材料力学解法与技巧

黄　钟　范德顺　编著

天津科学技术出版社

材料力学解法与技巧

黄钟　范德顺　编著

天津科学技术出版社

责任编辑：苏飞

材料力学解法与技巧

黄钟　范德顺　编著

●

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

天津新华印刷一厂印刷

新华书店天津发行所发行

●

开本850×1168毫米　1/32　印张10.25　字数290,000

1987年7月第1版

1987年7月第1次印刷

印数：1－11,500

书号：15212·204　　定价：2.60元

ISBN 7-5308-0087-6/TB·1

内 容 简 介

本书以论述材料力学的典型方法为主，重点讨论了那些具有简易性和实用性的工程方法和技巧，因而有助于读者提高分析能力、概括能力和解决实际问题的能力。

本书内容包括：拟梁法、逐段刚化法、折算刚度法与折算载荷法、三弯矩方程的适用范围和修正形式、等强度设计法、极限设计法以及大挠度理论等章。每章所列例题都具有一定实用价值。

本书可作为理工科院校材料力学课程的补充读物，也可供有关工程技术人员参考。

前　　言

1979年，我们在化工机械系讲授材料力学时，采用了“台阶式”教学法，着眼于培养学生的自学能力，在改革教学方法方面作了一些探索。

“台阶式”教学法是根据认识需要反复深化的客观规律，将每个单元的教学分成泛读、发疑、释疑三个阶段进行，让学生的认识过程经历三个台阶。泛读是为了使学生能跳出教材的局限，自学指定的一些参考书，以开阔视野；发疑是诱导学生提出问题，而又不立即解答，给学生创造充分思考的条件；释疑是总结学生的学习，回答学生思而不解的问题，使学生的认识得到提高和深化。

通过多次“台阶式”教学法的实践表明，这种教学法需要学生多读、多思考，课下花的时间多一些。教师则需要在如何组织安排教学、如何启发引导学生上下功夫。这样做就能使同学们学得更活、更牢，从而提高了自学和独立思考能力。更重要的是，对学生将来独立从事科研工作会增加解决实际问题的能力。

为了在释疑阶段使学生的认识得到提高和深化，针对学生中提出的主要问题，我们举办了名为“教学拾零”的系列讲座。例如：摩尔圆的妙用、弯矩图谬误种种、级数“驯”e、三弯矩方程巧解刚架、拟梁法、折算刚度法与折算载荷法、等强度设计法、极限设计法，等等。由于这些讲座是在学生经过充分的自学、讨论和“碰钉子”之后进行的，因此，针对性强，富有启发性。同时，为了使学生能摆脱“就题论题”的局限，我们在讲座中特别注重介绍材料力学方法的典型性与普遍性，尽力做到有虚有实，以利于培养学生的分析与概括能力，

讲座的内容主要取材于以下几个方面：一、重要内容的背景材料；二、典型问题的解法与技巧；三、重要概念理解上的各种谬误；四、常规方法的改进；五、基本公式的适用范围以及它在专业设计上的应用和修正。

本书的内容，除取材于过去“教学拾零”的讲稿外，还增加了许多有关材料力学方法的评论与应用的新内容，读者如欲窥其全豹，可阅读书后的参考文献。

本书不同于一般的材料力学教科书要求系统性和完整性，而是采用“削枝强干”的方式重点讨论梁的弯曲理论与方法，突破过去“拉、压、剪、扭、弯”平均使用力量的程式。我们希望一般稍具材料力学知识的读者，能够通过自学方式读懂本书；也希望能对教材料力学的教师和从事机械结构设计的工程技术人员有所裨益。但由于水平所限，又是教材改革中的一个尝试，缺点和错误在所难免，恳请读者不吝赐教。

