积分概念时，特别强调指出定积分这一极限过程与函数的极限、数列的极限以及级数求和的不同，并指出在可积性确认以后又可把积分和的极限看成数列的极限。在论证由方程组所定义的隐函数时，增加了关于唯一性的几行文字，避免了不少教材所普遍存在的一个疏漏。

加强传统的分析技巧的训练。为此，选择了大量具有启发性、典型性的例题，并注意一题多解，前后呼应。其次，精心选择了一

整套习题。安排在每节后面的是为理解概念掌握基本方法所必备的，其中虽也有些较为困难，但为数不多。每章后面的总习题，大部分都有一定的难度，需要适当的技巧。它要求读者融会贯通所学到的数学分析知识，有时还涉及平行学科的有关内容，这些题目在类型上既有广泛性又有代表性。对于立志报考硕士生的读者是有所裨益的。

有广泛的适应性，易教易学。在证明比较困难的定理时，往往先进行适当的分析，以诱导读者的思路。对于较难的例题，在给出解法的同时，指出思想方法，讲清来龙去脉．对于容易模糊的概念，反复强调，不厌其烦。全部习题，书末都附有答案，难题还给出提示。

所有这一切，都是编者们所着意追求的。但由于水平所限，力不从心之处在所难免。热切希望得到同行以及广大读者的批评指正。

还需着重指出的是，本书对于实数理论的处理，采用的是逻辑学的方法，这与当前全国流行的种种教材完全不同。编者认为，这对于读者在后继课中理解函数空间的扩张是有好处的。

考虑到当今中学的教材内容，本书不再专门叙述函数概念以及集合的基础知识，这无论对于使用本书的学生、教师还是用来自学的读者都不会产生不便。

全书共19章，240学时可以讲完，对部分要求较低的读者以及学时不够充裕的教师，实数理论、上下连续、霍尔德连续、RS积分以及微分形式及其积分等内容可部分删去，这不会给整个教学过程带来困难。

本书是编者们在长期从事数学分析教学的基础上集体劳动的产物。第1—5章、第6—9章分别由许绍溥、姜东平执笔，第10—16章以及第17章§1—§4由宋国柱执笔，第18—19章以及第17章§5由任福贤执笔。许绍溥、任福贤分别担任了1—9章及10—19章的修订工作。最后由宋国柱统一全书。

金仪璐同志绘制了全部插图。

叶彦谦教授和沈祖和教授自始至终以高度热情关心本书的编写。尤其是叶彦谦教授，仔细阅读了初稿，提出许多可贵的意见，使本书在内容上以及处理方法上都增色许多。

在本书的筹备、出版过程中，得到南京大学校领导及教务处的积极支持。数学系副系主任朱乃谦副教授给予极大的关怀。于此，编者们一并深致谢忱。

目　录

第1章　极限理论

第2章　一元连续函数

第3章 导数与微分

第4章 利用导数研究函数

第5章 实数理论

第6章　不定积分

第7章　定　积　分

第8章 多元函数

第9章 多元函数的微分学

第 1 章

极限理论

极限理论是数学分析中的最基本理论之一，它是初等数学与高等数学的分水岭，整个数学分析可以说就是研究形形式式的极限。本章介绍数列的极限、函数的极限、实数系的基本定理。此外，还引进了上极限、下极限的概念，这对处理某些极限问题会带来方便。

§1 数列的极限

1.1 数列极限的定义

在中学数学教材中已经指出：**数列**是一个定义域为自然数数集(记为N)的函数，即自变量从小到大依次取自然数时，相对应的一系列有顺序的函数值。它也可看成一个N→R的映射(其中R记所有实数的集合)。

数列的一般形式可以写成为

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

其中 x_n 称为**数列的第 n 项**，或者称为**通项**。为书写简单起见，把上面的数列简单记为 $\{x_n\}$. 当它和通项不会发生混淆时也记为 x_n.