在试行“台阶式”教学法的过程中，北京化工学院的张声扬、何清两位老师作了大量工作，谨致由衷的感谢。

黄钟　范德顺

1986年8月于北京化工学院

目　录

符号说明

A　面积、常数
a　常数、面积、尺寸、距离
B　常数
b　常数、尺寸、距离
C　常数
c　常数、孔径、中性轴至梁外缘表面的距离
D　直径、常数
d　直径、距离、影响系数
E　弹性模量、第二类椭圆积分
e　偏心距
F　集中力、面积、内力、第一类椭圆积分
f　挠度、距离、频率、形状因子
f_s、f_x、f_y　剪切挠度因子
G　剪切弹性模量
g　重力加速度
H　力、距离
h　高度、尺寸
I　平面面积的惯性矩（或二次矩）
I_e　当量惯性矩
i　载荷折算系数
J　极惯性矩
K　刚度、曲梁截面模量
k　弹簧常数、曲率、距离、比值
k_t　形状修正因子
k_r　应力放大系数
L　长度、跨度、弧长
l　长度、跨度、弧长
M　弯矩　力矩
M_n　扭矩
M_p　塑性弯矩
M_s　屈服弯矩
m　力偶矩
N　轴向力、转数
n　安全系数、数目、整数、无量纲系数
O　坐标原点
P　载荷、集中力
P_a　使用载荷
P_s、p_u　极限载荷
p　压力
Q　剪力、轴力
q　载荷集度、广义坐标
$\dot{q}$　广义速度

$\ddot{q}$　广义加速度
R　支反力、半径
R_c　形心层曲率半径
R_n　中性层曲率半径
r　半径
S　静面矩（或一次矩）、弹性截面模量
s　弧长、距离
T　扭矩、温度
T_e　弹性扭矩
T_p　塑性扭矩
t　厚度
U　变形能
u　无量纲变量
V　支反力
W　梁的截面模量、重量、功、集中力
w　载荷集度
X　静赘余力
x,y,z　直角坐标、距离
Z　塑性截面模量
α　比值、材料的线胀系数
β　比值、角度、锥度系数
δ Δ　挠度、位移、伸长量
ε　应变
θ　角度、梁的斜度
ρ　径向坐标、曲率半径
ν　泊松比
σ　法向应力
σ_b　极限应力
σ_r　径向应力
σ_s　屈服应力
σ_t　环向应力
$[\sigma]$　许用应力
τ　剪应力
τ_s　屈服剪应力
ϕ φ　角度
ψ　角度
ω　弯矩图面积、临界转速

第一章　复杂断面惯性矩的计算法

在结构设计中，无论是构件的应力分析还是变形计算，均需确定断面的几何性质，特别是要预先计算出断面的轴惯性矩I或极惯性矩J. 对于规则平面图形的几何性质，附录1列举了计算这类简单图形的面积、形心位置和惯性矩的公式，然而，在实际问题中通常还会遇到具有非对称或不规则轮廓线截面的构件，其截面惯性矩的计算没有现成的简单公式可以套用.本章将介绍可供近似计算的三种工程方法.

1·1 表 格 法

对于图1·1所示任意形状的平面图形，可预先选取参考轴标定其位置.其中水平轴x与图形的最低点相切，称为基轴.用一组与基轴平行的水平直线分割原图形，只要分点充分加密或选取

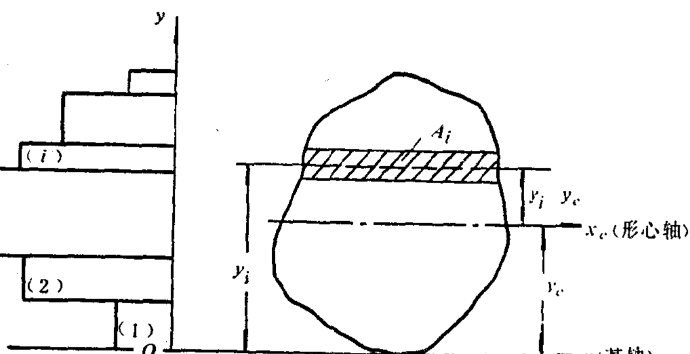

图 1·1　平面图形的折算截面

适当，总可以得到一个与原图形相近的，并由若干矩形条组成的组合截面，称为原图形的折算截面。为了便于下面列表计算惯性矩，将矩形条标号，如图1·1所示。

首先分析第i个矩形条A_i（也代表它的面积）关于截面形心轴x_c（其位置尚待确定）的惯性矩。显然，按移轴定理，它应等于

$$I_i+(y_i-y_c)^2A_i$$

式中I_i代表A_i对其形心线的惯性矩，y_i为A_i的形心的纵标；于是，整个截面对形心轴x_c的惯性矩便等于：

$$\begin{aligned}I_c&=\sum[I_i+(y_i-y_c)^2A_i]\\&=\sum I_i+\sum y_i^2A_i+y_c^2\sum A_i\\&\quad-2y_c\sum y_iA_i\end{aligned}\tag{1·1}$$