数列和集合是有差别的。其一为数列中的元素(即项)是有一定次序的，而集合中的元素是没有次序的；其二为数列中各元素可以相同，而集合中各元素是不同的. 所以有时将数列 $\{x_n\}$ 称为集合 $\{x_n\}$ 时，就约定该集合是由数列中所有互不相同的项为元素所

组成的集合。

对于一个 $\{x_n\}$ 来说，当 n 无限增大时，对应的值 x_n 可能是毫无规律的，但也有一类数列，当 n 无限增大时，x_n 趋近于某一个定数 a，这种趋近过程可以是多种多样的，比如 x_n 的值随 n 的增加而增加，而且不断向 a 靠近；x_n 的值随 n 的增加而减少，而且不断向 a 靠近；x_n 的值随 n 增加时而大于 a 时而小于 a，但不断向 a 靠近；当 n 无限增大时，x_n 可以不等于 a，也可以等于 a，或者可以有无穷多项等于 a，甚至可以每一项都等于 a. 怎样用数学的语言来描述“n 无限增大时，x_n 趋近于 a”呢？也即怎样用客观的尺度来衡量“无限增大”及“趋近于”呢？这就是我们下面要讲的“极限的 ε-N 定义”。

对于数列 $\{x_n\}$，如果存在一个实数 a，无论预先指定多么小的正数 ε，都能在数列中找到一项 x_N，使得这一项后面的所有项与 a 的差的绝对值都小于 ε，这时就把实数 a 叫做数列 $\{x_n\}$ 的**极限**。

我们用简单的数学语言概括成下面的定义。

定义(ε-N)　$\{x_n\}$ 是已知数列，a 为已知实数，如果对任给 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathrm{N}$，当 $n\in\mathrm{N}$ 且 $n>N$ 时，就有

$$|x_n-a|<\varepsilon, \tag{1.1}$$

则称当 $n\to\infty$ 时，$\{x_n\}$ 有**极限** a，也可称当 $n\to\infty$ 时，$\{x_n\}$ **收敛于** a，或**趋于** a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

或

$$\text{当 } n\to\infty \text{ 时，} x_n\to a,$$

及

$$x_n\to a \quad (n\to\infty).$$

其中 lim 是 limit (极限)的缩写。

有了收敛的概念后，有必要在这里提一下它的反面——发散。

定义(发散)　若 $\{x_n\}$ 不以任何实数为极限，就称 $\{x_n\}$ 是**发散数列**，简称 $\{x_n\}$ **发散**。

对于数列极限的 ε-N 定义，虽然在中学里已经讲过，这里仍

有必要对其中的细节再强调一次。

1° ε 的任意性。确切地说，定义中的 ε 是否可以任意小。

2° N 的存在性。一旦 ε 选定后，N 就能找到。这个 N 可能随 ε 变动（一般地说，ε 越小，N 就得越大）。有时为了突出这种依赖关系，就记 N 为 N_ε 或 $N(\varepsilon)$。也就是把 N 看成是 ε 的函数。又因为对选定的 ε，若 N 满足定义中的要求，则 $N+1$，$N+2$，…当然更满足要求，也可以选为定义中的 N，所以这时函数 $N(\varepsilon)$ 已经不是单值确定的了，而有无穷多个值可以适用。但在定义中，实际上只关心 N 的存在性，它可以从这无穷多个值中任意选一个，而不必去找最小的 N。

3° ε 必须为正实数。若取 $\varepsilon<0$ 或 $\varepsilon=0$，则 (1.1) 式永远不能成立，从而得以任意数列都没有极限存在的结论。

4° 定义中有些话的先后次序不能随意改变。比如改成"存在 $N\in\mathrm{N}$，对任给 $\varepsilon>0$，只要 $n\in\mathrm{N}$ 且 $n>N$ 时，就有……"就不行了。因为这修改后的话表示：该 N 对所有正的 ε 都适用，一般说这是不可能的。但是，这并不说明定义中的语句不可修改。在 ε-N 定义中的有些语句作适当的修改后，可以得出和 ε-N 定义等价的定义。请读者自己动手对一些地方作些修改，并给于证明。下面我们给出一个修改，因为它使用方便，所以以后经常用到它。

ε-N 定义（记为 A）的等价定义（记为 B）：任给 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathrm{R}$，当 $n\in\mathrm{N}$ 且 $n>N$ 时，就有

$$|x_n-a|<m\varepsilon, \tag{1.2}$$

（其中 m 为与 ε 无关的正常数），则称 $n\to\infty$ 时，$x_n\to a$。

显然 A 成立时必有 B 成立，因为 $\mathrm{N}\subset\mathrm{R}$，所以存在 $N\in\mathrm{N}$，必有 $N\in\mathrm{R}$。而 A 中 (1.1) 成立，对应于 B 中 $m=1$ 时情况，其中 $m=1$ 显然是与 ε 无关的正常数，所以 B 成立。

反之，若 B 成立，即任给 $\varepsilon>0$，对 $\varepsilon_1=\dfrac{1}{m}\varepsilon>0$，存在 $N_1\in\mathrm{R}$，当 $n\in\mathrm{N}$ 且 $n>N_1$ 时，就有

$$|x_n-a|<m\varepsilon_1=\varepsilon.$$

若用 $[x]$ 记不超过 x 的最大整数（简称 x 的取整）。取 $N=[N_1]$，则当 $n\in\mathrm{N}$ 且 $n>N$ 时，更有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

即 A 也成立。

在中学的数学教材中，已经用 ε-N 定义证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

显见，对于每项都等于 a 的常数列，它以 a 为极限。下面再给出一些例子。

例 1 证明当 $|q|<1$ 时，有 $q^n\to 0\,(n\to\infty)$.

证 对于任给 $\varepsilon>0$，最后要求有

$$|q^n-0|<\varepsilon,$$

即

$$|q^n|<\varepsilon.$$

取对数后，得

$$n\ln|q|<\ln\varepsilon.$$

注意到 $\ln|q|<0$ 这一点后，必须要求

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

因此，对于任意 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\left|\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right|\right]$，当 $n\in\mathrm{N}$ 且 $n>N$ 时，就有

$$|q^n-0|<\varepsilon,$$

即

$$n\to\infty\text{ 时，}\quad q^n\to 0.$$

例 2 证明当 $a>1$ 时，有 $a^{\frac{1}{n}}\to 1\,(n\to\infty)$。

证 用例 1 的证法同样可以证本例，今换一种方法，用预先建立不等式的方法来证明。

由二项式展开式取两项，得

$$(1+A)^n>1+nA\quad(A>0).$$

令

$$A=a^{\frac{1}{n}}-1,\ x_n=a^{\frac{1}{n}}.$$

得

$$|x_n-1|=|a^{\frac{1}{n}}-1|=A<\frac{1}{n}[(1+A)^n-1]$$

$$=\frac{1}{n}(a-1).$$

任给 $\varepsilon>0$，要

$$|x_n-1|<\varepsilon,$$

只要

$$\frac{1}{n}(a-1)<\varepsilon,$$

即

$$n>\frac{a-1}{\varepsilon},$$

所以对于上面给的 $\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$，当 $n\in\mathrm{N}$ 且 $n>N$ 时，就有

$$|x_n-1|<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1.$$

例 3 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1. \tag{1.3}$$

证 因为

$$n=(\sqrt[n]{n})^n=[1+(\sqrt[n]{n}-1)]^n>\frac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{n}-1)^2,$$

其中取了二项式展开式的第三项，最后得

$$\sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right]$，当 $n\in\mathrm{N}$ 且 $n>N$ 时，就有

$$0<\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

例 4 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{2n^2+1}=\frac{1}{2}.$$

证 因为

$$\left|\frac{n^2+n+1}{2n^2+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2n+1}{2(2n^2+1)}\right|<\frac{2n+1}{n^2}$$

$$=\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{3}{n},$$

对于任给 $\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$，当 $n\in\mathrm{N}$ 且 $n>N$ 时，就有

$$\left|\frac{n^2+n+1}{2n^2+1}-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{3}{n}<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{2n^2+1}=\frac{1}{2}.$$

以上四例基本上是两种方法，其一是对 $|x_n-a|$ 进行放大，简称为放大法；其二是先建立不等式。两者都要求最后结果是可以任意小的（以后我们将称它为无穷小）。假如放大后结果不是可以任意小的。比如

$$|x_n-a|<4n,$$

就不能要求 $4n<\varepsilon$ 了，这样建立起来的不等式已成无用。初学者易犯此错误。

了解了 ε-N 定义后，下面介绍 ε-N 定义的几何意义。

定义（a 的 ε- 邻域） a 的 **ε- 邻域**是指数轴上和 a 的距离小于 ε 的所有点的集合，也就是开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$。其中区间的长度称为**邻域的长度**，而 ε 称为**邻域的半径**。

这样，(1.1)式

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

就表示 $x_n\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，或者 x_n 属于 a 的 ε- 邻域。

将 ε-N 定义用几何语言来表示，其中"任给 $\varepsilon>0$"表示在实轴上任意给了一个开区间（图 1.1 中划有斜线部分），因为 ε 是任意的，所以该邻域的长度可以任意的小。"存在 $N\in\mathrm{N}$，当 $n\in\mathrm{N}$ 且 $n>N$ 时，就有 $|x_n-a|<\varepsilon$"表示存在一个足码 N，而所有足码大于 N 的点 x_n 都属于邻域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$。而在 a 的 ε- 邻域外，只有 $\{x_n\}$ 中前 N 项可能存在。这就是极限定义的几何意义。