此外，根据形心公式

$$y_c=\frac{\sum A_iy_i}{\sum A_i}\tag{1·2}$$

或写成 $\sum A_iy_i=y_c\sum A_i$

将此式代入（1·1）式后，即有

$$I_c=\sum I_i+\sum y_i^2A_i-y_c^2\sum A_i\tag{1·3}$$

为了计算方便，通常将（1·3）式制成表1·1的格式进行演算。设矩形条A_i的宽（沿x向的尺寸）为b_i，高（沿y向的尺寸）为h_i，则$A_i=b_ih_i$，$I_i=\frac{1}{12}b_ih_i^3$（$i=1,2,\cdots$）。附带说明一下，如果在折算断面中除了矩形条之外还包括三角形（为了减少分割点，出现这种情况是完全必要的），A_j，I_c的计算仍然按公式（1·3）进行，只须将该三角形单元A_j的相应面积和惯性矩按下式计算即可：

$$A_j=\frac{1}{2}b_jh_j$$

$$I_j=\frac{1}{36}b_jh_j^3$$

表1·1 复杂断面惯性矩的计算表格

矩形条序号	几何尺寸 b_i	几何尺寸 h_i	y_i	$A_i=b_ih_i$	A_iy_i	$A_iy_i^2$	h_i^3	$I_i=\frac{1}{12}b_ih_i^3$ ($I_i=\frac{1}{36}b_ih_i^3$)
(1)								
(2)								
(3)								
⋮								
求和 Σ				ΣA_i	ΣA_iy_i	$\Sigma A_iy_i^2$		ΣI_i

【例1·1】塑料注射机后模板危险断面之半（图1·2），其惯性矩就可以采用表格法计算，图中未标明单位的尺寸一律按毫米计算。

解：第一步，根据原始图形的轮廓线特征，只须再取4个分

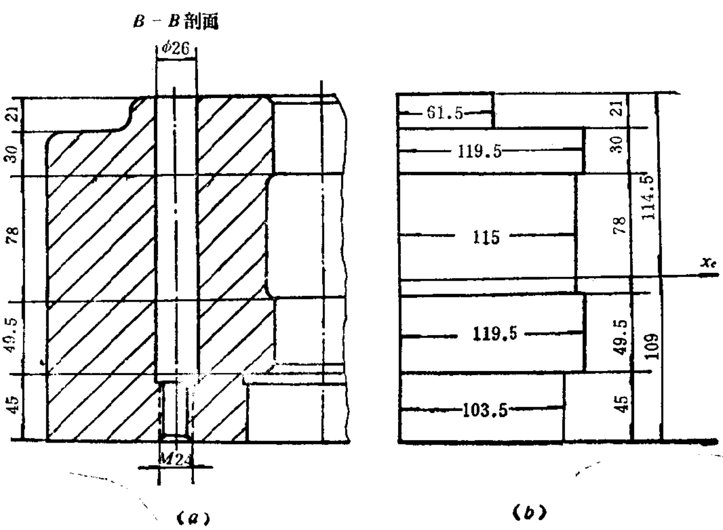

图 1·2 复杂断面的简化

点，亦即其折算断面仅需 5 个矩形条组成如图1·2(*b*)所示。第二步，按表1·1的格式将这 5 个矩形条的几何尺寸分别填入所在空格，如表1·2所示.最后，用计算器按行由左向右计算空格内的量值，在求得所需的 4 个求和值Σ之后，即可由公式（1·2）和（1·3）算得截面的形心位置及关于形心轴的惯性矩.

表1·2　例1·1的计算表格

单元序号	几何尺寸		y_i (cm)	$A_i=b_ih_i$ (cm^2)	A_iy_i (cm^3)	$A_iy_i^2$ (cm^4)	h_i^3 (cm^3)	$I_i=\frac{1}{12}b_i\ h_i^3$ (cm^4)
	b_i (cm)	h_i (cm)						
(1)	10.35	4.5	2.25	46.58	104.79	235.79	91.13	78.60
(2)	11.95	4.95	6.98	59.15	412.88	2881.93	121.29	120.78
(3)	11.5	7.8	13.35	89.7	1197.50	15986.56	474.55	454.78
(4)	11.95	3	18.75	35.85	672.19	12603.52	27	26.89
(5)	6.15	2.1	21.3	12.92	275.09	5859.41	9.26	4.75
求和 Σ				244.2	2662.45	37567.21		685.8

$$y_c=\frac{\sum A_iy_i}{\sum A_i}=\frac{2662.45}{244.2}=10.90\text{cm}$$

$$I_c=\sum I_i+\sum A_iy_i^2-y_c^2\sum A_i$$
$$=685.8+37567.21-(10.90)^2(244.2)$$
$$=9239.6\ (\text{cm}^4)$$

于是，整个危险断面的惯性矩即为：

$$2I_c=18479.2\ (\text{cm}^4)$$

1·2　辛卜生方法

如果截面的轮廓是由光滑曲线围成，则其惯性矩的计算以辛卜生方法较为适宜.对于图1·3所示平面图形，可以一组与纵轴Oy平行的直线将它在x轴的投影等分为n段，并设n为偶数。

首先推导面积公式．为了简便起见，不妨以O_i为临时原点，写出图中带阴影线的矩形条面积．为此，选用抛物线插值公式

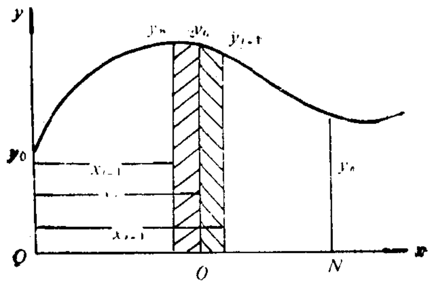

图 1·3　辛卜生插值方法

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1·4}$$

连结曲边上的三个分点．显然上式中的常数a、b、c可直接由边界条件定出：

当　$x = 0$，　$y_i = c$

$x = -h$，$y_{i-1} = ah^2 - bh + c$

$x = h$，　$y_{i+1} = ah^2 + bh + c$

式中

$$h = \frac{\overline{ON}}{n}$$

由以上三式即可确定常数

$$a = \frac{1}{2h^2}\ (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) \tag{1·5}$$

$$b = \frac{1}{2h}\ (y_{i+1} - y_{i-1}) \tag{1·6}$$

$$c = y_i \tag{1·7}$$

于是图中的两块阴影面积之和即等于：

$$A_i = \int_{-h}^{h} y dx = \frac{2a}{3}h^3 + 2ch$$

$$A_i=\frac{h}{3}\left(y_{i-1}+4y_i+y_{i+1}\right) \tag{1·8}$$

这样，图形的总面积即为

$$A=\sum_{i=1,3,\cdots}^{n-1}A_i$$

$$=\frac{h}{3}\Big[y_0+4\sum_{i=1,3,\cdots}^{n-1}y_i$$

$$+2\sum_{i=2,4,\cdots}^{n-2}y_i+y_n\Big] \tag{1·9}$$

按同样的处理方法，不难推得图形关于y轴的一次矩（静面矩）和二次矩（惯性矩）。

图1·3所示阴影面积对y轴之静面矩，显然可以写成

$$S_i=\int_{-h}^{h}(x_i+x)\ y\,dx$$

$$=x_iA_i+\int_{-h}^{h}(ax^3+bx^2+cx)\ dx$$

$$=x_iA_i+\frac{2b}{3}h^3$$

$$=\frac{h}{3}\Big[x_{i-1}y_{i-1}+4x_iy_i+x_{i+1}y_{i+1}\Big] \tag{1·10}$$

于是，总的静面矩应等于：

$$S_y=\sum_{i=1,3,\cdots}^{n-1}S_i=\frac{h}{3}\Big[x_0y_0+4\sum_{i=1,3,\cdots}^{n-1}x_iy_i$$

$$+2\sum_{i=2,4,\cdots}^{n-2}x_iy_i+x_ny_n\Big] \tag{1·11}$$

同理，可写出对y轴之惯性矩为：

$$I_y=\frac{h}{3}\Big[x^2{}_0y_0+4\sum_{i=1,3,\cdots}^{n-1}x_i^2y_i$$